

Sur un test temps-fréquence de stationnarité

Jun XIAO¹, Pierre BORGNAT¹, Patrick FLANDRIN¹

¹Ecole Normale Supérieure de Lyon, Laboratoire de Physique, CNRS
46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France
{Jun.Xiao,pborgnat,flandrin}@ens-lyon.fr

Résumé – On propose un nouveau test de stationnarité auquel l'utilisation de substituts temps-fréquence permet de donner un sens statistique précis. Le test est relatif à une durée d'observation et peut s'appliquer à des bandes de fréquence, donnant un cadre à ce qui est souvent fait en pratique. Un degré de non-stationnarité peut être attaché au test, ainsi que, le cas échéant, une échelle caractéristique de la non-stationnarité détectée.

Abstract – We propose a novel test of stationarity to which the use of time-frequency surrogates permits to give a precise statistical meaning. The test operates relatively to an observation scale and can be applied to frequency subbands, thus offering a framework to what is often done in practice. An index of nonstationarity can be attached to the test, as well as a characteristic scale of the detected nonstationarity, if any.

1 Introduction

Le concept de stationnarité, tel qu'il est classiquement (bien) défini au deuxième ordre, n'est pas *opérationnel* au sens où sa considération pratique s'assortit le plus souvent d'aménagements heuristiques sans véritable lien avec une théorie sous-jacente. Dire d'un signal qu'il est stationnaire ou non n'a en pratique de sens que relativement à un horizon d'observation et/ou un domaine de fréquences d'intérêt. C'est là un point de vue souvent adopté par le praticien mais s'appuyant sur une notion de localité qui, dans le principe, s'oppose à la notion de permanence associée à l'idée de stationnarité. En outre, déduire d'une variabilité temporelle l'indice d'une non-stationnarité nécessite de pouvoir justifier que celle-ci est statistiquement significative. Tester la stationnarité d'un signal observé est ainsi une question qui mérite d'être précisée en lui donnant à la fois un sens relatif et un sens statistique.

C'est cette double question de re-considérer qualitativement l'idée de stationnarité dans une perspective relative et de la tester quantitativement qui fait l'objet de cette communication. À cette fin, celle-ci s'attache à fixer le cadre général d'une méthode opérant dans le plan temps-fréquence par comparaison de spectres locaux et globaux, l'originalité étant de construire une référence "stationnarisée" permettant, le cas échéant, de rejeter l'hypothèse nulle de stationnarité. Cette référence est obtenue à partir des données elles-mêmes sous la forme d'un ensemble de *substituts* préservant le spectre global tout en supprimant la structuration temporelle représentative de la non-stationnarité. On discutera plus particulièrement de la façon d'obtenir un ensemble convenable de tels substituts et d'en déduire une statistique de décision à base de "distances" temps-fréquence. Sur la base d'un exemple simple mettant en jeu une (ou des) échelle(s) connue(s) de non-stationnarité, on montrera enfin que, dans le cas où l'hypothèse de stationnarité est rejetée, il est possible de défi-

nir un *indice de non-stationnarité* et d'estimer la (ou les) échelle(s) caractéristique(s) de cette dernière.

2 Cadre général

La voie que l'on se propose de suivre pour tester la stationnarité d'un signal observé est de type temps-fréquence. Elle est basée sur le fait que, dans le cas stationnaire, un "bon" spectre non stationnaire [1] est identique à tout instant au spectre moyen, et donc que la marginalisation de celui-là se réduit à celui-ci. Il est alors naturel, même si l'idée n'est pas neuve [2, 3, 4], d'imaginer un test de stationnarité basé sur une comparaison de statistiques locales et globales dans le plan temps-fréquence, relativement à un domaine temps-fréquence choisi. En pratique, même si le signal étudié est stationnaire, les caractéristiques globales et locales ne seront jamais identiques et la question est de savoir si les différences observées sont significatives.

