

Modèle Harmonique Multidimensionnel: Performances Limites

Rémy BOYER¹, Naheed SAJJAD¹
 Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S-SUPELEC)
 3 rue Joliot-Curie, 91190 Gif-Sur-Yvette, France
 remy.boyer@lss.supelec.fr

Résumé – Le modèle harmonique multidimensionnel noyé dans du bruit blanc Gaussien est au centre de nombreuses applications. Stoica et Nehorai ont déterminé la Borne de Cramér-Rao (BCR) pour le modèle harmonique d'ordre M et de dimension 1 ($P = 1$). Cette dernière est une borne inférieure, basée sur l'information de Fisher, de la variance d'un estimateur non-biaisé. Dans ce travail, on détermine et analyse des expressions non-matricielles asymptotiques et exactes de la BCR déterministe et Bayésienne associées au modèle harmonique multidimensionnel d'ordre M et de dimension P avec $P > 1$.

Abstract – Multi-dimensional harmonic model has attracted considerable attention with a variety of applications in signal processing. Stoica *and al.* have derived the exact and asymptotic CRB (Cramér-Rao Bound) which represents the minimal theoretical variance in the estimation of the model parameters for a one-dimensional harmonic model of order M . In this work, we generalize and analyze the CRB associated to a M -order harmonic model of dimension P with $P > 1$.

1 Introduction

Le modèle harmonique d'ordre M et de dimension 1 s'est avéré essentiel dans de nombreuses applications au coeur du traitement du signal, de la compression audio et des communications numériques, etc. Une généralisation de ce modèle à $P > 1$ dimensions peut être rencontrée dans la contexte de l'estimation de canaux MIMO [1], des communications mobiles [2], de la localisation passive, ou encore en traitement radar, etc. Dans [3], on trouvera une analyse du problème de l'identification des paramètres de ce modèle.

Dans ce travail, on propose des expressions non-matricielles de la Borne de Cramér-Rao Bound (BCR) pour le modèle harmonique d'ordre M (somme de M formes d'onde) et de dimension P entaché par un bruit blanc Gaussien. Il est bien connu que la BCR est une borne inférieure sur la précision d'estimation de tous estimateurs non-biaisés et est intimement reliée à l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Ce travail peut être vu comme une extension du travail de Stoica et Nehorai [4] réalisé pour le modèle harmonique de dimension 1. De nombreux travaux ont été réalisés afin de calculer la BCR pour des dimensions P petites, *ie.*, pour $P = 2$ ou pour $P = 3; 4$ dans le contexte du traitement d'antenne [5]. Mais à notre connaissance, il n'existe pas de caractérisation systématique de la BCR pour tout P . La philosophie de notre approche est comparable à celle proposée dans [5] puisque nous basons notre analyse sur l'algèbre tensoriel mais notre BCR est dédiée au modèle harmonique multidimensionnel pour toutes dimensions P et en particulier, nous proposons des expressions non-matricielles asymptotiques de la BCR. L'intérêt de chercher de telles expressions est double. Premièrement, le calcul direct pour de large tenseurs est coûteux et est en $O(N_1 \dots N_P)$ où N_p est le nombre d'échantillons le long de

la p -ième dimension. Ensuite, la dépendance en fonction des paramètres de modèle est explicite.

2 Décomposition CanDecomp/Parafac

On définit un modèle harmonique multidimensionnel d'ordre M et de dimension P bruité selon

$$[\mathcal{Y}]_{n_1 \dots n_P} = [\mathcal{X}]_{n_1 \dots n_P} + \sigma [\mathcal{E}]_{n_1 \dots n_P} \quad (1)$$

où $[\mathcal{Y}]_{n_1 \dots n_P}$ représente la (n_1, \dots, n_P) -ème entrée du tenseur (tableau multidimensionnelle) \mathcal{Y} . Soit N la durée d'analyse et $n_p \in [0 : N_p - 1]$, alors \mathcal{Y} , \mathcal{X} et \mathcal{E} sont trois tenseurs d'ordre P et de taille $N_1 \times \dots \times N_P$, σ est un réel positif et

$$[\mathcal{X}]_{n_1 \dots n_P} = \sum_{m=1}^M \alpha_m \prod_{p=1}^P e^{i\omega_m^{(p)} n_p} \quad (2)$$

