

# Surface Active Statistique :

## Optimisation de la topologie d'une surface définie par interpolation linéaire sur un maillage triangulaire utilisant la minimisation de la complexité stochastique

Nicolas BERTAUX

Institut Fresnel - URM 6133 - Équipe Physique et Traitement de l'Image - Marseille  
 École Centrale de Marseille - Marseille  
 nicolas.bertaux@fresnel.fr

**Résumé** — L'algorithme présenté permet une estimation rapide de la valeur moyenne d'images fortement bruitées mettant en oeuvre une surface maillée et une technique de MCS ne nécessitant aucun paramètre à régler dans le critère à minimiser.

**Abstract** — We present an algorithm which allows one to obtain a fast estimation of mean value of strong noisy images. The mean value image is modeled by linear lattice surface which is optimized by SCM without parameters to be tuned by user.

La quasi-totalité des méthodes de traitement d'images, qu'il s'agisse de restauration, segmentation, détection ou estimation, utilise naturellement des hypothèses concernant les images à traiter. Par exemple, des modélisations des variations des niveaux de gris, sur la corrélation des pixels ou sur le type de bruit présent dans l'image, sont introduits afin de tirer au mieux parti de l'information contenue dans l'image.

Dans le but de limiter la complexité des algorithmes, de nombreuses méthodes de traitement d'image font l'hypothèse que les niveaux de gris moyens présents dans l'image à traiter peuvent être décrits par une fonction constante par morceaux. C'est-à-dire que tous les pixels de l'image peuvent être regroupés en régions plus ou moins grandes, les niveaux de gris de chaque région étant alors considérés comme aléatoires et décrits par une densité de probabilité (ddp) donnée, dont le paramètre de moyenne est identique pour tous les pixels de la région. Les méthodes qui découlent de cette hypothèse, peuvent présenter des performances optimales tant que les données suivent le modèle supposé. Plus ou moins robustes à une inadéquation de modèle, les performances baissent à mesure que l'écart au modèle croît (sur-segmentation, taux de fausse alarme en augmentation, qualité de restauration ou estimation, etc).

Le but de ces travaux est de considérer une modélisation des niveaux de gris plus générale, permettant de tenir compte plus finement, qu'un modèle d'hypothèse uniforme, des variations des niveaux de gris. Pour cela on s'intéressera au cas d'un modèle continu, linéaire par morceaux décrit par un maillage à mailles triangulaires.

Dans le but par exemple de réaliser une opération de débruitage, c'est-à-dire la possibilité de déterminer la valeur moyenne de l'image observée, on constate que la solution proposée par l'estimation au sens du maximum de vraisemblance (MV) du maillage triangulaire fournit une

voie de recherche intéressante [1].

Il est aisé de constater que la volonté d'obtenir une estimation de la valeur moyenne d'une image bruitée à partir d'un maillage régulier conduit à un compromis. En effet, l'emploi de larges mailles favorise évidemment le lissage de la solution alors qu'il nuit fortement à la restitution des détails. Inversement, la solution consistant à employer de petites mailles permet de garder les détails de l'image, mais dans ce cas la solution obtenue lisse moins les fluctuations du bruit.

Une solution proposée dans [1] consiste à employer des mailles relativement petites d'une part et d'ajouter une contrainte de régularité sur les lignes de niveaux de la solution recherchée d'autre part. Les résultats obtenus sont satisfaisants, mais les solutions sont par nature dépendantes des valeurs des différents paramètres liées aux termes de contraintes.

La solution proposée dans ce papier permet d'aboutir, sans paramètre à régler dans le critère à optimiser, à un maillage dont la topologie est adaptée aux détails de l'image tout en tenant compte du bruit. Le but est d'obtenir des mailles de grandes dimensions et des arêtes placées telles qu'elles puissent décrire les détails le plus fidèlement possible.

## 1 Complexité Stochastique

Le principe de minimisation de la complexité stochastique<sup>1</sup> (MCS) introduit par Rissanen [2] est une voie intéressante pour répondre au problème difficile qu'est l'estimation de l'ordre de modèle. En effet, le principe de la MCS a par exemple été mis en oeuvre dans le cadre de la segmentation d'images en deux régions homogènes [3, 4] et

<sup>1</sup>Principe aussi connu sous le nom de MDL (Minimum Description Length)

plus récemment dans le cas du partitionnement automatique d'images en zones homogènes [5]. Tous ces travaux, de part leurs résultats, ont mis en avant le potentiel de cette méthode issue de la théorie de l'information.

