

Séparation aveugle de sources non stationnaires par diagonalisation conjointe de matrices temps-échelle

El Mostafa FADAILI, Vincent VIGNERON
 I.B.I.S.C, CNRS FRE 2873, 40 rue du Pelvoux
 91020 Evry-Courcouronnes, France
 fadaili@iup.univ-evry.fr, vigneron@iup.univ-evry.fr

Résumé – Nous proposons une nouvelle approche pour résoudre le problème de la séparation de sources en mélange instantané. L'idée est d'exploiter la "diversité" temps-échelle spatiale des sources afin de construire un ensemble de matrices à partir de la transformée en ondelettes des signaux observés. Ces matrices sont ensuite diagonalisées conjointement sans contrainte d'unitarité afin d'estimer la matrice de séparation.

Abstract – This communication concerns the problem of blind sources separation of non stationary sources in the instantaneous mixture case. We consider an approach based on joint-diagonalization of some Hermitian matrices constructed by a family of spatial complex cross-wavelet transform. We show that mixing matrix can be estimated using some algebraic properties of considered matrices.

1 Introduction

Nous nous intéressons dans cette communication au problème de la séparation aveugle de sources (SAS) basée sur la diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices. Plusieurs méthodes basées sur ce type de décomposition ont été proposées dans la littérature, mais elles peuvent différer notamment par la nature de l'ensemble des matrices considérées. On peut citer par exemple l'algorithme JADE [3] qui opère sur des matrices de cumulants d'ordre 4, SOBI [2] sur des matrices de covariance, etc. Plus récemment, des méthodes basées sur la diagonalisation conjointe de matrices issues de représentations temps-fréquence spatiales quadratiques ont vu le jour [1][4][5][6][7]. Ce type d'approche a l'avantage de considérer une plus large classe de signaux sources que la classe classique de sources aléatoires et indépendantes. Il est important de noter que toutes ces méthodes nécessitent une étape de présélection automatique de points ($t-f$) dans le plan temps-fréquences qui correspondent uniquement à des auto-termes.

Nous proposons dans cette communication un nouveau type de matrices à symétrie hermitienne à diagonaliser conjointement. L'approche n'est pas basée sur des représentations temps-fréquence, mais sur des représentations temps-échelle spatiales (appelées également transformées en ondelettes dans la communauté du traitement de signal) qui ont émergées récemment en tant qu'outil mathématique pour l'analyse et le traitement de signaux [8][10][11].

Après l'introduction de la transformée en ondelettes spatiale (TOS), nous montrons que la matrice de mélange peut être estimée en exploitant certaines propriétés algébriques des matrices issues de transformées en ondelettes croisées. Nous discutons des critères automatiques de sélection de points dans le plan temps-échelle permettant d'"isoler" des points ne correspondant qu'aux auto-termes.

Enfin, au moyen de simulations informatiques, nous montrons l'apport de cet approche en terme de performances de la séparation par rapport à d'autres méthodes basées sur la diagonalisation conjointe.

2 Modèle & hypothèses

Nous considérons le modèle classique de mélange instantané décrit par l'équation suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (1)$$

où \mathbf{A} est la matrice de mélange (M, N) réelle et de rang plein, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_M(t)]^T$ le vecteur ($M, 1$) des signaux observés ($(\cdot)^T$ désigne l'opérateur de transposition) et $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_N(t)]^T$ le vecteur ($N, 1$) des signaux sources supposés déterministes et $\mathbf{b}(t)$ est un bruit additif.

Dans toute la suite, on se placera dans le cas de signaux sources réels et une matrice de mélange réelle.

Nous considérons les hypothèses suivantes :

- La matrice de mélange instantané \mathbf{A} est inconnue mais de rang plein.
- Le nombre de sources N est connu.
- Les composantes $b_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ sont blanches, stationnaires et indépendantes des sources.
- Les sources $s_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ sont des signaux dont les représentations temps-échelle sont suffisamment "distinctes".