définit le modèle harmonique multidimensionnel d'ordre M et de dimension P non-bruité. La m -ème amplitude complexe est définie par $\alpha_m = a_m e^{i\phi_m}$ où $a_m > 0$ est la m -ème amplitude réelle, ϕ_m est la m -ème phase initiale et $\omega_m^{(p)}$ est la m -ème pulsation selon la dimension p . Il est bien connu que le tenseur \mathcal{X} suit un modèle CanDecomp/Parafac [6, 3]. En conséquence, nous avons $x = \text{vec}(\mathcal{X}) = \sum_{m=1}^M \alpha_m (d(\omega_m^{(1)}) \otimes \dots \otimes d(\omega_m^{(P)})) \in \mathbb{C}^{N^P}$ où \otimes est le produit de Kronecker. En prenant en compte le bruit, l'expression finale est $y = \text{vec}(\mathcal{Y}) = x + \sigma e$ où $e = \text{vec}(\mathcal{E})$ est le bruit additif blanc Gaussien de paramètres $\mathcal{N}(0, I_{N^P})$.

2.1 BCR déterministe

2.1.1 Borne inférieure

L'observation y est fonction du vecteur de paramètres réels θ défini par $\theta = [\theta'^T \sigma^2]^T$ dans lequel

$$\theta' = [\underline{\omega}^{(1)T}, \dots, \underline{\omega}^{(P)T} \underline{a}^T \underline{\phi}^T]^T$$

où $\underline{\omega}^{(p)} = [\omega_1^{(p)} \dots \omega_M^{(p)}]^T$, $\underline{a} = [a_1 \dots a_M]^T$ et $\underline{\phi} = [\phi_1 \dots \phi_M]^T$.

Soit $\Gamma = E \left\{ (\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T \right\}$ la matrice de covariance associée à un estimation non-biaisée, $\hat{\theta}$, de θ . On note par $BCR_{(P)}$ la Borne de Cramér-Rao Bound pour un modèle harmonique de dimension P et d'ordre M . Dans ce cas, $\Gamma - BCR_{(P)}(\theta)$ est une matrice semi-définie positive ou encore

$$EQM([\hat{\theta}]_i) = E \left\{ \left([\hat{\theta}]_i - [\theta]_i \right)^2 \right\} \geq BCR_{(P)}([\theta]_i) \quad (3)$$

où EQM signifie Erreur Quadratique Moyenne. Plus précisément, la BCR selon le paramètre "signal", θ' , est donnée par

$$BCR_{(P)}([\theta']_i) = \frac{\sigma^2}{2} [F_{\theta'\theta'}^{-1}]_{ii}, \quad (4)$$

pour $i \in [1 : (P+2)M]$ où

$$F_{\theta'\theta'} = \begin{bmatrix} J_{\underline{\omega}\underline{\omega}} & J_{\underline{\omega}\underline{a}} & J_{\underline{\omega}\underline{\phi}} \\ J_{\underline{\omega}\underline{a}}^T & J_{\underline{a}\underline{a}} & J_{\underline{a}\underline{\phi}} \\ J_{\underline{\omega}\underline{\phi}}^T & J_{\underline{a}\underline{\phi}}^T & J_{\underline{\phi}\underline{\phi}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

est la Matrice d'Information de Fisher (MIF) où

$$J_{pq} = \Re \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial p} \right)^H \frac{\partial x}{\partial q} \right\} \quad (6)$$

avec $\Re\{\cdot\}$ la partie réelle et x le signal sans bruit définit la paragraphe 2. Pour obtenir (4), on a exploité la propriété que les paramètres "signal" et de nuisance sont découplés.

2.1.2 BCR asymptotique et déterministe

Dans la suite, on considère des durées d'analyse grandes selon $N_p \rightarrow \infty$, $\forall p$.

