

# Application de la borne de Cramer-Rao dans le cas de systèmes antennaires complexes de goniométrie

A. BELLION<sup>(1)</sup>, C. LE MEINS<sup>(2)</sup>, A. JULIEN-VERGONJANNE<sup>(3)</sup>, T. MONEDIERE<sup>(3)</sup>, A. FERREOL<sup>(4)</sup>, P. CHEVALIER<sup>(4)</sup>

(1) XLIM / THALES Communications France, 110 Avenue du Maréchal Leclerc, 49300 Cholet, FRANCE

[anthony.bellion@fr.thalesgroup.com](mailto:anthony.bellion@fr.thalesgroup.com)

(2) THALES Communications FRANCE, 110 Avenue du Maréchal Leclerc, 49300 Cholet, FRANCE

[cyrille.lemeins@fr.thalesgroup.com](mailto:cyrille.lemeins@fr.thalesgroup.com)

(3) XLIM UMR CNRS 6172 - ENSIL, 16 rue d'Atlantis, 87068 Limoges, FRANCE

[anne@ensil.unilim.fr](mailto:anne@ensil.unilim.fr) [monediere@unilim.fr](mailto:monediere@unilim.fr)

(4) THALES Communications France, 160 Boulevard de Valmy, 92704 Colombes, FRANCE

[anne.ferreol@fr.thalesgroup.com](mailto:anne.ferreol@fr.thalesgroup.com) [pascal.chevalier@fr.thalesgroup.com](mailto:pascal.chevalier@fr.thalesgroup.com)

**Résumé** – Généralement, la borne de Cramer-Rao des directions d'arrivée de signaux sur un réseau de capteurs est calculée de façon théorique [1] [2] [3]. Or dès que l'on désire effectuer une application numérique de la borne de Cramer-Rao pour un système donné, on est souvent amené à effectuer des suppositions et/ou des simplifications. En effet, il est souvent très difficile de tenir compte et de modéliser l'environnement et les différents phénomènes pouvant perturber le réseau de capteurs, comme le couplage entre antennes, l'influence d'un porteur (mat ou véhicule) en termes de diffraction, de réflexion ou même la présence d'un sol. Dans ce travail, nous utilisons un logiciel de simulation électromagnétique pour estimer l'impact de l'environnement réel sur le vecteur direction d'un système antenne complexe de goniométrie. La borne de Cramer-Rao déterministe des directions d'arrivée de signaux est ensuite déterminée pour le réseau de capteurs de goniométrie soumis à des perturbations. Les résultats montrent que la précision dépend fortement de la prise en compte des couplages et perturbations du système antenne. On montre ainsi que l'environnement a un impact non négligeable et que l'on peut calculer une borne de Cramer Rao des directions d'arrivée plus réaliste et ainsi optimiser dans certains cas le système antenne de goniométrie en fonction de son environnement.

**Abstract** – This paper focus on Cramer-Rao Lower Bound (CRLB) estimation of very complex Direction Finding System (DFS). Most of the time, the CRLB is computed with assumptions and/or simplification because we can't take into account the environment. We consider in this study DFS with many disturbing elements (coupling, mast, vehicle, ground etc...) which is the most representative of the real conditions of installation of direction finding systems. In order to compute the CRLB, we use electromagnetic simulation software to estimate the direction vector with more accuracy taking into account the effect of the environment. This method of computation allows us to analyse the real impact of disturbing elements on the DFS, and the results obtained allow us to have a more realistic estimation of the Cramer Rao lower bound and to optimize in some cases the direction finding system as a function of its environment.

## 1. Borne de Cramer-Rao pour des systèmes antennaires mono source

D'une façon générale, la borne de Cramer-Rao (BCR) permet de fixer une limite inférieure à la variance d'erreur de goniométrie qu'il est possible d'atteindre dans l'estimation d'un ou de plusieurs paramètres, sur la base d'une observation de distribution statistique connue.

Le calcul de cette borne en traitement du signal est souvent intéressant :

- Dans des problèmes théoriques, pour s'assurer qu'un estimateur est de variance minimale ou bien qu'au contraire il y a place pour des améliorations.

- Dans les applications pratiques où il s'agit de concevoir un système devant répondre à des spécifications. Il s'agit alors de s'assurer que les performances demandées ne sont pas à priori hors d'atteinte avec les observations envisagées.

