

# Séparation aveugle de sources Markoviennes et non-stationnaires

Rima GUIDARA, Shahram HOSSEINI, Yannick DEVILLE

Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse-Tarbes, UMR 5572

Université Paul Sabatier Toulouse 3, CNRS

14 Av. Edouard Belin, 31400 Toulouse, France

rguidara@ast.obs-mip.fr, shosseini@ast.obs-mip.fr, ydeville@ast.obs-mip.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous proposons une extension, au cas non-stationnaire, d'une méthode de séparation aveugle de sources stationnaires et autocorrélées que nous avons développée précédemment. La méthode présentée se base sur une approche de maximum de vraisemblance et permet de simplifier les fonctions de densité de probabilité conditionnelles (pdfs) des sources en les modélisant par des processus de Markov. Pour tenir compte de la non-stationnarité des sources, deux méthodes, basées respectivement sur un découpage par blocs et une approche à noyau, sont utilisées pour estimer les fonctions score des sources. Les tests de séparation réalisés sur des signaux temporels et des images prouvent les très bonnes performances de nos méthodes.

**Abstract** – In this paper, we propose to extend to the non-stationary case a blind source separation method that we developed recently for separating autocorrelated stationary sources. The proposed method is based on a maximum likelihood approach and uses Markov models to simplify the conditional probability density functions (pdfs) of the sources. To handle source non-stationarity, we adapted two methods, respectively based on blocking and kernel smoothing. Experimental results using both temporal and bidimensional sources clearly proved the high performance of our methods.

## 1 Introduction

Les méthodes de séparation aveugle de sources appliquées à des mélanges linéaires instantanés sont des approches permettant la restitution d'un ensemble de  $K$  signaux sources à partir d'un ensemble d'observations, supposées être dans ce cas des combinaisons linéaires de ces sources. La forme la plus simple de ce problème peut être définie de la manière suivante : on suppose disposer de  $N$  échantillons de  $K$  signaux observés, qui sont des mélanges linéaires instantanés de  $K$  signaux sources inconnus. Le modèle qui en résulte en absence de bruit est défini par :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t), \quad t = 1, \dots, N \quad (1)$$

où  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_K(t)]^T$  et  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_K(t)]^T$  sont respectivement les vecteurs d'observations et de sources et  $\mathbf{A}$  une matrice de mélange inconnue de taille  $K \times K$ . Notre objectif est ainsi de trouver une estimation de la matrice de mélange  $\mathbf{A}$  à une permutation et à une matrice diagonale près. Plusieurs solutions à ce problème ont été présentées dans la littérature en exploitant la non-Gaussianité, l'autocorrélation ou la non-stationnarité des sources [1].

Dans un article précédent [2], nous avons proposé une méthode de séparation de sources basée sur une approche de maximum de vraisemblance, qui utilise un modèle de Markov pour simplifier les fonctions de densité de probabilité (pdf) conditionnelles des sources, qu'on a supposées mutuellement indépendantes, autocorrélées et *stationnaires*. Cette méthode présente l'avantage de prendre en compte l'autocorrélation temporelle des signaux de manière optimale et fournit un estimateur asymptotiquement efficace

des sources quelles que soient leurs pdfs.

Dans [3], une extension de cette approche aux signaux bidimensionnels a été développée, donnant lieu à deux modifications majeures de l'algorithme initial pour réduire la complexité calculatoire. Dans cet article, nous proposons une extension de notre approche unidimensionnelle aux signaux *non-stationnaires* en tolérant la variation au cours du temps des pdfs des sources. Ceci permet d'exploiter simultanément la non-Gaussianité, l'autocorrélation et la non-stationnarité des sources de façon quasi-optimale, ce qui augmente considérablement les performances de l'algorithme.

On note que la non-stationnarité des sources a été déjà exploitée dans plusieurs méthodes de séparation de sources [4–10]. Toutefois, la plupart de ces méthodes exploitent uniquement la non-stationnarité des sources à l'ordre 2, contrairement à notre approche qui peut également utiliser la non-stationnarité des sources à des ordres supérieurs.