Théoreme 1 La BCR asymptotique et déterministe dénotée par $BCRA_{(P)}$ pour le modèle définit en (1) en fonction du vecteur de paramètres "signal" θ' , ie., $BCRA_{(P)}(\theta')$, est donnée par

$$BCRA_{(P)}(\omega_m^{(p)}) = \frac{6}{N_p^2 \left(\prod_{p=1}^P N_p \right) RSB_m}, \quad (7)$$

$$BCRA_{(P)}(a_m) = \frac{a_m^2}{2 \left(\prod_{p=1}^P N_p \right) RSB_m}, \quad (8)$$

$$BCRA_{(P)}(\phi_m) = \frac{3P+1}{2 \left(\prod_{p=1}^P N_p \right) RSB_m} \quad (9)$$

où $RSB_m = a_m^2/\sigma^2$ est le Rapport Signal à Bruit local.

Propriété 1 La BCR asymptotique et déterministe est complètement caractérisée par la taille du tenseur, de la dimension P , la variance du bruit et des paramètres d'amplitude réels. En conséquence, la $BCRA_{(P)}$ est invariante selon la valeur spécifique de la pulsation et de la phase initiale.

2.2 BCR asymptotique et Bayésienne

Un modèle standard en traitement du signal est le modèle harmonique multidimensionnel dont l'amplitude complexe est composée d'une amplitude réelle déterministe et d'une phase initiale aléatoire uniformément distribuée dans $[-\pi, \pi)$. On trouvera dans [8] une description détaillée de celui-ci. Pour ce modèle, il est approprié de déterminer la BCR asymptotique dans le cadre Bayésien [7].

Théoreme 2 Supposons que la phase initiale dans le modèle (1) est uniformément distribuée dans $[-\pi, \pi)$ alors $BCRA-B_{(P)}(\theta') = BCRA_{(P)}(\theta')$ où $BCRA-B$ signifie la BCR asymptotique Bayésienne.

Preuve : La $BCRA-B$ [7] est définie selon $BCRA-B_{(P)}(\theta') = \mathcal{F}_{\theta'\theta'}^{-1}$ avec

$$\mathcal{F}_{\theta'\theta'} = E_{\phi} \left\{ F_{\theta'\theta'} + \frac{\partial \ln p(\phi)}{\partial \theta'} \left(\frac{\partial \ln p(\phi)}{\partial \theta'} \right)^T \right\}$$

où $\mathcal{F}_{\theta'\theta'}$ est la Matrice d'Information Bayésienne (MIB) qui reflète la connaissance a priori que l'on a sur la phase initiale, $F_{\theta'\theta'}$ est la MIF donnée en (5) et

$$p(\phi) = \frac{1}{(2\pi)^M} 1_{[0,2\pi) \times \dots \times [0,2\pi)}$$

est la densité jointe de la phase initiale où $1_{\mathbb{D}}$ est la fonction indicatrice sur l'ensemble \mathbb{D} . En conséquence, le terme de droite dans la MIB est nul et en exploitant l'invariance de phase (cf. propriété 1), il vient $\mathcal{F}_{\theta'\theta'} = E_{\phi} \{ F_{\theta'\theta'} \} = F_{\theta'\theta'}$. ■

En conséquence, dans la suite, nous ne ferons pas de différence entre le cadre déterministe et Bayésien.

3 Convergence selon P

Dans cette partie, on considère que la $BCRA_{(P+1)}$ est associée au tenseur de taille $N_1 \times \dots \times N_P \times N_{P+1}$, ie., les P premières dimensions, ie., N_1, \dots, N_P , restent inchangées par rapport au tenseur associé à la $BCRA_{(P)}$ alors que la dernière dimension, ie., la $(P+1)$ -ième, est ajoutée. Dans ce cas, on a

Propriété 2 La $BCRA_{(P)}$ est une suite monotone et strictement décroissante selon la dimension P , ie., $BCRA_{(P)}([\theta']_i) < BCRA_{(P-1)}([\theta']_i) < \dots < BCRA_{(1)}([\theta']_i)$.

On peut dire :

- Augmenter la dimension du modèle décroît la $BCRA_{(P)}$. On explique cela intuitivement de la manière suivante. Quand la dimension P augmente, ie., $P \rightarrow P+1$, nous avons à estimer plus de paramètres de modèle donc le nombre de degré de liberté diminue mais dans le même temps la $BCRA_{(P+1)}$ bénéficie de N_{P+1} échantillons supplémentaires.