2.1 Temps-fréquence

Le premier ingrédient nécessaire au test est une représentation temps-fréquence susceptible de se prêter de façon robuste aux traitements ultérieurs. Par souci de simplicité, le choix se portera ici sur un *spectrogramme multifenêtres*, celui-ci présentant l'avantage d'être un bon estimateur (au sens d'une variance réduite sans lissage temporel additionnel tendant à gommer les non-stationnarités) du spectre théorique de Wigner-Ville [5, 6]. D'une façon plus précise, on calcule la quantité :

$$S_{x,K}(t, f) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K S_x^{(h_k)}(t, f), \quad (1)$$

celle-ci s'interprétant comme une moyenne des K spectrogrammes

$$S_x^{(h_k)}(t, f) = \left| \int x(s) h_k(s-t) e^{-i2\pi fs} ds \right|^2$$

calculés chacun sur le signal $x(t)$ en prenant pour fenêtres à court-terme les termes successifs $h_k(t)$ d'une base (orthonormée) de fonctions d'Hermitte. En pratique, la moyenne (1) porte sur un nombre réduit de fenêtres, typiquement entre 5 et 10 (on pourra se reporter à [5, 6] pour plus de détails).

2.2 Substituts

Afin de disposer d'une base de comparaison quantifiable, l'approche proposée est d'associer au signal observé une référence "stationnarisée" de façon à pouvoir rejeter le cas échéant l'hypothèse de stationnarité. Pour ce faire, on utilise l'interprétation selon laquelle, pour un même spectre moyen, un signal non stationnaire se distingue d'un homologue stationnaire par une *structuration* temporelle dont la signature se retrouve dans la phase spectrale. Ainsi, étant donné un seul signal observé $x(t)$, il est possible de lui associer une batterie de *substituts* (*surrogates* en anglais [7, 8]) $\{s_j(t); j = 1, \dots, J\}$ ayant chacun même spectre de puissance que le signal original mais un contenu temporel stationnarisé : il suffit pour celà de remplacer la phase originale du spectre par une phase aléatoire. Notons que pour garder la génération des substituts aussi simple que possible, c'est ici directement la phase de la transformée de Fourier du signal (une estimation du spectre, quoique pauvre) qui est remplacée par une phase i.i.d. uniforme dans $[0, 2\pi[$. Une illustration du principe de stationnarisation par substituts est donnée en Figure 1.

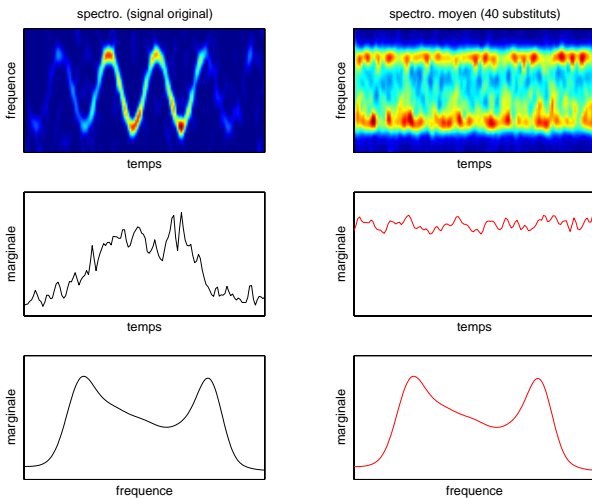


FIG. 1 – Stationnarisation par substituts — La colonne de gauche présente un spectrogramme (en haut) et ses distributions marginales en temps (au milieu) et en fréquence (en bas), dans le cas d'un signal "non stationnaire" (AM-FM + bruit). La colonne de droite présente de la même façon le spectrogramme moyen calculé sur 40 substituts du même signal et les distributions marginales associées. Ces différentes distributions mettent en évidence une "stationnarisation" au sens où, pour un même spectre marginal, le comportement temporel local a perdu la forte structuration (AM-FM) du signal original.