## 2 Séparation aveugle de sources Markoviennes

Considérant le modèle de mélange linéaire instantané  $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}$ , on cherche une matrice de séparation  $\mathbf{B}$ , estimée de  $\mathbf{A}^{-1}$  à une permutation et à une matrice diagonale près. Ceci peut être obtenu, par une approche de maximum de vraisemblance, en maximisant, par rapport à la matrice de séparation  $\mathbf{B}$ , la pdf conjointe de tous les échantillons de toutes les observations

$$f_{\mathbf{x}}(x_1(1), \dots, x_K(1), \dots, x_1(N), \dots, x_K(N)) \quad (2)$$

Sous l'hypothèse d'indépendance des sources, cette pdf s'écrit :

$$\left( \frac{1}{|\det(\mathbf{B}^{-1})|} \right)^N \prod_{i=1}^K f_{s_i(t)}(\mathbf{e}_i^T \mathbf{B}\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{e}_i^T \mathbf{B}\mathbf{x}(N)) \quad (3)$$

où  $\mathbf{e}_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice identité. Supposant que les sources sont des processus de Markov d'ordre  $q$ , leurs pdfs conditionnelles s'écrivent :

$$f_{s_i(t)}(s_i(t)|s_i(t-1), \dots, s_i(1)) = f_{s_i(t)}(s_i(t)|s_i(t-1), \dots, s_i(t-q)) \quad (4)$$

On peut ainsi réécrire (3), en utilisant la formule de Bayes et (4), sous la forme :

$$\left( \frac{1}{|\det(\mathbf{B}^{-1})|} \right)^N \prod_{i=1}^K \left[ f_{s_i(t)}(\mathbf{e}_i^T \mathbf{B}\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{e}_i^T \mathbf{B}\mathbf{x}(q)) \prod_{t=q+1}^N f_{s_i(t)}(\mathbf{e}_i^T \mathbf{B}\mathbf{x}(t)|\mathbf{e}_i^T \mathbf{B}\mathbf{x}(t-1), \dots, \mathbf{e}_i^T \mathbf{B}\mathbf{x}(t-q)) \right] \quad (5)$$

En négligeant les pdfs des  $q$  premiers échantillons et en divisant le logarithme de (5) par  $N$ , on obtient après simplification la fonction à maximiser :

$$C = \log(|\det(\mathbf{B})|) + E_{N-q} \left[ \sum_{i=1}^K \log f_{s_i(t)}(\mathbf{e}_i^T \mathbf{B}\mathbf{x}(t)|\mathbf{e}_i^T \mathbf{B}\mathbf{x}(t-1), \dots, \mathbf{e}_i^T \mathbf{B}\mathbf{x}(t-q)) \right] \quad (6)$$

où  $E_{N-q}[\cdot] = \frac{1}{N} \sum_{t=q+1}^N [\cdot]$ .

On définit la fonction score conditionnelle d'une source  $s_i$ , à un instant  $t$  et par rapport à un échantillon  $s_i(t-l)$ , par :

$$\begin{aligned} \psi_{s_i(t)}^l &= \psi_{s_i(t)}^l(s_i(t)|s_i(t-1), \dots, s_i(t-q)) \\ &= \frac{-\partial \log f_{s_i(t)}(s_i(t)|s_i(t-1), \dots, s_i(t-q))}{\partial s_i(t-l)}, \\ &\quad \forall \quad 0 \leq l \leq q \end{aligned}$$

la résolution de l'équation  $\frac{\partial C}{\partial \mathbf{B}} = 0$  aboutit après simplification au système des  $K(K-1)$  équations suivantes :

$$E_{N-q} \left[ \sum_{l=0}^q \psi_{s_i(t)}^l(s_i(t)|s_i(t-1), \dots, s_i(t-q)) s_j(t-l) \right] = 0 \quad i \neq j = 1, \dots, K \quad (7)$$

Ce système peut être résolu, par exemple, en utilisant une version modifiée et équivariante de l'algorithme de Newton-Raphson, dont une version bidimensionnelle et adaptée aux sources stationnaires a été présentée dans [3]. Par ailleurs, la résolution du système (7) nécessite l'estimation des fonctions score conditionnelles  $\psi_{s_i(t)}^l$  des sources  $s_i$ . Cependant, ces sources réelles étant inconnues, leurs pdfs ne peuvent être estimées qu'en remplaçant les vraies sources  $\mathbf{s}$  par les sources reconstruites  $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{B}\mathbf{x}$ .