- Les rapports de $BCRA_{(P)}$ consécutives pour la pulsation et l'amplitude réelle suivent une progression géométrique car ils sont constants. Ce n'est pas le cas pour la phase initiale. Finalement on a

$$\begin{aligned} BCRA_{(P)}(\omega_m^{(p)}) &= \frac{1}{\prod_{p=2}^P N_P} BCRA_{(1)}(\omega_m), \\ BCRA_{(P)}(a_m) &= \frac{1}{\prod_{p=2}^P N_P} BCRA_{(1)}(a_m), \\ BCRA_{(P)}(\phi_m) &= \frac{3P+1}{4 \prod_{p=2}^P N_P} BCRA_{(1)}(\phi_m) \end{aligned}$$

où la $BCRA_{(1)}$ est la borne présentée par Stoica et Nehorai [4] pour $P = 1$.

3.1 Tenseurs cubiques

En se référant au théorème précédent, la $BCRA_{(P)}$ pour des tenseurs cubiques ($N_p = N, \forall p$), est donnée par

$$\begin{aligned} BCRA_{(P)}(\omega_m^{(p)}) &= \frac{6}{N^{P+2} RSB_m} = \frac{1}{N^{P-1}} BCRA_{(1)}(\omega_m), \\ BCRA_{(P)}(a_m) &= \frac{a_m^2}{2N^P RSB_m} = \frac{1}{N^{P-1}} BCRA_{(1)}(a_m), \\ BCRA_{(P)}(\phi_m) &= \frac{3P+1}{2N^P RSB_m} = \frac{3P+1}{4N^{P-1}} BCRA_{(1)}(\phi_m). \end{aligned}$$

En conclusion, on a :

- Les ordres de grandeur de la $BCRA_{(P)}$ pour l'amplitude réelle et la phase initiale sont $O(N^{-P})$ et $O(N^{-P+2})$ pour la pulsation.
- La vitesse de convergence est géométrique.

3.2 Analyse en fonction des paramètres de modèle

En formant les différents rapports de $BCRA$ pour une dimension P donnée et pour la même forme d'onde, il vient :

- La $BCRA_{(P)}$ pour la m -ième pulsation selon la dimension p est supérieure à celle associée à la m -ième amplitude réelle pour de faibles amplitudes vérifiant $a_m \leq 2\sqrt{3}N_p^{-1}$. Cependant, pour des signaux non pathologiques, *ie.*, pour des amplitudes réelles non négligeables, on a

$$BCRA_{(P)}(\omega_m^{(p)}) < BCRA_{(P)}(a_m).$$

- La $BCRA_{(P)}$ pour la m -ième pulsation selon la dimension p est plus petite que la $BCRA_{(P)}$ pour la m -ième phase initiale, *ie.*,

$$BCRA_{(P)}(\omega_m^{(p)}) < BCRA_{(P)}(\phi_m). \quad (10)$$

En effet, l'inégalité ci-dessus est équivalente à $N_p > \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3P+1}}, \forall p$. Le terme de droite est maximal pour $P = 1$ et égale à $\sqrt{3} \approx 1.7$. Comme $N_p > 1, \forall p$, l'inégalité (10) est toujours vérifiée.

- On a les deux régimes suivant :

$$BCRA_{(P)}(a_m) < BCRA_{(P)}(\phi_m) \quad (11)$$

si $0 \leq a_m < \sqrt{3P+1}$ et

$$BCRA_{(P)}(a_m) \geq BCRA_{(P)}(\phi_m) \quad (12)$$

sinon.

Cependant, pour de grand P , la $BCRA_{(P)}$ pour la m -ième amplitude réelle est plus petite que la $BCRA_{(P)}$ pour la m -ième phase initiale.

4 BCR exacte pour le modèle d'ordre 1 et de dimension P

Exploitant le même formalisme que précédemment, dans cette partie, nous déterminons la BCR exacte (non-asymptotique) pour le modèle harmonique multidimensionnel d'ordre 1 et de dimension P .