Cette dernière hypothèse signifie qu'il existe des points dans le plan temps-échelle ne correspondant qu'à une seule et unique source.

L'objectif est d'estimer une "inverse" de la matrice de mélange afin de retrouver les contributions des différentes sources. En général, celles-ci ne sont restituées qu'à une amplitude et une permutation près. C'est pourquoi, on considère généralement que la matrice de mélange \mathbf{A} a été estimée quand la matrice obtenue, notée \mathbf{A}_e , se factorise

sous la forme $\mathbf{A}_e = \mathbf{ADP}$ avec \mathbf{D} matrice diagonale inversible et \mathbf{P} matrice de permutation.

En ce qui concerne finalement la séparation de sources à proprement parler, quand $M \geq N$, *i.e.* dans le cas sur-déterminé, une estimée des sources s'obtient au moyen de $\mathbf{A}^\# \mathbf{x}(t)$ ($\mathbf{A}^\#$ désignant la pseudo-inverse de la matrice \mathbf{A}). Quand $M < N$, *i.e.* dans le cas sous-déterminé, il n'y a plus une solution unique et la séparation effective des sources nécessite des hypothèses et des développements supplémentaires.

3 La transformée en ondelettes spatiale des observations

Une famille d'ondelettes est définie par un paramètre d'échelle a et de temps b par l'équation suivante :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (2)$$

où $\psi(t)$ est une fonction complexe appelée *ondelette mère*. La transformée en ondelettes d'un signal $s(t)$ est définie par :

$$W_s(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a,b}(t) s^*(t) dt, \quad (3)$$

avec $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$ et $*$ désigne l'opérateur de conjugaison. Pour deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$, pour une même ondelette mère $\psi(t)$, la transformée en ondelettes croisée entre $s_1(t)$ et $s_2(t)$ est définie par :

$$W_{s_1 s_2}(a, b) = W_{s_1}(a, b) \cdot W_{s_2}^*(a, b). \quad (4)$$

A partir de l'expression (4), on peut définir la transformée en ondelettes spatiale du vecteur $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_N(t)]$ par :

$$\{\mathbf{W}_s(a, b)\}_{i,j} = W_{s_i s_j}(a, b). \quad (5)$$

D'après le modèle (1), $\forall (i, j) \in \{1, \dots, M\}$:

$$\begin{aligned} W_{x_i x_j}(a, b) &= W_{x_i}(a, b) \cdot W_{x_j}^*(a, b) \\ &= \sum_{l,m=1}^N a_{il} a_{jm} W_{s_l s_m}(a, b) + W_{b_i b_j}(a, b) \\ &+ \sum_{l=1}^N a_{il} W_{s_l b_j}(a, b) + \sum_{l=1}^N a_{jl} W_{b_i s_l}(a, b) \end{aligned} \quad (6)$$

alors, $\mathbf{W}_x(a, b)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_x(a, b) &= \mathbf{A} \mathbf{W}_s(a, b) \mathbf{A}^T + \mathbf{W}_b(a, b) \\ &+ \mathbf{A} \mathbf{W}_{sb}(a, b) + \mathbf{W}_{bs}(a, b) \mathbf{A}^T, \end{aligned} \quad (7)$$

où $\mathbf{W}_s(a, b)$ et $\mathbf{W}_b(a, b)$ sont, respectivement, les TOS des sources et du bruit et où $\mathbf{W}_{sb}(a, b)$ et $\mathbf{W}_{bs}(a, b)$ sont les TOS croisées entre sources et bruit.

Dans le cas non-bruité, l'équation (8) se réduit à :

$$\mathbf{W}_x(a, b) = \mathbf{A} \mathbf{W}_s(a, b) \mathbf{A}^T, \quad (8)$$

Dans le cas contraire, on fixe un seuil ϵ_1 et on considère uniquement les points (a, b) pour lesquels $\|\mathbf{W}_x(a, b)\| > \epsilon_1$ pour revenir au modèle (8).

