

# Méthode de détection de contours utilisant l'Algèbre Géométrique $\mathcal{G}_3$

Patrice DENIS, Philippe CARRÉ

Laboratoire Signal Images et Communication

Bât SP2MI, Téléport 2, Bd Marie et Pierre Curie, B.P. 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France

denis@sic.sp2mi.univ-poitiers.fr, carre@sic.sp2mi.univ-poitiers.fr

**Résumé** – Les algèbres géométriques aussi appelées algèbres de Clifford ont été introduites afin de pouvoir manipuler des objets géométriques aux moyens d'opérations algébriques. En utilisant ce formalisme il est possible d'appliquer des opérations géométriques définies comme entités de l'algèbre sur des objets étant des entités distinctes des opérations mais incluses également dans l'algèbre. L'objet de ce papier est de présenter une nouvelle application des algèbres géométriques en les utilisant pour le traitement des images en couleur. Nous appliquons notamment l'étude à la détection de contours des images en couleur par un filtrage spatial dans  $\mathcal{G}_3$ . Le filtrage proposé analyse les images directement dans l'espace RVB en définissant par des opérations géométriques des variations de saturation et d'intensité. Ces variations permettent de produire un gradient couleur performant qui par seuillage met en évidence des contours couleur d'une image.

**Abstract** – Geometric Algebras, also known as Clifford Algebras are used to manipulate geometric objects with algebraic operations. With this formalism geometric operations applied on objects and objects themselves are distinct entities of the algebra. This paper presents a new application to geometric algebras using them to colour image processing. A convolution filter defined in  $\mathcal{G}_3$  allows to detect edges in colour images. The filtering operation uses geometric operations directly from RGB colour space to detect saturation and intensity variations. These variations are merged in order to characterize a colour gradient. At last a thresholding on this gradient enables to show the colour edges of an image.

## 1 Présentation de l'algèbre géométrique $\mathcal{G}_3$

Une algèbre géométrique correspond à l'extension d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  à un espace vectoriel de dimension  $2^n$ , noté  $\mathcal{G}_n$ , composé de multivecteurs. Les multivecteurs sont obtenus grâce à l'utilisation du produit externe des éléments de base de l'espace vectoriel  $E$ . Un multivecteur est l'extension à une dimension supérieure de la notion que nous avons des vecteurs. Nous nous limiterons à l'étude de l'algèbre  $\mathcal{G}_3$  dont une base peut-être obtenue par produits externes des vecteurs de la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  et en y ajoutant un scalaire  $e_0$  [1, 3, 6]. Cette base contient donc le scalaire  $e_0$ , les vecteurs  $e_1, e_2$  et  $e_3$ , les bivecteurs (ou 2-vecteurs)  $e_{23}, e_{31}$  et  $e_{12}$ , et le trivecteur  $e_{123}$ .

On obtient alors un élément de  $\mathcal{G}_3$  par combinaison linéaire de ces éléments :

$$A = A_0e_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3 + A_{23}e_{23} + A_{31}e_{31} + A_{12}e_{12} + A_{123}e_{123} \text{ avec } A_i \in \mathbb{R}$$

La partie k-vectorielle d'un multivecteur  $\mathbf{M}$  est donnée par l'opérateur de grade, noté  $\langle M \rangle_k$ , ainsi la partie bivectorielle (ou 2-vectorielle) du multivecteur  $\mathbf{M} = 2e_1 + e_{23} - 3e_{31} + e_{123}$  est égale à  $\langle M \rangle_2 = e_{23} - 3e_{31}$ .

On propose de représenter une image couleur de dimension  $N \times M$  avec  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  et  $f_3(x, y)$  les trois composantes d'un espace couleur par  $\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f_1(x, y)e_1 + f_2(x, y)e_2 + f_3(x, y)e_3$ . Par exemple dans l'espace RVB

l'image sera décrite par les trois composantes rouge, verte et bleue.