2.3 Distances

En se plaçant comme choisi dans une perspective temps-fréquence, l'idée est de comparer les spectres locaux au spectre global. On définit pour cela les quantités marginalisées en temps

$$\langle S_{y,K}(t_n, f) \rangle_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_{y,K}(t_n, f),$$

tant pour le signal ($y(t) = x(t)$) que pour les J substituts ($y(t) = s_j(t); j = 1, \dots, J$), les différents spectres temps-fréquence n'étant évalués qu'en N instants t_n distants d'une fraction (typiquement la moitié) de la largeur équivalente des fenêtres à court-terme. On en déduit les $J + 1$ "distances" entre spectres locaux et celui global

$$\{c_n^{(y)} := \kappa(S_{y,K}(t_n, \cdot), \langle S_{y,K}(t_n, \cdot) \rangle_n), n = 1, \dots, N\} \quad (2)$$

au moyen d'une mesure de dissimilarité $\kappa(\cdot, \cdot)$ qu'il convient de choisir. Une étude complémentaire à ce travail a montré [9] qu'un bon choix relatif à deux spectres $G(f)$ et $H(f)$ était de la forme

$$\kappa(G, H) := \kappa_{\text{KL}}(\tilde{G}, \tilde{H}) \cdot (1 + \kappa_{\text{LSD}}(G, H)),$$

combinant la divergence de Kullback-Leibler

$$\kappa_{\text{KL}}(\tilde{G}, \tilde{H}) := \int_{\Omega} (\tilde{G}(f) - \tilde{H}(f)) \log \frac{\tilde{G}(f)}{\tilde{H}(f)} df$$

(appliquée aux spectres normalisés $\tilde{G}(f)$ et $\tilde{H}(f)$ issus de $G(f)$ et $H(f)$) et la déviation log-spectrale

$$\kappa_{\text{LSD}}(G, H) := \int_{\Omega} \left| \log \frac{G(f)}{H(f)} \right| df.$$

C'est dans ce cadre que l'on se placera ici.

2.4 Hypothèse nulle de stationnarité

La stationnarité étant supposée correspondre à une égalité entre les spectres locaux et le spectre global, on peut mesurer un écart éventuel à celle-ci via les fluctuations en temps des distances $c_n^{(\cdot)}$ évaluées précédemment selon (2). Choissant de faire usage de la distance quadratique

$$L(g, h) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (g_n - h_n)^2, \quad (3)$$

on calcule ainsi les quantités

$$\Theta_1 = L(c^{(x)}, \langle c^{(x)} \rangle_n) \quad (4)$$

pour le signal testé $x(t)$ et

$$\Theta_0(j) = L(c^{(s_j)}, \langle c^{(s_j)} \rangle_n), \quad j = 1, \dots, J, \quad (5)$$

pour les J substituts $s_j(t); j = 1, \dots, J$.

La distribution statistique basée sur les substituts (histogramme des $\Theta_0(j)$) permet alors de caractériser l'hypothèse nulle de stationnarité et d'en déduire de façon contrôlée un seuil auquel comparer la statistique de test Θ_1 . Une étude expérimentale montre que cette distribution est bien décrite par une loi Gamma, ce qui peut se justifier par la nature quadratique de la mesure (3) des fluctuations (cf. Figure 2, montrant le bon accord entre l'histogramme effectif dans le régime asymptotique ($J = 5000$)).