L'ondelette mère $\psi(t)$ étant complexe, la matrice $\mathbf{W}_s(a, b)$ est à symétrie hermitienne. Si pour certains points temps-échelle (a, b) elle est diagonale, alors la matrice \mathbf{A} peut être estimée par diagonalisation conjointe de l'ensemble $\mathcal{M} = \{\mathbf{W}_x(a, b), (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$.

4 Diagonalisation conjointe non unitaire

On considère l'ensemble \mathcal{D} de K matrices \mathbf{M}_i , $i \in \{1, \dots, K\}$ qui se décomposent sous la forme :

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{A} \mathbf{D}_i \mathbf{A}^T, \quad \forall i \in \{1, \dots, K\},$$

où \mathbf{D}_i , $i \in \{1, \dots, K\}$ sont des matrices diagonales. L'objectif est d'estimer \mathbf{A} et l'ensemble des matrices \mathbf{D}_i , $i \in \{1, \dots, K\}$.

Quand \mathbf{A} est unitaire, une solution a été proposée dans [1]. Dans le cas non unitaire, on propose de minimiser le critère quadratique :

$$\mathcal{C}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^K \|\text{OffDiag}\{\mathbf{B}^T \mathbf{M}_i \mathbf{B}\}\|^2, \quad (9)$$

où l'opérateur $\text{OffDiag}\{\cdot\}$ renvoie une matrice à diagonale nulle construite à partir des éléments hors-diagonal de son argument.

Dans [4][5], nous avons proposé un algorithme pour l'optimisation de $\mathcal{C}(\mathbf{B})$ sans contrainte d'unitarité.

5 Sélection automatique des points temps-échelle

Afin de construire l'ensemble $\mathcal{M} = \{\mathbf{W}_x(a, b), (a, b)\}$ des matrices à diagonaliser conjointement, il est nécessaire de sélectionner les points (a, b) "utiles" dans le plan temps-échelle pour lesquels les matrices $\mathbf{W}_s(a, b)$ sont diagonales [7].

Les différentes structures algébriques de la matrice $\mathbf{W}_s(a, b)$ sont :

- $\mathbf{W}_s(a, b)$ est nulle, alors $\|\mathbf{W}_x(a, b)\| = 0$ et le point (a, b) n'est pas retenu.
- $\mathbf{W}_s(a, b)$ n'a aucune structure particulière : $\mathbf{W}_x(a, b)$ n'est pas intéressante pour l'ensemble \mathcal{M} .
- $\mathbf{W}_s(a, b)$ est diagonale : $\mathbf{W}_x(a, b)$ est retenue dans l'ensemble \mathcal{M} .

Dans le dernier cas, puisque $\mathbf{W}_s(a, b)$ est à symétrie hermitienne et \mathbf{A} est réelle, $\mathbf{W}_x(a, b)$ est également à valeurs réelles. Cette propriété peut être exploitée pour sélectionner les points (a, b) dans le plan temps-échelle pour lesquels $\mathbf{W}_s(a, b)$ est diagonale :

$$\|\mathbf{W}_x(a, b)\| > \epsilon_1 \quad (10)$$

$$\|\Im\{\mathbf{W}_x(a, b)\}\| < \epsilon_2 \quad (11)$$

où $\Im\{\cdot\}$ et $\|\cdot\|$ sont respectivement la partie imaginaire et la norme euclidienne, ϵ_1 et ϵ_2 sont des seuils positifs.

D'autres approches pour la sélection automatique des points avec blanchiment spatial des observations peuvent être consulter dans [1][5][6].