Dans [2], nous avons supposé que les sources sont stationnaires, c'est-à-dire telles que  $\psi_{\hat{s}_i(t)}^l = \psi_{\hat{s}_i}^l$ . Cette hypothèse est pour autant non vérifiée par la majorité des signaux réels. Ainsi, nous proposons dans cet article de modifier cette estimation de manière à ce que les fonctions score  $\psi_{\hat{s}_i(t)}^l$  puissent varier au cours du temps. Nous présentons dans ce qui suit deux méthodes d'estimation des fonctions score permettant de tenir compte de la non-stationnarité des sources.

### 3 Estimation non-stationnaire des fonctions score

Pour modéliser la non-stationnarité des fonctions score, nous avons adapté aux sources autocorrélées deux méthodes proposées dans [10], initialement utilisées pour tenir compte de la non-stationnarité des sources *non-autocorrélées*.

#### 3.1 Méthode par blocs

Dans cette approche, on découpe l'intervalle  $[0, T]$  en  $L$  blocs  $T_j$ ,  $j = 1, \dots, L$ . Sous l'hypothèse d'une variation lente de la fonction score conditionnelle dans l'intervalle  $[0, T]$ , cette dernière peut être considérée comme étant constante sur chacun des blocs  $T_j$ , et notée par conséquent  $\psi_{\hat{s}_i(t)}^l = \psi_{\hat{s}_i}^l(j)$ ,  $\forall t \in T_j$ . Dans chaque sous-intervalle, les fonctions score conditionnelles peuvent ainsi être estimées en utilisant l'estimateur non-paramétrique présenté dans [2]. Cependant, dans le souci de réduire le coût calculatoire de l'algorithme, nous utilisons un estimateur paramétrique basé sur des polynômes d'ordre 3. Une version bidimensionnelle de cet estimateur a été utilisée dans [3] pour des sources stationnaires.

#### 3.2 Méthode à noyau

Le modèle paramétrique des fonctions score utilisé précédemment nécessite l'estimation de quelques espérances mathématiques décrites par la forme générique  $E[\phi(x_i(t), x_i(t-1), \dots, x_i(t-q))]$ , où  $\phi(\cdot)$  représente une fonction non linéaire [3, 10]. Dans une approche par blocs, ces espérances sont remplacées par une moyenne temporelle sur chaque sous-intervalle  $T_j$ .

Dans une méthode à noyau, ces mêmes espérances sont remplacées par un moyennage local des statistiques à chaque instant  $t$ , donnant lieu à une alternative particulièrement adaptée aux signaux dont les statistiques varient rapidement. On obtient ainsi l'estimateur suivant :

$$\begin{aligned} \hat{E}[\phi(x_i(t), x_i(t-1), \dots, x_i(t-q))] &= \\ &= \frac{\sum_{\tau=q+1}^N \kappa\left(\frac{\tau-t}{\nu}\right) \phi(x_i(\tau), x_i(\tau-1), \dots, x_i(\tau-q))}{\sum_{\tau=q+1}^N \kappa\left(\frac{\tau-t}{\nu}\right)} \quad (8) \end{aligned}$$

où  $\kappa(\cdot)$  est une fonction noyau et  $\nu$  est un paramètre d'ajustement.