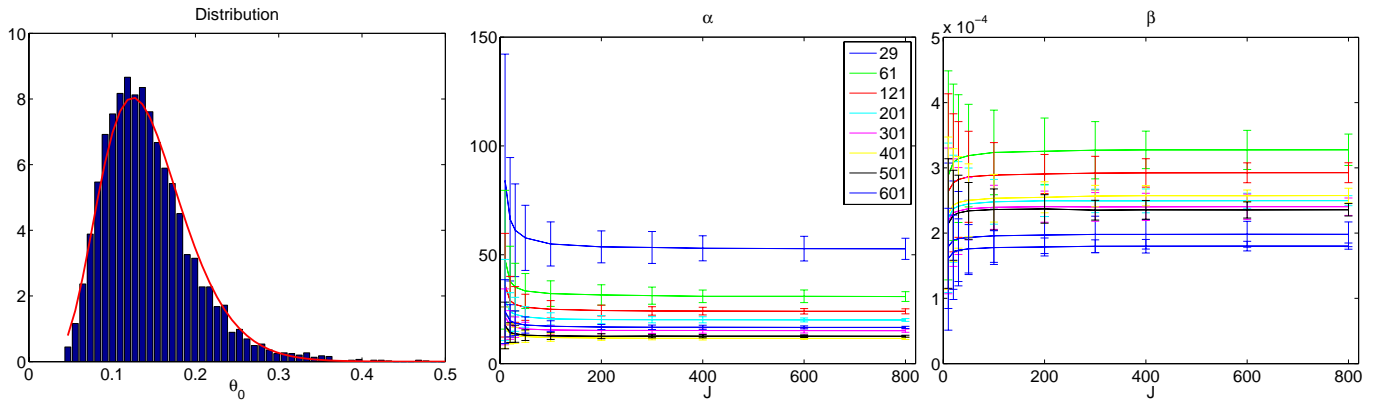


FIG. 2 – Caractérisation statistique de l’hypothèse nulle de stationnarité 1. — Le diagramme de gauche présente un histogramme asymptotique ($J = 5000$) typique des Θ_0 relatifs aux substituts stationnarisés (cf. eq. (5)) et son ajustement par une loi Gamma (courbe en rouge). Les diagrammes du centre et de droite présentent les résultats d’estimation des paramètres α et β correspondants en fonction du nombre J de substituts et de la taille des fenêtres N_h (indiquée dans le cadre). Conditions expérimentales : $x(t)$ = bruit blanc de $N_x = 2048$ points modulé en amplitude avec une période de $T = 256$ points, $K = 5$ fenêtres et 5000 réalisations.

substituts) et l’ajustement Gamma correspondant). L’intérêt de cette modélisation est de ne nécessiter que l’estimation de 2 paramètres (α pour la forme et β pour l’échelle), ce qui peut être fait de façon directe par maximum de vraisemblance sur les données stationnarisées.

Comme illustré en Figure 2, l’étude du comportement des estimateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ de ces paramètres en fonction du nombre de substituts J pour différentes largeurs de fenêtres N_h montre une convergence rapide vers le régime asymptotique. Plus précisément, il apparaît (cf. Figure 3) que le biais et la variance (normalisés) sont très peu dépendants de N_h et décroissent, en fonction de J , avec une pente proche de -1 en unités logarithmiques de base 10. L’erreur devient ainsi inférieure à 5% pour J plus grand que 50 : on pourra retenir ce nombre comme un bon compromis entre complexité et précision.

2.5 Test de stationnarité

Étant donné le caractère supposé Gamma de la distribution basée sur les substituts, il est facile d’en déduire un seuil permettant de rejeter l’hypothèse nulle de stationnarité avec une confiance spécifiée, le test se réduisant alors à une comparaison de Θ_1 à ce seuil. De plus, dans le cas non stationnaire (où l’hypothèse nulle est rejetée), il est possible de définir un *indice* de non-stationnarité (INS) selon :

$$\text{INS} := \sqrt{\frac{\Theta_1}{\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \Theta_0(j)}}. \quad (6)$$