Dans une application de goniométrie, nous considérons dans un premier temps, un modèle multi source en espace libre. Le modèle d'observation, pour les  $\mathbf{K}$  acquisitions temporelles des signaux reçus par  $\mathbf{N}$  antennes dus à  $\mathbf{P}$  sources bandes étroites à une même fréquence  $\omega_0$ , s'écrit :

$$X_k = \sum_{i=1}^P d_i \cdot a_{i,k} + n_k = D \cdot a_k + n_k; k = 1, \dots, K \quad (1)$$

$[\mathbf{X}_k]_n$  est l'observation du  $n$ -ième élément à l'instant  $k$ .

Le terme  $a_{i,k}$  est le  $k$ -ième échantillon de l'amplitude complexe du signal de la  $i$ -ème source pris par rapport à la référence. On note :  $\mathbf{a}_k = [a_{1,k}, \dots, a_{p,k}]^T$ .

Les amplitudes complexes sont ici traitées comme des quantités déterministes de valeurs inconnues. Le vecteur direction :

$$\mathbf{d}_i = [g_1(\theta_i) \cdot \exp\{j \cdot \omega_0 \tau_1(\theta_i)\}, \dots, g_N(\theta_i) \cdot \exp\{j \cdot \omega_0 \tau_N(\theta_i)\}]^T$$

(steering vector) donne les réponses du réseau dans la direction angulaire de la  $i$ -ième source,  $\theta_i$ . On note :  $\mathbf{D} = [\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_p]$ .

Les  $\mathbf{N}$  réponses complexes en gain et phase des éléments donnés par  $\mathbf{g}_N(\theta)$  sont des fonctions de  $\theta$ , ( $\mathbf{g}_N(\theta) = \mathbf{M}_N(\theta) \cdot \exp\{j \cdot \varphi_N(\theta)\}$ ). La valeur  $\tau_N(\theta)$  correspond au retard de propagation entre le point de référence et le  $n$ -ième élément pour un signal d'incidence  $\theta$ .

Le bruit additif  $\{n_k; k=1, \dots, K\}$  est une variable complexe gaussienne indépendante et identiquement distribuée, de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\sigma^2 \mathbf{I}$ .

La borne de Cramer-Rao des directions d'arrivée de signaux pour une source, c'est à dire la variance limite de mesure de  $\theta$ , s'écrit pour un système quelconque [4]:

$$\sigma_\theta^2 \geq \frac{1}{2 \cdot K \cdot RSB \cdot \left( \|d'\|^2 - \frac{|d'^H d|^2}{\|d\|^2} \right)} \quad (2)$$

Avec RSB : le Rapport Signal sur Bruit du système, et  $\mathbf{d}'$  : la dérivée par rapport à  $\theta$  du vecteur direction décrit ci dessus.

Le terme entre parenthèse au dénominateur, traduit l'effet de la géométrie du réseau sur cette précision, et tient compte en théorie, de tous les éléments perturbateurs du réseau d'antenne (réflexion, diffraction, couplage, etc...).

Le logiciel de simulation électromagnétique nous permet de calculer les vecteurs  $\mathbf{d}$  du système antennaire et ainsi de calculer le terme au dénominateur.

L'objectif est de déterminer la borne de Cramer-Rao des directions d'arrivée adaptée à chaque configuration de système antennaire en tenant compte de différents éléments perturbateurs tels que le couplage entre antennes et le couplage avec la structure porteuse.

## 2. Calcul du vecteur direction par simulation électromagnétique

Le logiciel de simulation électromagnétique utilisé pour calculer le vecteur direction est le logiciel FEKO [5] de EMSS (Electromagnetic software and systems). Comme beaucoup de logiciel de simulation électromagnétique, FEKO permet de simuler des systèmes antennaires complexes modélisables en trois dimensions en réalisant un maillage de structure.

A l'aide de FEKO et en utilisant la méthode des moments (MOM), nous pouvons décrire la structure antennaire de goniométrie complète ainsi que les différents éléments perturbateurs à proximité du réseau d'antenne. Nous plaçons alors des sources ponctuelles de signaux tout autour du réseau d'antenne pour les différentes fréquences considérées par le réseau de goniométrie et dans la polarisation souhaitée. Les figures (1) et (2) montrent des exemples de sources disposées avec un pas de  $1^\circ$  autour d'un réseau de dipôles.