Il est à noter que dans le cas où la matrice $\mathbf{W}_s(a, b)$ est diagonale, alors elle est de rang un. En effet, si on suppose que la matrice $\mathbf{W}_s(a, b)$ est de rang au moins égal à deux, alors $\exists (i, j), i \neq j$ tel que : $W_{s_i s_i}(a, b) \neq 0$ et $W_{s_j s_j}(a, b) \neq 0$, d'où $W_{s_i s_j}(a, b) \neq 0$ d'après (4). Donc la

matrice $\mathbf{W}_s(a, b)$ n'est pas diagonale ce qui contredit l'hypothèse de départ. Cette propriété sur le rang peut être exploitée en complément au critère (11) ou lorsque l'ondelette mère est à valeurs réelles, en cherchant les matrices $\mathbf{W}_x(a, b)$ ¹ de rang 1. Le critère suivant traduit donc cette dernière propriété :

$$\left| \frac{\lambda_{\max}\{\mathbf{W}_x(a, b)\}}{\text{Trace}\{\mathbf{W}_x(a, b)\}} - 1 \right| < \epsilon_3. \quad (12)$$

où $\lambda_{\max}\{\mathbf{W}_x(a, b)\}$ désigne la plus grande valeur propre de la matrice $\mathbf{W}_x(a, b)$.

6 Simulations

Dans cette partie, nous illustrons au moyen de simulations informatiques l'apport de la méthode proposée au niveau des performances de la séparation comparative à d'autres approches basées sur la diagonalisation conjointe.

Nous considérons $N = 3$ sources de $T = 2048$ échantillons reçues sur $M = 3$ capteurs. La source s_1 est un "chirp linéaire" : $s_1(t) = \sin(250\pi t^2)$, $t \in [0, 1]$. La source s_2 est un "chirp quadratique" : $s_2(t) = \sin(150\pi t^3)$. Enfin, la source s_3 est une "fréquence pure" : $s_3(t) = \sin(350\pi t)$. L'ondelette mère considérée est l'ondelette de Morlet complexe : $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi f_b}} e^{2i\pi f_c t} e^{-\frac{t^2}{f_b}}$ (ici $f_b = f_c = 1$), quant aux valeurs de a et b , elles sont respectivement dans $[1, \dots, 32]$ et $[1, \dots, T]$. Les performances de la séparation sont quantifiées par l'indice suivant [9] :

$$I(\mathbf{S}) = \frac{1}{N(N-1)} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{|(\mathbf{S})_{i,j}|^2}{\max_{\ell} |(\mathbf{S})_{i,\ell}|^2} - 1 \right) + \frac{1}{N(N-1)} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{|(\mathbf{S})_{i,j}|^2}{\max_{\ell} |(\mathbf{S})_{\ell,j}|^2} - 1 \right) \quad (13)$$

Au niveau de la figure 1 sont affichées les sources avant

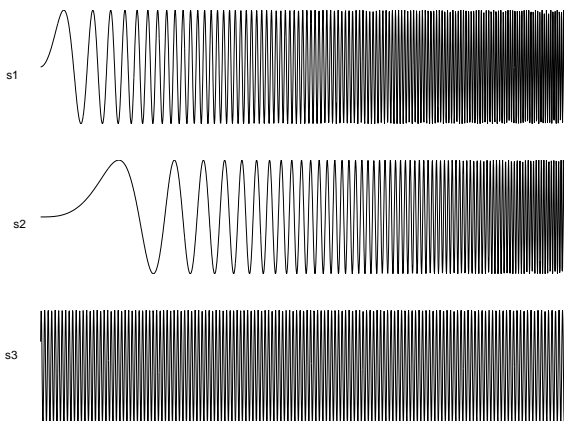


FIG. 1 – Les trois signaux sources en fonction du temps avant mélange.

mélange, sur la figure 2 après mélange. La figure 3 montre la transformée en ondelettes des observations et sur la

¹Le rang d'une matrice est invariant par chargement de base.

figure 4 les points sélectionnés sur le plan temps-échelle pour la diagonalisation conjointe avec les critères (10)-(11) où $\epsilon_1 = 5.22$ et $\epsilon_2 = 10^{-2}$, le rapport signal à bruit est de $30dB$. La figure 5 illustre le résultat de la séparation, où les transformées en ondelettes des sources sont reconstruites. La figure 6 illustre les performances en dB de la méthode proposée (WBSS) comparée à l'approche TFBSS basée sur la diagonalisation conjointe de matrices issues de représentations temps-fréquence spatiales [6] où le rapport signal à bruit varie de $10dB$ à $100dB$.