Expliquons maintenant les différents produits de l'algèbre géométrique :

- Le produit externe (ou extérieur), noté «  $\wedge$  », permet de caractériser les sous-espaces vectoriels générés par une famille libre de k-vecteurs. Par exemple en multipliant deux vecteurs indépendants  $\alpha e_1$  et  $\beta e_2$  par produit externe on obtient un bivecteur  $\alpha\beta e_{12}$ . Si on multiplie encore par produit externe ce bivecteur par le vecteur indépendant  $e_3$  on obtiendra un trivecteur  $\alpha\beta e_{123}$ .
- Le produit interne (ou contraction à gauche), noté «  $\rfloor$  », correspond à la généralisation à l'ensemble des multivecteurs de la notion d'orthogonalité que nous avons du produit scalaire avec les vecteurs. En effet si deux k-vecteurs sont orthogonaux, leur produit interne est nul.
- Le produit scalaire, noté «  $\cdot$  », nous permet d'avoir une notion de distance ou de norme.
- On définit le produit géométrique pour des vecteurs comme la somme du produit scalaire et du produit extérieur :  $xy = x \cdot y + x \wedge y$  avec  $x, y \in \mathcal{G}_3$ . On remarquera que lorsque deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  sont orthogonaux leur produit scalaire est nul et donc leur produit géométrique équivaut à leur produit externe. En généralisant, le produit géométrique de deux k-vecteurs est la somme de leur produit interne avec leur produit externe :  $xy = x \rfloor y + x \wedge y$ . Les différents

produits entre les éléments de la base de  $\mathcal{G}_3$  sont non commutatifs par exemple  $e_1e_2 = e_{12} = -e_2e_1$ .

Nous allons ici définir quelques notions supplémentaires nécessaires à la définition des opérations géométriques sur les vecteurs que nous verrons juste après.

Posons  $\mathbf{A}$  un multivecteur de  $\mathcal{G}_3$ .

– La réversion de  $\mathbf{A}$ , notée  $\tilde{\mathbf{A}}$  est définie par  $\tilde{\mathbf{A}} = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 - \langle A \rangle_2 - \langle A \rangle_3$ . Nous en avons besoin pour définir la norme et l'inverse.

– La norme ou le module d'un multivecteur  $\mathbf{A}$  est définie par le produit scalaire de  $\mathbf{A}$  par sa réversion :

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{A}} = \sqrt{\langle A\tilde{A} \rangle_0}$$

Si maintenant  $\mathbf{B} \in \mathcal{G}_3$  est le produit géométrique de  $n$  1-vecteurs ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $\mathbf{B}$  est appelé un verseur.

– Tout verseur possède un inverse ce qui signifie que pour tout  $\mathbf{B}$ , il existe un  $\mathbf{B}^{-1}$  vérifiant  $\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = 1$ ; l'inverse  $\mathbf{B}^{-1}$  de  $\mathbf{B}$  vaut  $\frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}}$ .

– A noter donc que chaque multivecteur n'est pas inversible (il faut qu'il soit un verseur).

Comme nous utilisons des vecteurs pour coder l'information couleur des images nous pouvons utiliser les transformations géométriques disponibles avec l'algèbre  $\mathcal{G}_3$  pour manipuler ces vecteurs (cf. Figure 1). Nous nous servirons notamment de la réflexion d'axe, de la projection ainsi que de la réjection dans le calcul du gradient couleur proposé par la suite.

Ainsi la translation de  $v_1$  par  $v_2$  est donnée par leur somme  $v_t = v_1 + v_2$  avec  $(v_1, v_2)$  1-vecteurs de  $\mathcal{G}_3$ , la projection  $v_1$  sur  $v_2$  est donnée par  $v_{||} = (v_1]v_2)v_2^{-1}$ , la réjection de  $v_1$  par rapport à  $v_2$  est donnée par  $v_{\perp} = (v_1 \wedge v_2)v_2^{-1}$  et enfin la réflexion  $v_r$  de  $v_1$  par rapport à  $v_2$  est donnée par  $v_r = v_2v_1v_2^{-1}$ .