Cependant, on note que cette approche induit une complexité calculatoire très importante. Pour réduire un peu

le coût de calcul, l'estimateur (8) peut être approché par une estimation parcimonieuse de la forme :

$$\hat{E}[\phi(x_i(t), \dots, x_i(t-q))] = \frac{\sum_{l=l_1}^L \kappa\left(\frac{LN-t}{\nu}\right) \phi\left(x_i\left(\frac{LN}{L}\right), \dots, x_i\left(\frac{LN}{L} - q\right)\right)}{\sum_{l=l_1}^L \kappa\left(\frac{LN-t}{\nu}\right)} \quad (9)$$

où  $L$  est choisi tel que  $\frac{N}{L}$  est un entier et  $l_1$  est le premier entier supérieur ou égal à  $\frac{L(q+1)}{N}$ . Le choix de  $L$  doit être adapté aux variations du signal.

Par ailleurs, le paramètre d'ajustement  $\nu$  peut être adapté, à chaque itération, aux statistiques des sources reconstruites afin d'assurer une meilleure flexibilité de l'estimation.

## 4 Résultats Expérimentaux

### 4.1 Tests sur des signaux unidimensionnels

Nous avons comparé dans un premier temps les performances de nos méthodes non-stationnaires à la version stationnaire originale de l'algorithme Markovien présentée en [2]. Pour ceci, nous avons généré deux bruits blancs, indépendants et uniformément distribués  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$ , que nous avons ensuite filtrés par deux filtres autorégressifs (AR) d'ordre 1 et de coefficients différents  $\rho_i$ . Les sources ainsi obtenues sont des processus de Markov d'ordre 1 et vérifient le modèle  $\varsigma_i(t) = e_i(t) + \rho_i \varsigma_i(t-1)$ . Les coefficients des filtres  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ont été respectivement fixés à 0.2 et 0.9. Nous avons ensuite découpé chacun de ces signaux en  $P$  blocs puis multiplié chaque bloc par un coefficient  $\alpha_p$ ,  $p = 1, \dots, P$ , afin de générer deux sources  $s_i(t)$  non-stationnaires. Les deux observations sont finalement obtenues en appliquant aux sources un mélange linéaire instantané avec une matrice de mélange  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 1 \end{pmatrix}$ . Il est à noter que dans ce cas le mélange résultant est très fort, dans la mesure où les deux observations sont très similaires.

Pour séparer les observations ainsi générées, nous avons utilisé la méthode de Markov non-stationnaire par blocs en variant, pour chaque test, le nombre  $L$  des blocs considérés. Le cas  $L = 1$  correspond en particulier à la version stationnaire de l'algorithme de Markov.

Pour chaque simulation, les sources estimées  $\hat{s}_i$  sont normalisées pour avoir la même variance et le même signe que les sources  $s_i$ , puis le Rapport Signal à Interférence (RSI), défini par  $RSI = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K 10 \log_{10} \frac{E[s_i^2]}{E[(\hat{s}_i - s_i)^2]}$ , est calculé en dB. Ainsi, pour deux signaux de 1000 échantillons constitués de  $P = 8$  blocs, la moyenne des RSIs pour 100 simulations de Monte Carlo est visualisée dans la Fig. 1 en fonction du nombre de blocs  $L$  considéré.

On remarque que pour un nombre de blocs  $L = P$ , le RSI moyen atteint 37 dB avec l'algorithme Markovien non-stationnaire, alors que la version stationnaire de nos méthodes aboutit uniquement à 13 dB. Par ailleurs, l'approche non-stationnaire par blocs dépasse en performances la version originale stationnaire de l'algorithme quel que

soit le nombre de blocs  $L > 1$  pourvu que le nombre d'échantillons présents dans chaque bloc soit suffisant pour estimer les fonctions score conditionnelles.

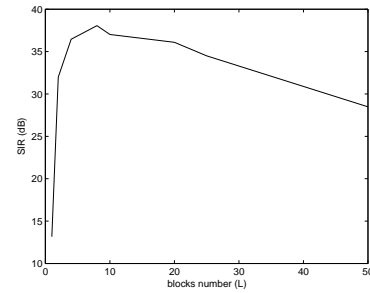


FIG. 1 – RSI moyen en fonction du nombre de blocs.