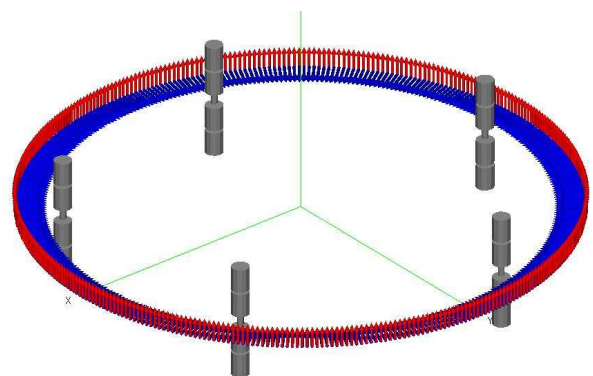


Fig. 1 : Exemple de réseau d'antennes omnidirectionnelles excité par des sources ponctuelles en champ lointain espacées de  $1^\circ$

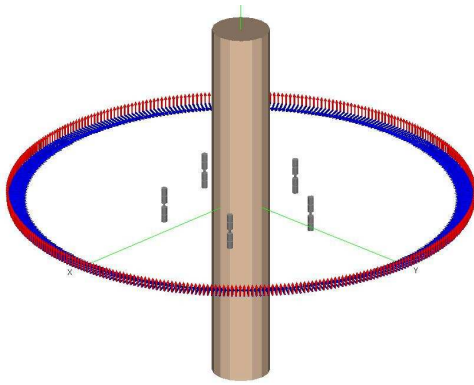


Fig. 2 : Exemple de réseau d'antennes omnidirectionnelles excité par des sources ponctuelles en champ lointain espacées de  $1^\circ$  en présence d'un élément perturbateur

Ainsi, par simulation on obtient pour toutes les directions  $\theta$  les courants en module et phase sur chaque antenne du réseau de goniométrie. Des valeurs des courants, on déduit la réponse du réseau d'antenne à un signal dans une direction donnée, donc les vecteurs directions  $\mathbf{d}$  pour une direction d'arrivée  $\theta$ .

Les réponses d'antennes tiennent compte de la géométrie du réseau, des diagrammes de rayonnement des antennes et de tous les éléments pouvant perturber le réseau : couplage, réflexions, diffractions, résonances etc...

Ainsi, la BCR réaliste, c'est à dire tenant compte de l'environnement du réseau, peut-être calculée.

### 3. Application à la goniométrie large bande

Dans le cas de la goniométrie large bande, on est souvent amené à se demander quels types d'antennes utiliser de manière à couvrir la bande de fréquence voulue en ayant la meilleure précision possible sur l'estimation de la direction d'arrivée du signal. Cette recherche doit tenir compte de l'environnement de l'antenne en vue d'être le plus réaliste possible.

#### 3.1 Calcul de la BCR en présence d'éléments perturbateurs

Le premier exemple traité permet de comparer le calcul des bornes de Cramer-Rao à l'aide des résultats issus du logiciel FEKO dans le cas d'un réseau d'antennes omnidirectionnelles seul, et dans le cas où ce réseau d'antenne est installé sur une structure porteuse de type véhicule de transport, figure (3).

La borne de Cramer Rao est calculée à partir des résultats de simulation issus de FEKO sur la bande de fréquences [20-500]MHz. Nous avons représenté sur les figure (4) et (5) des diagrammes donnant la BCR sur l'estimation de l'angle en fonction de la fréquence et du rapport signal sur bruit [0-40]dB pour un échantillon, respectivement sans porteur et avec porteur.

On s'aperçoit que la prise en compte de la structure porteuse modifie notablement la valeur de la précision. On peut remarquer notamment des phénomènes de résonances aux fréquences basses (20MHz et 40MHz), dus à la présence du véhicule. Il est donc important de prendre en compte le véhicule dans l'estimation de la BCR pour obtenir un résultat proche de la réalité.