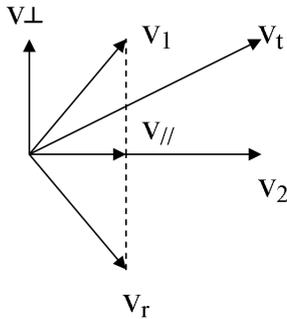


FIG. 1 – Transformations géométriques de bases à partir de deux 1-vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  de  $\mathcal{G}_3$  :  $v_t$  est la translation du vecteur  $v_1$  par  $v_2$ ;  $v_{||}$  est la projection de  $v_1$  sur  $v_2$ ;  $v_{\perp}$  est la réjection de  $v_1$  par rapport à  $v_2$  et  $v_r$  est la réflexion de  $v_1$  par rapport à  $v_2$

## 2 Détecteur de contours

Nous proposons d'appliquer les opérations géométriques étudiées sur des vecteurs dans l'algèbre  $\mathcal{G}_3$  afin de définir un traitement d'image couleur par filtrage convolutif. Le produit de convolution et la transformée de Fourier utilisant les algèbres géométriques sont définis dans [4]. Fels-

berg [5] utilise les algèbres géométriques pour caractériser les variations d'intensité locales par une analyse 2D sur des images en niveaux de gris. Schlemmer [8] décompose les images couleur dans l'espace LUV puis effectue un détecteur de contours : il utilise un gradient classique sur la luminance qu'il combine à un gradient « 2D » sur le plan UV. Ce deuxième gradient est obtenu en utilisant l'algèbre géométrique  $\mathcal{G}_2$  appliquée à la théorie des champs de vecteurs 2D.

Nous proposons d'utiliser l'information géométrique de l'espace couleur dans lequel nous travaillons à savoir l'espace RVB. Une première approche a été donnée dans [2] en utilisant le formalisme des quaternions, complétant le travail de Sangwine [7]. Le filtrage de Sangwine donne l'image résultat suivante et est illustré dans la Figure 4a.

$$f'(x, y) = \sum_{\tau_1=-n_1}^{n_1} \sum_{\tau_2=-m_1}^{m_1} l(\tau_1, \tau_2) f((x-\tau_1)(y-\tau_2)) r(\tau_1, \tau_2)$$

avec le jeu de filtres suivants :

$$l = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 1 & 0 & \mu \\ 1 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad r = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \bar{\mu} \\ 1 & 0 & \bar{\mu} \\ 1 & 0 & \bar{\mu} \end{bmatrix}$$

pour une direction horizontale et avec  $\mu$  le 1-vecteur associé à l'axe des gris.

Ce filtrage repose sur une réflexion d'axe  $\mu$  (quaternion représentant l'axe des niveaux de gris) d'un vecteur  $q_1$  par l'opération  $\mu q_1 \bar{\mu}$ , avec  $\bar{\mu}$  le conjugué de  $\mu$  [2, 7]. On compare alors le vecteur  $q_1$  avec le vecteur  $q_2$  en additionnant  $q_2$  et la réflexion de  $q_1$  par rapport à  $\mu$ . Pour deux couleurs proches, le vecteur somme n'est pas éloigné de  $\mu$  ce qui est le cas du vecteur somme  $q_4 + \mu q_3 \bar{\mu}$  de la Figure 2. Au contraire, lorsque deux couleurs sont éloignées le vecteur somme, résultat du filtrage de Sangwine, se situe beaucoup plus loin de l'axe des gris comme nous le montre le vecteur  $q_2 + \mu q_1 \bar{\mu}$  de la Figure 2.

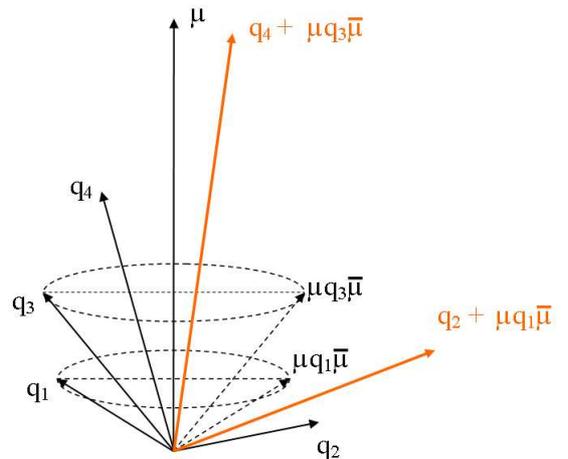


FIG. 2 – Schéma du détecteur de contours de Sangwine.

L'image résultat du filtrage de Sangwine est composée de ces vecteurs somme, et sera donc grise sur les régions homogènes tandis que les contours apparaîtront en couleur (cf. Figure 3).