Par construction, le test est relatif à une échelle d’observation définie comme la durée N_x du signal analysé, mais il est aussi fonctionnellement dépendant de la taille N_h des fenêtres à court-terme permettant de contraster les spectres locaux et le spectre global. Conduisant le test pour plusieurs tailles de fenêtres, il est alors possible de définir une *échelle* typique de non-stationnarité (ENS) selon :

$$\text{ENS} := \frac{1}{N_x} \arg \max_{N_h} \{\text{INS}(N_h)\}. \quad (7)$$

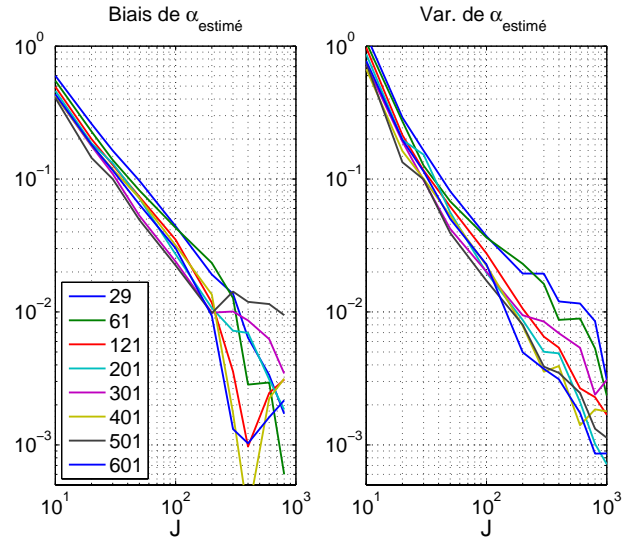


FIG. 3 – Caractérisation statistique de l’hypothèse nulle de stationnarité 2. — Le biais normalisé (à gauche) et la variance normalisée (à droite) relatifs aux estimateurs des paramètres α et β de la loi supposée Gamma des Θ_0 sont tracés en fonction du nombre J de substituts et de la taille des fenêtres N_h (mêmes conditions expérimentales qu’en Figure 2).

3 Exemple

Afin d’illustrer le principe et la potentialité de la méthode proposée, la Figure 4 s’intéresse au cas particulier d’un signal à deux composantes, dont l’une (fréquence pure) peut être considérée comme stationnaire, la stationnarité de l’autre (FM sinusoïdale) dépendant de l’échelle d’observation, pour une période de modulation donnée. L’application du test et l’évaluation des indices (6)-(7) correspondants montre un bon accord avec ce que l’intuition attend d’une telle situation, la composante à hautes fréquences étant toujours détectée comme stationnaire, alors que l’hypothèse de stationnarité est rejetée pour la com-

posante à basses fréquences dans le domaine où la durée d'observation n'est grande ni petite devant la période de modulation.

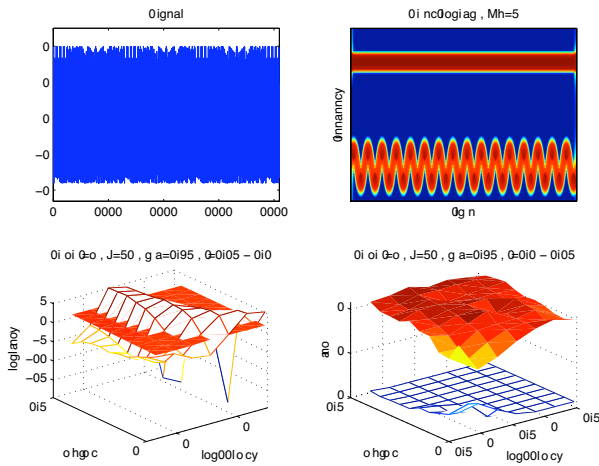


FIG. 4 – Exemple de test — Les diagrammes du haut de la figure présentent un signal (à gauche) et un spectrogramme associé (à droite), l'analyse portant sur la bande de fréquences réduites complète $[0, 0.5]$. Ceux du bas présentent les indices de non-stationnarité correspondants (surfaces blanches) dans les sous-bandes $[0.05, 0.2]$ (à gauche) et $[0.3, 0.45]$ (à droite). Dans les deux cas, les résultats sont tracés en fonction de la durée d'observation N_x du signal et de l'échelle relative d'analyse N_h/N_x , N_h étant la largeur de la fenêtre du spectrogramme. Les seuils déduits des substituts (pour une confiance à 95 %) sont matérialisés par les surfaces à facettes colorées, en accord avec l'interprétation selon laquelle le signal est stationnaire dans sa bande haute de fréquences et non stationnaire dans la bande basse lorsque la durée d'observation n'est grande ni petite devant la période de modulation.