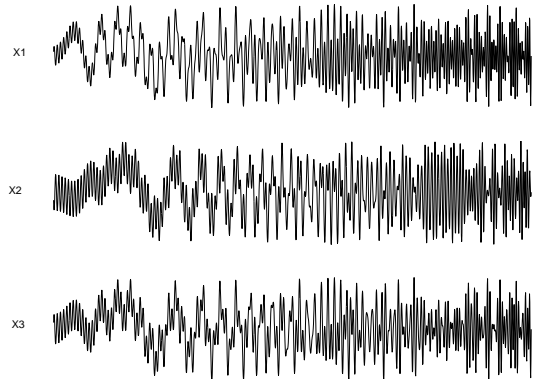


FIG. 2 – Les trois signaux sources en fonction du temps après mélange.

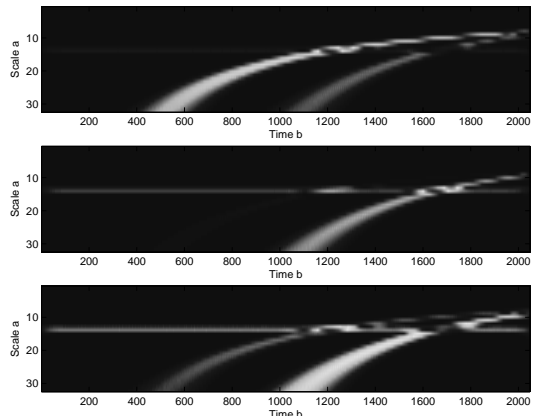


FIG. 3 – Le module de la transformée en ondelettes de Morlet des observations.

7 Conclusion

Nous avons montré dans cette communication que la séparation de sources déterministes et non stationnaires peut être réalisée dans le cas où les sources possèdent des représentations distinctes dans le plan temps-échelle. L'approche proposée est basée sur la diagonalisation conjointe d'un nouveau type de matrices construites à partir de transformées en ondelettes spatiales mais aussi sur un critère de sélection automatique de points (a, b) .

Par le biais de simulations informatiques, nous avons illustré les performances de la méthode sur des signaux synthétiques bien localisés dans le plan temps-échelle, per-

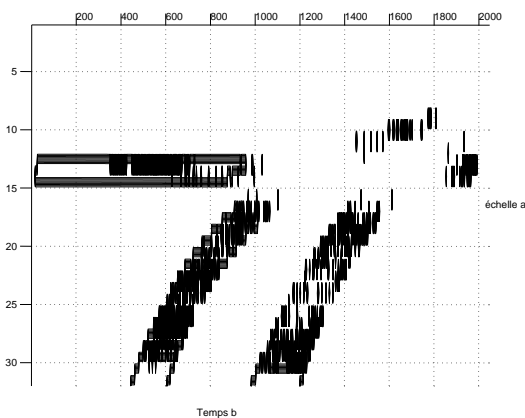


FIG. 4 – Les points sélectionnés sur le plan temps-échelle pour la diagonalisation conjointe.