Le principal problème de cette approche réside dans le fait qu'une simple permutation des coefficients dans les filtres modifie les résultats (on permute tous les 1 avec les  $\mu$  dans le premier filtre et avec les  $\bar{\mu}$  dans le deuxième). En effet comme nous le remarquons sur la deuxième ligne de la Figure 3 même si la direction du filtrage n'est pas altérée par cette permutation, les contours détectés apparaissent avec des couleurs différentes. Ceci est dû à la différence des opérations géométriques effectuées sur les vecteurs couleur, en effet on applique soit la réflexion sur le premier vecteur, soit sur le second (Par exemple  $q_2 + \mu q_1 \bar{\mu} \neq q_1 + \mu q_2 \bar{\mu}$ ).

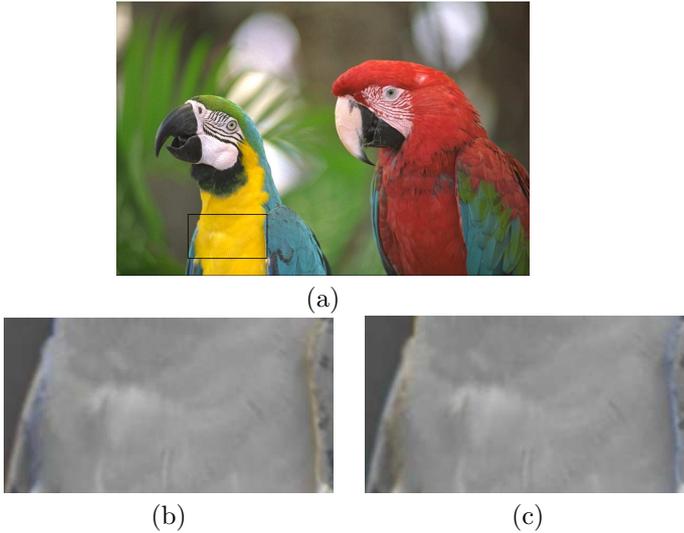


FIG. 3 – Filtrage de Sangwine : 1<sup>re</sup> ligne image originale ; 2<sup>ème</sup> ligne zooms des résultats d'un filtrage de Sangwine dans la partie encadrée du dessus. La définition du jeu de filtres donne deux images résultats différentes pour la même direction horizontale.

Cette méthode a ensuite été reformulée au moyen de l'algèbre  $\mathcal{G}_3$  pour améliorer ces résultats. Nous proposons de calculer la distance du vecteur somme par rapport à l'axe des gris :  $S_1 = |(v_{sum_1} \wedge \mu)\mu^{-1}| = |(v_{sum_2} \wedge \mu)\mu^{-1}|$  avec  $v_{sum_1} = v_2 + \mu v_1 \mu^{-1}$  et  $v_{sum_2} = v_1 + \mu v_2 \mu^{-1}$ . La saturation d'une couleur correspond exactement à cette distance. Un gradient de saturation final est obtenu par le maximum des gradients directionnels obtenus par passages sur les directions horizontales, verticales et diagonales du filtre. L'avantage de cette méthode réside dans le fait que le sens d'application du filtre (de gauche à droite ou inversement) n'a pas d'influence contrairement à la méthode de Sangwine. Dans la Figure 4 la distance  $S_1$  est la même pour les vecteurs somme  $v_2 + \mu v_1 \mu^{-1}$  ou  $v_1 + \mu v_2 \mu^{-1}$ . De plus l'image résultat obtenue est de type gradient contrairement à celle obtenue par la méthode de Sangwine.

Cependant cette méthode a l'inconvénient de ne pas prendre en compte l'information achromatique. En effet lorsque l'information d'un pixel n'est que de type intensité, notre méthode donne la distance par rapport aux niveaux de gris qui est nulle.