Le critère de complexité stochastique correspond à la longueur de code en nats ( $1 \text{ nat} = \log(2) \text{ bits}$ ) nécessaire pour coder sans perte l'image observée  $\mathbf{X} = \{x(\mathbf{n})\}$  pour une modélisation donnée.  $x(\mathbf{n})$  étant la valeur au pixel  $\mathbf{n}$  de  $\mathbf{X}$ . Cette longueur de code s'écrit sous forme de deux termes principaux :

$$\Delta = \Delta_{\text{Niveaux de gris}}(\boldsymbol{\theta}, T) + \Delta_{\text{Modèle}}(T). \quad (1)$$

Le terme  $\Delta_{\text{Niveaux de gris}}$  correspond à la longueur de code nécessaire pour coder tous les niveaux de gris  $x(\mathbf{n})$  des pixels de l'image. Ces niveaux de gris sont considérés comme des variables aléatoires indépendantes de densité de probabilité fixée et de moyenne, en chaque pixel, donnée par  $s(\mathbf{n}; \boldsymbol{\theta}, T)$ . Ce modèle d'image  $\mathbf{S}(\mathbf{n}; \boldsymbol{\theta}, T) = \{s(\mathbf{n}; \boldsymbol{\theta}, T)\}$  fait correspondre en chaque pixel  $\mathbf{n}$  une interpolation linéaire entre les noeuds d'un maillage triangulaire de topologie  $T$  (position des noeuds et connexion entre les noeuds, cf. Fig.1) et dont les valeurs nodales (altitude du noeud considéré, cf. Fig.2d) sont définies par le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$ . Le terme  $\Delta_{\text{Modèle}}$  correspond à la longueur de code nécessaire pour coder le modèle  $\mathbf{S}$ . Ce terme de codage se décompose lui-même en plusieurs termes correspondant au codage de la topologie et au codage des valeurs nodales. Comme nous le verrons dans la section suivante, ce dernier terme ne dépend que de la topologie  $T$ .

## 2 Termes de codage

### 2.1 Codage des niveaux de gris

Dans le cadre de ce papier, les valeurs en niveaux de gris des pixels sont supposées indépendantes et suivent une loi de ddp connue et identique sur toute la surface de l'image:

$$P(x(\mathbf{n})|s(\mathbf{n}; \boldsymbol{\theta}, T), \boldsymbol{\eta}),$$

où  $\boldsymbol{\eta}$  représente les paramètres de la loi de probabilité autre que la moyenne  $s$ .

Ainsi sous ces hypothèses, la quantité d'information (exprimée en nats) nécessaire pour coder les niveaux de gris  $x(\mathbf{n})$  de tous les pixels supposés indépendants est égale à:

$$\Delta_{\text{Niveaux de gris}}(\boldsymbol{\theta}, T) = - \sum_{\mathbf{n} \in \text{image}} \log(P(x(\mathbf{n})|s(\mathbf{n}; \boldsymbol{\theta}, T), \boldsymbol{\eta})),$$

qui correspond à l'opposée de la log-vraisemblance de  $\mathbf{X}$ .

### 2.2 Codage du maillage

Nous considérons dans cette section le codage d'un maillage triangulaire pouvant être de topologie totalement arbitraire. Pour coder ce type de maillage il est nécessaire de coder les positions  $(i, j)$  des noeuds du maillage ainsi que toutes les arêtes reliant les noeuds. Pour finir il faudra coder les valeurs nodales de chaque noeud.