Dans une deuxième simulation, on veut montrer l'avantage de la méthode non-stationnaire à noyau vis-à-vis de l'approche par blocs dans certains cas où les statistiques du signal présentent des variations non-stationnaires très rapides.

Comme dans la première simulation, nous avons donc généré et filtré deux bruits blancs et uniformes de longueur  $N = 1000$  échantillons, puis nous avons découpé chacun des signaux filtrés en  $P = 200$  blocs et multiplié chaque bloc par un coefficient différent  $\alpha_p$ . Les sources ainsi générées présentent des variations rapides de la variance, ce qui rend plus difficile leur découpage en blocs stationnaires de tailles suffisantes.

Nous avons enfin mélangé les sources obtenues au moyen d'une matrice de mélange  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 1 \end{pmatrix}$ . En utilisant la méthode à noyau avec un noyau Gaussien, le RSI moyen pour 100 simulations de Monte Carlo est calculé et visualisé dans la Fig. 2 en fonction de l'écart type  $\sigma$  du noyau.

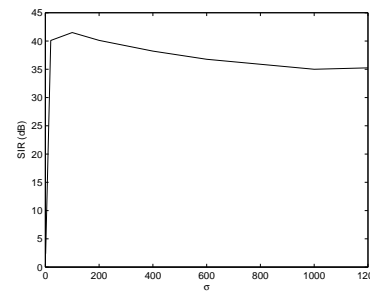


FIG. 2 – RSI moyen en fonction de l'écart-type du noyau Gaussien.

La méthode de séparation à noyau nous a permis dans ce cas d'obtenir jusqu'à 41 dB de RSI moyen pour un écart-type  $\sigma = 100$ , alors que la méthode par blocs aboutit au mieux à 35 dB de RSI moyen. Toutefois, la méthode à noyau induit un coût calculatoire largement supérieur à celui nécessaire pour une approche par blocs. On a pu constater ainsi, en utilisant des signaux sources artificiels avec  $N = 1000$  et  $P = 8$ , qu'une itération de l'algorithme

de séparation par blocs réalisée sur un ordinateur AMD-Athlon de 1.53 GHz, est au moins 100 fois plus rapide que celle réalisée par une approche à noyau.

Dans une étape suivante de nos simulations, nous avons procédé à des tests sur des mélanges artificiels de signaux de parole d'une longueur de 100000 échantillons.

Commençant par le cas de deux sources, nous avons donc calculé la moyenne des RSIs obtenus par la séparation de 10 couples de signaux de parole en utilisant respectivement la méthode de Markov non-stationnaire par blocs et les algorithmes disponibles dans la bibliothèque ICALAB [11, 12]. Notre approche a finalement permis d'obtenir un RSI moyen égal à 91 dB alors que les autres méthodes disponibles ont abouti au mieux à un RSI de sortie de 58 dB.

Nous avons ensuite vérifié la robustesse de notre méthode au cas multi-sources par la séparation d'un mélange fort de 8 signaux de parole, ce qui a donné un RSI de sortie de 66 dB pour notre méthode, la meilleure performance des algorithmes de ICALAB étant limitée à un RSI de 36 dB.

## 4.2 Tests sur des images

La deuxième phase de ce travail a été consacrée à l'extension de nos méthodes de Markov non-stationnaires au cas des sources bidimensionnelles, en nous basant sur l'approche stationnaire que nous avons proposée dans [3]. Les résultats de simulations réalisés aussi bien sur des images de synthèse non-stationnaires que sur des images réelles montrent une amélioration des performances par rapport à ceux obtenus avec l'algorithme Markovien standard, notamment dans le cas de mélanges forts. Ainsi, en appliquant nos méthodes au mélange linéaire instantané des deux images naturelles de la Fig. 3 par la matrice  $\mathbf{A}$  définie dans la section 4.1, nous avons pu obtenir une séparation quasi-parfaite avec un RSI de sortie de l'ordre de 60 dB, alors que la séparation échoue complètement en utilisant la version standard de l'algorithme Markovien.