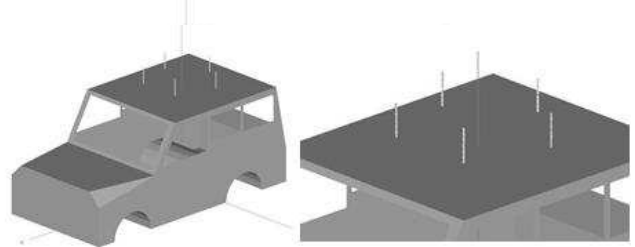


Fig. 3 : Exemple de réseau d'antennes circulaire sur le toit d'un véhicule.

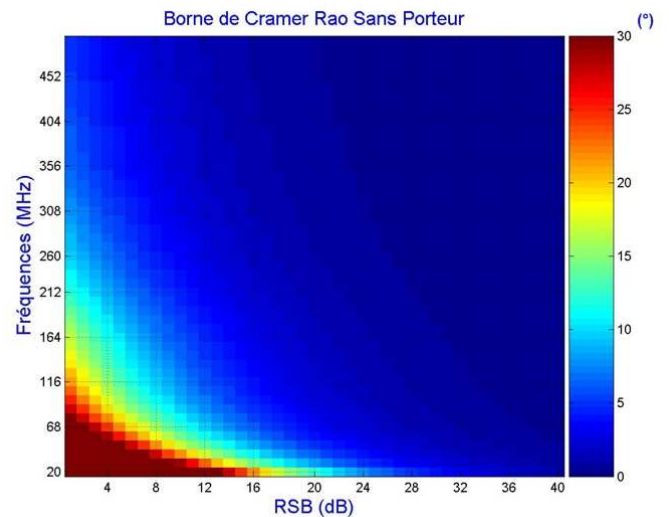


Fig. 4 : BCR ( $^\circ$ ) sur l'angle d'arrivée de signaux en fonction du RSB (dB) et de la fréquence (MHz) dans le cas

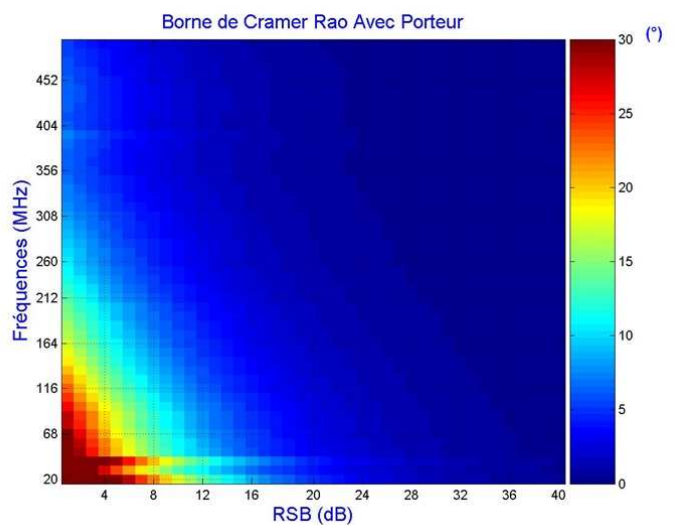


Fig. 5 : BCR ( $^\circ$ ) sur l'angle d'arrivée de signaux en fonction du RSB (dB) et de la fréquence (MHz) dans le cas d'un réseau avec porteur.

### 3.2 Calcul de la BCR en fonction du type d'antenne

Dans un deuxième exemple, on compare le calcul des BCR à l'aide des résultats issus du logiciel FEKO dans le cas :

- d'un réseau d'antennes omnidirectionnels
- d'un réseau d'antennes directives (directivité moyenne de 5dB sur la bande de fréquence)

Les deux réseaux placés en espace libre ont un diamètre équivalent et fonctionnent sur la bande [20 – 500]MHz. Le logiciel FEKO tient compte de l'environnement et des phénomènes de couplage entre les différents éléments rayonnants.

Les figures (6) et (7) donnent des diagrammes donnant la BCR sur l'estimation de l'angle en fonction de la fréquence et du rapport signal sur bruit [0-40]dB pour un échantillon, respectivement pour un réseau d'antennes omnidirectionnelles et un réseau d'antennes directives.