Nous présentons dans cette partie un codage de maillage de topologie quelconque demandant une longueur de

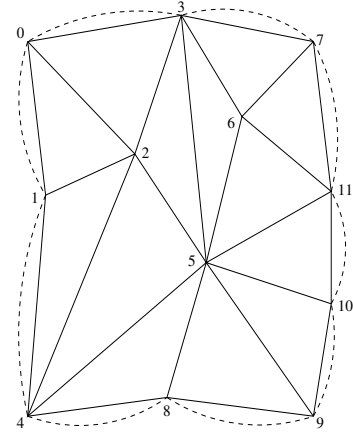


FIG. 1: Exemple de maillage défini par le tableau de topologie 1 comportant  $M=12$  noeuds,  $S=33$  segments

TAB. 1: Exemple de tableau de topologie

0	(0,0)	<u>1</u> <u>2</u> <u>3</u> <u>0</u>
1	(40,5)	<u>4</u> <u>2</u> 0 1
2	(30,30)	0 1 4 <u>5</u> <u>3</u> 0
3	(-10,40)	0 2 5 <u>6</u> <u>7</u> <u>3</u>
4	(100,0)	<u>8</u> <u>5</u> 2 1 4
5	(60,50)	2 4 8 <u>9</u> <u>10</u> <u>11</u> <u>6</u> <u>3</u> 2
6	(20,60)	3 5 11 <u>7</u> 3
7	(0,80)	3 6 11 <u>7</u>
8	(90,40)	<u>9</u> 5 4 8
9	(100,80)	<u>10</u> 5 8 9
10	(70,85)	<u>11</u> 5 9 10
11	(40,85)	7 6 5 10 11

codage faible (sans être le codage de longueur minimum) et permettant d'aboutir à des résultats satisfaisants. Rappelons tout d'abord que ce que nous cherchons ici n'est pas la détermination du codage lui-même mais un moyen de calculer la longueur du codage minimale.

La topologie d'un maillage triangulaire peut être décrite par un tableau de topologie défini par des règles simples. Chaque ligne du tableau correspond à la description du polygone de voisinage du noeud numéro de la ligne, où les noeuds du polygone sont donnés dans l'ordre trigonométrique. Chaque polygone de voisinage d'un noeud du bord du maillage commence par un noeud du bord du maillage et finit par le noeud numéro de la ligne. Chaque polygone d'un noeud intérieur au maillage finit par le premier noeud utilisé pour définir ce polygone.

Avec ces règles élémentaires toute topologie de maillage à mailles triangulaires peut-être représentée et ceci pour n'importe quelle numérotation des noeuds du maillage. Pour obtenir un codage plus simple du tableau de topologie, nous choisissons la numérotation permettant d'aboutir à une liste des noeuds, de première apparition dans le tableau de topologie, dans l'ordre lexicographique. Un tel exemple de maillage est proposé en figure 1 avec le tableau de topologie correspondant tab.1. Dans la figure 1 les liaisons en pointillés correspondent aux segments permettant de définir les bords du maillage.

Les noeuds soulignés dans le tableau 1 sont ceux qui doivent être fournis pour reconstruire le tableau de topologie, ainsi que leurs coordonnées lors de leur première apparition (numéro de ligne ou noeud d'un polygone).

La reconstruction du tableau de topologie s'obtient en constatant que l'information apportée par un nouveau noeud donné dans l'ordre trigonométrique fournit 2 segments. Le premier connectant le noeud numéro de la ligne et ce nouveau noeud, et le second connectant le nouveau noeud et son précédent dans la ligne en cours de construction. L'information apportée par un noeud déjà présent correspond à 1 segment connectant le noeud fourni et son précédent dans la ligne, ou le noeud numéro de la ligne lorsqu'il est en début de ligne.

Les autres connexions peuvent être retrouvées par la connaissance de la partie supérieure du tableau de topologie, celle déjà reconstruite. C'est le principe du codage proposé, les noeuds soulignés dans le tableau de topologie 1 fournissent les informations ne pouvant être automatiquement retrouvées dans la partie du tableau déjà reconstruite.