Pour l'améliorer, nous proposons d'utiliser les algèbres géométriques afin d'apporter une description géométrique

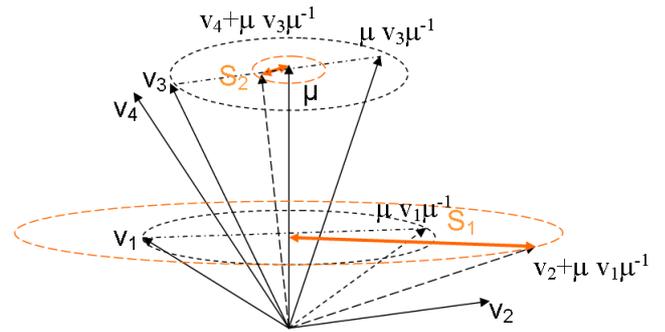


FIG. 4 – Schéma du gradient de saturation ; Le résultat de la méthode de Sangwine donne un vecteur couleur là où notre approche définit un gradient de saturation (flèches oranges).

des couleurs par rapport à l'axe achromatique des niveaux de gris. Cette description géométrique est définie par le produit géométrique suivant :  $f(x, y)\mu$ , elle se décompose en une somme de deux parties.

La première,  $f(x, y) \wedge \mu$ , est le produit vectoriel du pixel analysé avec l'axe des gris, c'est le bivecteur représenté par le plan porté par les vecteurs couleur  $f(x, y)$  et  $\mu$ . Autrement dit ce plan décrit toutes les couleurs ayant la même teinte que  $f(x, y)$  mais dont l'intensité et la saturation peuvent varier. Lorsque la norme de cette partie est nulle, le vecteur couleur analysé est colinéaire à  $\mu$  c'est à dire qu'il est porté par l'axe des niveaux de gris.

La deuxième partie,  $f(x, y) \rfloor \mu$ , est un scalaire correspondant à la projection du vecteur couleur  $f(x, y)$  sur l'axe  $\mu$ , autrement dit, son intensité.

Pour tous les pixels de l'image, nous effectuons donc ce produit géométrique  $f(x, y)\mu$ . Nous séparons du résultat les parties scalaire et bivectorielle. Nous calculons la norme de la partie bivectorielle et construisons un masque booléen par seuillage par rapport à sa valeur maximale. Là où la norme est supérieure au seuil le masque est initialisé à FAUX, et dans le cas contraire il est initialisé à VRAI. Ensuite, nous effectuons un filtrage de Sobel sur la partie scalaire pour obtenir un gradient d'intensité. Le masque défini précédemment nous permet de conserver l'information de gradient d'intensité qui nous intéresse c'est à dire lorsque l'information du pixel est plutôt achromatique. Nous normalisons les gradients de saturation et d'intensité pour finalement les fusionner. Nous obtenons un gradient couleur qui détecte aussi les différences de niveaux de gris.

Nous n'avons pas comparé nos résultats aux moyens de méthodes d'évaluation quantitative, comme la perception des couleurs dépend du système visuel humain notamment la comparaison n'est pas immédiate. De plus, appliquer directement des méthodes d'évaluation quantitative définies pour des images en niveaux de gris n'est pas forcément idéal du fait de la nature vectorielle des couleurs. L'idée de ce papier étant plutôt d'introduire une première approche d'un détecteur de contour couleur en utilisant les algèbres géométriques, une comparaison plus approfondie dans des travaux ultérieurs est prévue. Les résultats sont

illustrés dans la Figure 5. Le gradient couleur de la maison (a), resp. les parrots (e), est donné en (b), resp. en (f). Les cartes de contours c et g (resp. d et h) sont obtenues par seuillage de notre gradient final (resp. du gradient de saturation). Nous remarquons que les détails de la fenêtre apparaissent nettement plus clairement avec la prise en compte de l'intensité dans (c) que sans dans (d). De même, d'autres détails se distinguent avec le nouveau modèle comme les dessous de toit et les gouttières. Pour les parrots (g) et (h) la différence est encore plus visible car l'image contient des parties très achromatiques notamment les deux taches blanchâtres au dessus des deux parrots, ainsi que les détails de la tête de celui de gauche.