Théorème 3 La $BCR_{(P)}$ exacte pour le modèle harmonique multidimensionnel d'ordre 1 et de dimension P en fonction du vecteur "signal" $\theta' = [\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(P)} a \phi]^T$, *ie.*, $BCR_{(P)}(\theta')$, est donnée selon :

$$BCR_{(P)}(\omega^{(p)}) = \frac{6}{N^P(N^2-1)RSB}, \quad (13)$$

$$BCR_{(P)}(a) = \frac{a^2}{2N^P RSB}, \quad (14)$$

$$BCR_{(P)}(\phi) = \frac{3P \frac{N-1}{N+1} + 1}{2N^P RSB} \quad (15)$$

où $RSB = a^2/\sigma^2$.

La preuve est non produite dans cet article faute de place mais est très similaire à celle présentée pour la BCR asymptotique. Cette situation est assez semblable au cas asymptotique vu dans le paragraphe précédent. En particuliers, la BCR exacte pour le modèle d'ordre 1 partage les mêmes propriétés que la BCR asymptotique. De plus, pour un nombre petit d'échantillons et pour tout P , nous avons $BCR_{(P)}(\omega) > BCRA_{(P)}(\omega)$, $BCR_{(P)}(a) = BCRA_{(P)}(a)$ et $BCR_{(P)}(\phi) < BCRA_{(P)}(\phi)$. Pour les amplitudes réelles, la $BCRA$ et la BCR exacte pour le modèle d'ordre 1 sont égales. Pour la pulsation (*resp.* la phase initiale), la $BCRA$ est une sur-estimation (*resp.* sous-estimation) de la BCR exacte pour le modèle d'ordre 1.

5 Simulations numériques

Le signal test considéré est $x = 2e^{i\frac{\pi}{3}} (d(1) \otimes d(0.5) \otimes d(0.2))$. Sur la Fig. 1, nous avons reporté la $BCRA_{(P)}$ pour $P \in [1 : 5]$ et pour une durée d'analyse grande. Remarquons que dans ce cas, la complexité calculatoire est élevée et est en $O(N^P)$, il s'en suit que le calcul numérique la BCR devient impraticable. Comme nous pouvons le remarquer, augmenter la dimension P diminue la $BCRA$.

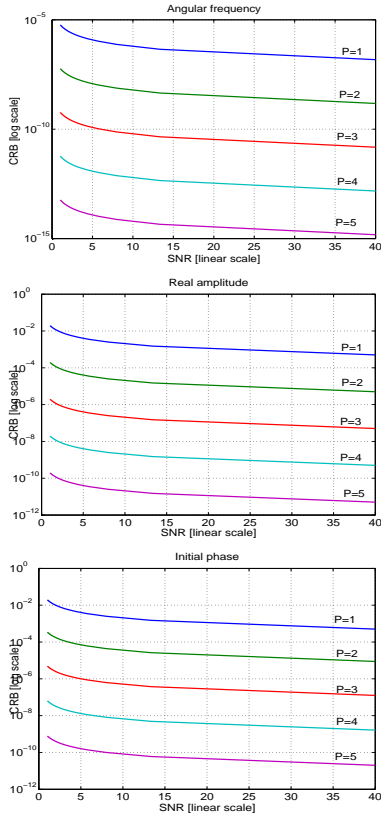


FIG. 1 – BCRA Vs. RSB pour un modèle harmonique d'ordre 1, de dimension P et pour une durée d'analyse longue ($N = 1000$).

6 Conclusions

Dans le contexte de l'algèbre tensoriel, nous avons proposé des expressions non-matricielles de la BCR déterministe et Bayésienne pour un modèle harmonique d'ordre M et de dimension P . On a prouvé en particuliers qu'augmenter la dimension du modèle harmonique diminue la BCR et donc améliore la variance minimale théorique sur les paramètres de modèle. De plus, on a donné des expressions simples liant la $BCR_{(P)}$ à la $BCR_{(1)}$ de Stoica et Nehorai. Finalement, on montre que pour des signaux dont les amplitudes sont faibles, la meilleure précision que l'on peut espérer obtenir concerne le paramètre d'amplitude réelle alors que pour des amplitudes réelles plus grande, le paramètre estimé avec la plus petite variance est la pulsation.