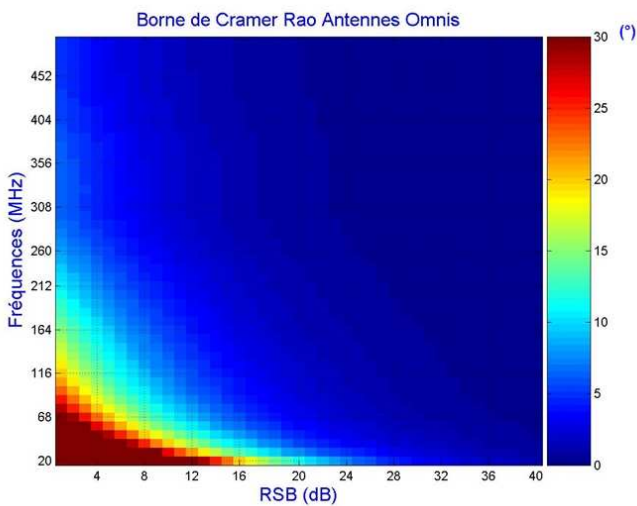


Fig. 6 : BCR ( $^{\circ}$ ) sur l'angle d'arrivée de signaux en fonction du RSB (dB) et de la fréquence (MHz) dans le cas d'un réseau d'antennes omnidirectionnelles

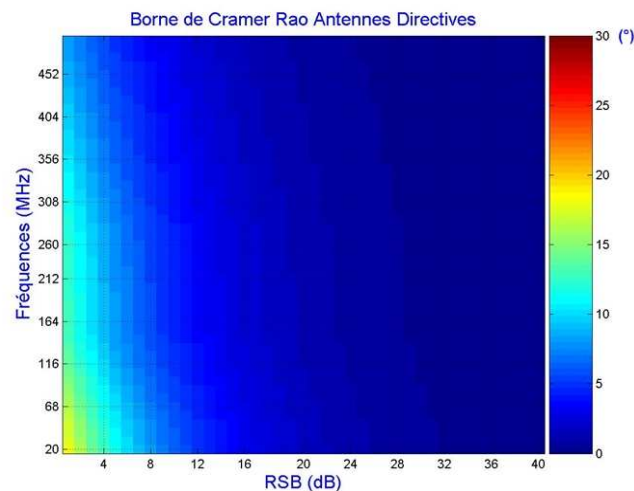


Fig. 7 : BCR ( $^{\circ}$ ) sur l'angle d'arrivée de signaux en fonction du RSB (dB) et de la fréquence (MHz) dans le cas d'un réseau d'antennes Directives

On s'aperçoit que le réseau d'antennes directives permet d'atteindre une variance d'erreur de goniométrie plus petite que le réseau d'antennes omnidirectionnelles, en particulier dans des conditions peu favorables, c'est à dire lorsque le RSB est faible et/ou lorsque le diamètre du réseau est petit devant la longueur d'onde.

## 4. Conclusion

L'intérêt d'utiliser un logiciel de simulation électromagnétique dans le calcul de la borne de Cramer-Rao est donc primordial puisqu'il permet de prendre en compte des phénomènes radioélectriques complexes dépendant de l'environnement du réseau d'antenne qui sont habituellement difficiles à modéliser.

Par l'obtention d'une borne de Cramer Rao des directions d'arrivée plus réaliste, cette approche permet d'optimiser la structure et la configuration du réseau d'antennes de goniométrie (géométrie et choix de l'élément rayonnant) pour une application donnée, un environnement donné et une bande de fréquence donnée, notamment dans le cadre industriel.

## Références

- [1] L. KOPP, D. THUBERT, « *Borne de Cramer Rao en traitement d'antenne, Partie 1 & 2* » Traitement du signal, Volume 3, n°3 1986
- [2] L. KOPP, *Performances ultimes en résolution spatiale : Les méthodes à haute résolution, traitement d'antenne et analyse spectrale*, sous la direction de Sylvie Marcos ed. HERMES, 1998
- [3] P.STOICA AND A.NEHORAI, *MUSIC, MAXIMUM LIKELIHOOD AND THE CRAMER RAO BOUND*. IEEE TRANS ON ASSP, VOL 37, PP 720-741, MAI 1989
- [4] W. P. BALLANCE, A. G. JAFFER, *The explicit analytic Cramer-Rao Bound on angle estimation*, Hughes Aircraft Company, Fullerton CA 92634, 1998 MAPLE PRESS
- [5] FEKO, *FEKO User's Manual* EM Software & Systems SA, July 2005