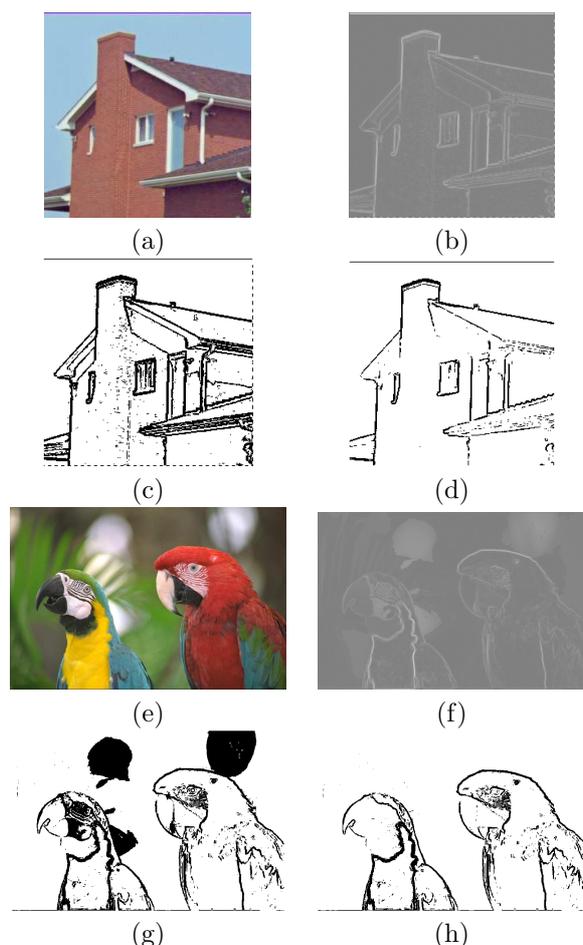


FIG. 5 – Exemples du gradient couleur : images maison (a) et parrots (e); résultats des gradients couleur par notre méthode (b) et (f) (rehaussement de luminosité pour plus de visibilité); différence entre un seuillage effectué sur notre gradient couleur et celui n'utilisant pas l'information achromatique : (c) et (d) pour la maison et (g) et (h) pour les parrots.

Pour conclure, nous avons proposé une méthode originale de traitement d'image couleur qui utilise l'algèbre géométrique  $\mathcal{G}_3$ . L'intérêt d'utiliser ce formalisme réside dans la manipulation géométrique au moyen d'opérations algébriques des couleurs considérées comme des vecteurs. Le produit géométrique utilisé notamment dans la dernière partie de la construction de notre gradient permet de comparer de manière géométrique l'ensemble des pixels

de l'image. Si pour les besoins de notre algorithme la comparaison a été faite par rapport à l'axe des niveaux de gris, il est tout à fait possible d'envisager une comparaison des pixels de l'image avec d'autres vecteurs couleurs pour définir de nouvelles opérations couleur. En travaillant directement à partir d'images RVB, il a été possible de définir un gradient couleur utilisant des mesures de saturation et d'intensité grâce à des opérations géométriques. Les algèbres géométriques ne se limitant pas à trois dimensions, l'extension de ce type de filtrage géométrique à des dimensions supérieures pour analyser les images multispectrales des satellites est en cours.

Les auteurs remercient la Région Poitou-Charentes pour son soutien financier.

## Références

- [1] S. Charneau, Algèbre Géométrique et Lancer de Rayons, Mémoire de DEA de l'Université de Poitiers, Juin 2004.
- [2] P. Denis, P. Carré and C. Fernandez-Maloigne, Spatial and spectral Quaternionic approaches for Colour Images, in *Computer Vision and Image Understanding*, In Press, vol.107, pp.74–84, 2007.
- [3] L. Dorst and S. Mann, Geometric algebra :a computational framework for geometrical applications (part I :algebra), in *Computer Graphics and Applications, IEEE*, vol.22,3, pp. 24–31, May/June 2002.
- [4] J. Ebling and G. Scheuermann, Clifford Fourier transform on vector fields, in *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 11,4, pp. 469–479, July/August 2005.
- [5] M. Felsberg, Low Level Image Processing with the Structure Multivector , PhD Thesis, March 2002.
- [6] D. Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics : Fundamental Theories of Physics* : Kluwer Academic Publishers, 2nd edition, 1999.
- [7] S. J. Sangwine, Colour image edge detector based on quaternion convolution, in *Electronics Letters*, vol. 34,10, pp. 969–971, May 14 1998.
- [8] M. Schlemmer, H. Hagens, I. Hotz and B. Hamann, Clifford Pattern Matching for Color Image Edge Detection, in *Visualization of Large and Unstructured Data Sets, GI-Edition Lecture Notes in Informatics*, vol. S-4, pp. 47–58, Oct. 2006.