4 Conclusion

On s'est intéressé ici à caractériser la stationnarité (de deuxième ordre) d'un signal relativement à un intervalle d'observation, en lui donnant un sens statistique associé à la construction d'une référence stationnarisée. L'approche opère dans le plan temps-fréquence avec l'idée que, sur un intervalle d'observation donné, un signal "non stationnaire" se distingue d'un signal "stationnaire" de même spectre moyen par une organisation temporelle structurée. Le test consiste alors à comparer classiquement des statistiques locale et globale, mais avec l'originalité qu'il s'appuie sur un ensemble de substituts stationnarisés servant à caractériser l'hypothèse nulle.

Les idées et principes de base de la méthode ont été décrits ici, mais de nombreuses variantes sont possibles pour le test proposé, que ce soit au niveau des représentations temps-fréquence utilisées (pour lesquelles l'usage de spectrogrammes réalloués multi-fenêtres [6] pourrait accroître

la sensibilité du test) ou dans le choix des *distances* utilisées.

Une autre direction de recherche actuelle (cf. [10] pour de premiers résultats en ce sens) consiste à considérer le recours aux substituts comme une forme d'*apprentissage*, permettant ainsi de mettre en œuvre des outils dédiés (méthodes à noyaux, machines à vecteurs-supports, etc. [11]) pouvant s'appuyer sur des espaces d'attributs très généraux, et sans nécessité de caractériser de façon paramétrique l'hypothèse nulle de stationnarité.

Références

- [1] P. Flandrin, *Time-Frequency/Time-Scale Analysis*. San Diego : Academic Press, 1999.
- [2] H. Laurent and C. Doncarli, "Stationarity index for abrupt changes detection in the time-frequency plane," *IEEE Signal Proc. Lett.*, Vol. 5, No. 2, pp. 43–45, 1998.
- [3] W. Martin, "Measuring the degree of non-stationarity by using the Wigner-Ville spectrum," in Proc. IEEE ICASSP-84, pp. 41B.3.1–41B.3.4, San Diego (CA), 1984.
- [4] W. Martin and P. Flandrin, "Detection of changes of signal structure by using the Wigner-Ville spectrum," *Signal Proc.*, Vol. 8, pp. 215–233, 1985.
- [5] M. Bayram and R.G. Baraniuk, "Multiple window time-varying spectrum estimation," in *Nonlinear and Nonstationary Signal Processing* (W.J. Fitzgerald *et al.*, eds.), pp. 292–316, Cambridge Univ. Press, 2000.
- [6] J. Xiao and P. Flandrin, "Multitaper time-frequency reassignment for nonstationary spectrum estimation and chirp enhancement," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 55, No. 6 (Part 2), pp. 2851–2860, 2007.
- [7] J. Theiler *et al.*, "Testing for nonlinearity in time series : the method of surrogate data," *Physica D*, Vol. 58, No. 1–4, pp. 77–94, 1992.
- [8] T. Schreiber and A. Schmitz, "Improved surrogate data for nonlinearity tests," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 77, No. 4, pp. 635–638, 1996.
- [9] J. Xiao, P. Borgnat and P. Flandrin, "Testing stationarity with time-frequency surrogates," *Proc. EUSIPCO-07*, Poznan (PL), à paraître 2007.
- [10] J. Xiao, P. Borgnat, P. Flandrin and C. Richard, "Testing stationarity with surrogates – A one-class SVM approach," *Proc. IEEE Stat. Sig. Proc. Workshop SSP-07*, Madison (WI), à paraître 2007.
- [11] B. Schölkopf and A.J. Smola, *Learning With Kernels : Support Vector Machines, Regularization, Optimization and Beyond*. MIT Press, 2001.