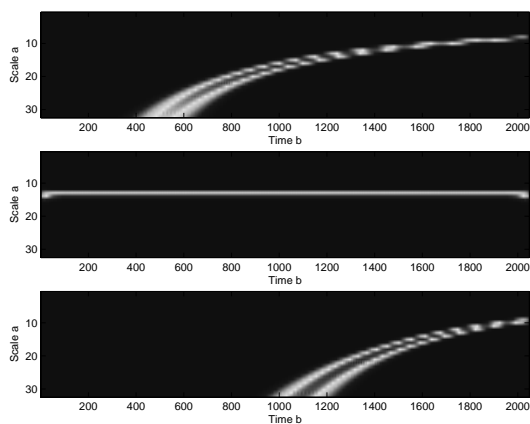


FIG. 5 – Module de la transformée en ondelettes de Morlet des sources estimées.

mettant ainsi une sélection optimale des points (a, b) ne correspondant pas aux “interférences”.

Dans de futurs travaux, nous mettrons en évidence la capacité de la méthode à extraire des sources réelles ayant une structure plus dans la mesure où la sélection automatique des points (a, b) serait plus “délicate”.

La généralisation de la méthode proposée à un modèle de mélange convolutif pourrait également être traitée.

Références

- [1] A. Belouchrani, M. G. Amin, “Blind source separation based on time-frequency signal representations,” *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 46, No. 11, pp. 2888-2897, Nov. 1998.
- [2] A. Belouchrani, K. Abaid-Meraim, J.-F. Cardoso and E. Moulines, “A blind sources separation using second order statistics,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 45, pp. 434-444, February 1997.
- [3] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, “Blind Beamforming for non Gaussian Signals”, *IEEE Proceedings-F*, Vol. 40, pp. 362-370, 1993.

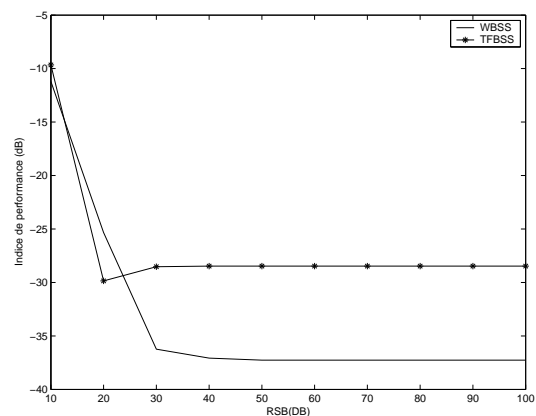


FIG. 6 – l’indice de performance de la méthode proposée (WBSS) et de TFBSS en fonction du rapport signal à bruit.

- [4] E.M. Fadaili, N. Thirion-Moreau, E. Moreau, “Combined Non-Orthogonal Joint Zero-diagonalization and Joint Diagonalization for Sources Separation”, *In Proc. IEEE Workshop on Statistical Signal Processing*, Bordeaux, France, July 2005.
- [5] E.M. Fadaili, N. Thirion-Moreau, E. Moreau, “Non orthogonal joint diagonalization /zero diagonalization for sources separation based on time-frequency distributions”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 55, No. 4, April 2007.
- [6] C. Févotte and C. Doncarli, “Two contributions to blind source separation using time-frequency distributions”, *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 11, No. 3, pp. 386-389, March 2004.
- [7] L. Giulieri, N. Thirion-Moreau and P.-Y. Arquès, “Blind sources separation based on quadratic time-frequency representations : a method without pre-whitening”, *In Proc. ICASSP’2003*, Honk-Kong, pp. 289-292, April 2003.
- [8] S. Mallat, “A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7), 1989, p. 674-693.
- [9] E. Moreau, “A generalization of joint-diagonalization criteria for source separation”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 49, N° 3, pp. 530-541, March 2001.
- [10] M.B. Ruskai et al. “Wavelets and their applications”, *Jones and Bartlett Publ*, Boston ,1992.
- [11] Y. Sheng, “Wavelet Transform”, *The transforms and applications handbook*, Ed. by A. D. Poularikas, pp. 747-827, The Electrical Engineering Handbook Series, 1996.