7 Preuve du théorème 1

Les dérivées partielles du signal non-bruité en fonction des paramètres de modèle sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \omega_m^{(p)}} &= i\alpha_m \left(d(\omega_m^{(1)}) \otimes \dots \otimes d'(\omega_m^{(p)}) \otimes \dots \otimes d(\omega_m^{(P)}) \right), \\ \frac{\partial x}{\partial a_m} &= e^{i\phi_m} \left(d(\omega_m^{(1)}) \otimes \dots \otimes d(\omega_m^{(P)}) \right), \\ \frac{\partial x}{\partial \phi_m} &= i\alpha_m \left(d(\omega_m^{(1)}) \otimes \dots \otimes d(\omega_m^{(P)}) \right) \end{aligned}$$

pour $m \in [1 : M]$, $j \in [1 : P]$ et

$$d'(\omega_m^{(p)}) = \left[0 \quad e^{i\omega_m^{(p)}} \quad 2e^{2i\omega_m^{(p)}} \quad \dots \quad (N_p - 1)e^{(N_p-1)i\omega_m^{(p)}} \right]^T.$$

Exploitant les propriétés asymptotiques du modèle harmonique [4], il vient :

$$J_{\underline{\omega}} = \left(\prod_{p=1}^P N_p \right) (\Upsilon_P \otimes \Delta^2) \quad (16)$$

où $\Delta = \text{diag}\{a_1, \dots, a_M\}$ et

$$\Upsilon_P = \begin{bmatrix} \frac{N_1^2}{3} & \frac{N_1 N_2}{4} & \dots & \dots & \frac{N_1 N_P}{4} \\ \frac{N_1 N_2}{4} & \frac{N_2^2}{3} & \dots & \dots & \frac{N_2 N_P}{4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{N_1 N_P}{4} & \frac{N_2 N_P}{4} & \dots & \dots & \frac{N_P^2}{3} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

De manière similaire, il vient $J_{\omega\phi} = \frac{\prod_{p=1}^P N_p}{2} (\gamma_P \otimes \Delta^2)$ où $\gamma_P = [N_1 \dots N_P]^T$. En conséquence, les blocs de la MIF sont diagonaux ou nuls et on obtient $J_{aa} = \left(\prod_{p=1}^P N_p \right) I_M$, $J_{\phi\phi} = \left(\prod_{p=1}^P N_p \right) \Delta^2$, $J_{a\phi} = 0_{M \times M}$, et $J_{\omega a} = 0_{PM \times M}$. En utilisant la formule d'inversion d'une matrice bloc [4], on obtient une expression analytique de $F_{\theta'}^{-1}$. Ensuite, en considérant les termes diagonaux de cette dernière, on obtient les expressions (7)-(9).

Références

- [1] M. Pesavento, C.F. Mecklenbräuer and J.F. Bohme, "Multidimensional Rank Reduction Estimator for Parametric MIMO Channel Models", *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, Vol. 2004, No. 9, 2004, Pp. 1354-1363.
- [2] M. Haardt and J.A. Nossek, "Simultaneous Schur decomposition of several nonsymmetric matrices to achieve automatic pairing in multidimensional harmonic retrieval problems", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 46, Issue 1, Jan. 1998, Pp.161 - 169.
- [3] L. Xiangqian and N.D. Sidiropoulos, "Almost sure identifiability of constant modulus multidimensional harmonic retrieval", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 50, Issue 9, Sept. 2002, Pp.2366 - 2368.
- [4] P. Stoica and A. Nehorai, "MUSIC, maximum likelihood, and Cramér-Rao bound", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 37, Issue 5, May 1989, Pp.720 - 741.
- [5] L. Xiangqian and N.D. Sidiropoulos, "Cramér-Rao lower bounds for low-rank decomposition of multidimensional arrays", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 49, Issue 9, Sept. 2001 Pp.2074 - 2086.
- [6] R.A. Harshman, "Foundations of the PARAFAC procedure : Model and conditions for an "explanatory" multi-mode factor analysis", *UCLA Working Papers in Phonetics*, 16 (1970), pp.1 - 84.
- [7] Harry L. Van Trees and Kristine L. Bell, *Bayesian Bounds for Parameter Estimation and Nonlinear Filtering and Tracking*, Wiley/IEEE Press, June 2007.
- [8] J.M. Mendel, "Tutorial on higher-order statistics (spectra) in signal processing and system theory : theoretical results and some applications", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 79, Issue 3, Mar 1991 Pp.278 - 305