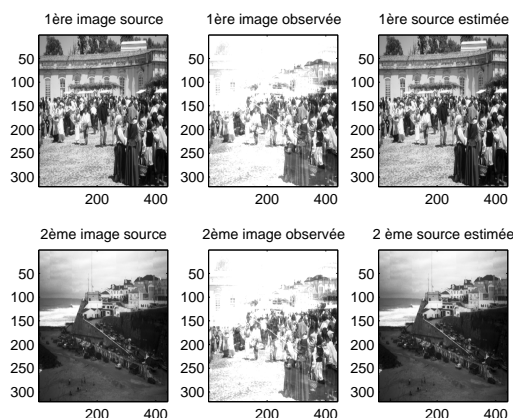


FIG. 3 – Séparation d'images de scènes photographiques.

La version bidimensionnelle de la méthode à noyau n'a pu être testée que sur des imagerie de petites tailles ( $32 \times 32$ ) en raison de la complexité calculatoire très importante de

l'algorithme. Néanmoins, ces tests ont permis de prouver l'avantage que cette approche présente pour les petites images dont les statistiques varient rapidement.

## 5 Conclusion

Nous avons présenté une méthode de séparation aveugle de sources adaptée aux sources non-stationnaires et auto-corrélées. Pour tenir compte de la non-stationnarité des sources, deux approches, basées respectivement sur un découpage par blocs et une approche à noyau, ont été adaptées à notre problème. Les très bonnes performances de nos méthodes ont été vérifiées aussi bien sur des signaux temporels que sur des images et les résultats obtenus pour les signaux de parole sont largement supérieurs à ceux fournis par des approches classiques disponibles dans la bibliothèque ICALAB. Des travaux sont en cours pour réduire la complexité calculatoire de nos méthodes.

## Références

- [1] J.-F. Cardoso, The three easy routes to independent component analysis : contrast and geometry, in *Proc. International Conference on Independent Component Analysis and Blind Source Separation (ICA 2001)*, pp. 1-6, San Diego, 2001.
- [2] S. Hosseini, C. Jutten and D.-T. Pham, Markovian Source Separation, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 51, pp. 3009-3019, 2003.
- [3] S. Hosseini, R. Guidara, Y. Deville and C. Jutten, Markovian Blind Image Separation, in *Proc. ICA 2006*, pp. 106-114, Charleston, 2006.
- [4] K. Matsuoaka, M. Ohya, and M. Kawamoto, A neural net for blind separation of non-stationary signals, *Neural Networks*, vol. 8, no. 3, pp. 411-419, 1995.
- [5] S. Choi, A. Cichocki, and S. Amari, Equivariant non-stationary source separation, *Neural Networks*, vol. 15, no. 1, pp. 121-130, Jan. 2002.
- [6] A. Souloumiac, Blind source detection and separation using second-order non-stationarity, in *Proc. ICASSP*, 1995, pp. 1912-1915.
- [7] S. Choi, A. Cichocki, and A. Belouchrani, Second order non-stationary source separation, *Journal of VLSI Signal Processing*, vol. 32, no. 1-2, pp. 93-104, Aug. 2002.
- [8] A. Hyvarinen, Blind source separation by non-stationarity of variance : a cumulant based approach, *IEEE Trans. on Neural Networks*, vol. 12, no. 6, pp. 1471-1474, 2001.
- [9] D.-T. Pham, and J.-F. Cardoso, Blind separation of independent mixtures of non-stationary sources, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, no. 9, 2001.
- [10] D.-T. Pham, Blind Separation of non stationary non Gaussian sources. in *Proc. European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2002)*, Toulouse, France, September 2002.
- [11] A. Cichocki, S. Amari, K. Siwek, T. Tanaka et al., ICALAB Toolboxes, <http://www.bsp.brain.riken.jp/ICALAB>
- [12] A. Cichocki, S. Amari, *Adaptive Blind Signal and Image Processing : Learning Algorithms and Applications*, Wiley, 2003.