Ainsi le codage permettant la reconstruction du tableau de topologie 1, en utilisant les coordonnées  $(i, j)$  et les numéros des noeuds, correspond aux informations suivantes :

{ 0(0,0), 1(40,5), 2(30,30), 3(-10,40), 0, 4(100,0), 2, 5(60,50), 3, 6(20,60), 7(0,80), 3, 8(90,40), 5, 9(100,80), 10(70,85), 11(40,85), 6, 7, 7, 9, 10, 11. }

En utilisant une représentation relative par rapport au noeud numéro de la ligne et en constatant que la numérotation des noeuds codés en position est superflue, le tableau de topologie tab.1 peut-être reconstruit à partir de la liste d'informations suivante :

{ (0,0), (40,5), (30,30), (-10,40), 0, (100,0), 1, (60,50), 1, (20,60), (0,80), 0, (90,40), 1, (100,80), (70,85), (40,85), 1, 1, 0, 1, 1, 1. }

Finalement, pour coder un maillage triangulaire de topologie quelconque, avec la méthode présentée précédemment, il faut coder la dernière liste. Pour expliciter son codage, qui fait apparaître à la fois des coordonnées et des numéros de noeuds, nous la séparons en 3 listes:

La première fournit les coordonnées de chaque noeuds du maillage :

Pos={ 0,0, 40,5, 30,30, -10,40, 100,0, 60,50, 20,60, 0,80, 90,40, 100,80, 70,85, 40,85 }

La seconde liste correspond aux numéros des noeuds (donnés en relatif par rapport au numéro du noeud de la ligne): Num={ 0, 1, 1, 0, 1, 1,1,0,1,1,1 }.

La dernière liste permet de déterminer si l'information sur le noeud doit être choisie parmi la première (Pos) ou la deuxième liste (Num):

Clk={ 11110101011010111000000 }

La liste (Pos) fournit les coordonnées du noeud départ ainsi que des  $M - 1$  noeuds restant et fournit ainsi  $2 * (M - 1)$  segments du maillage. Il reste alors  $S - 2 * (M - 1)$  segments à fournir en codant  $Card(Num) = S - 2 * (M - 1)$  numéros de noeud relativement par rapport au numéro de ligne. Remarquons ici, que ce codage relatif sur les numéros n'implique que des valeurs positives ou nulles (ici 0 ou 1) car les lignes du tableau de topologie

sont reconstruites dans l'ordre lexicographique. En effet, si une connexion est inconnue, nécessitant ainsi l'envoi d'un numéro de noeud elle ne peut pas faire intervenir un numéro de noeud inférieure au numéro de la ligne, car dans ce cas la connexion aurait été déjà réalisée dans la ligne numéro du noeud et ne serait donc pas inconnue.

L'information concernant les bords du maillage est automatiquement connue pour de nombreux noeuds du bord du maillage, en effet par exemple un noeud nouveau fourni en début de ligne est par définition un noeud du bord. Notons que dans l'exemple utilisé dans l'article aucune information supplémentaire est nécessaire pour déterminer les bords du maillage. Pour ne pas alourdir le codage nous nous limiterons ici à des maillages inscrits dans un rectangle, ainsi les coordonnées renseignent aussi sur la localisation par rapport aux bords. Cette dernière remarque permet de constater que le codage proposé dans ce papier ne peut pas être le codage de longueur minimum puisqu'il y a redondance d'information.

Pour obtenir une approximation de la longueur de code nécessaire pour coder la topologie du maillage, nous proposons d'utiliser la longueur moyenne des codes entropiques pour le codage des positions et des numéros des noeuds.

Pour faciliter la présentation du codage de la topologie du maillage nous avons utilisé les coordonnées absolues  $(i, j)$  pour exprimer les positions des noeuds. Un nouveau noeud ne pouvant pas se retrouver n'importe où, il est classique de le localiser par rapport à une zone du maillage proche et déjà reconstruite. Pour cela nous localiserons un nouveau noeud par l'intersection de deux cercles centrés l'un sur le noeud numéro de la ligne et le second (ce rayon valant zéro pour un noeud du bord supposé rectangle) son précédent dans la ligne en cours de construction.

Nous considérons une loi de probabilité exponentielle pour le codage moyen des rayons des cercles. Ainsi la longueur de code nécessaire pour le codage des positions des noeuds et d'une partie de la topologie maillage est :

$$\Delta_{Pos} = 2(M - 1) \times (1 + \log(\hat{\rho})) + \frac{1}{2} \log(M) \quad (2)$$

où  $\hat{\rho}$  représente la valeur moyenne des longueurs des segments du maillage.

La loi de probabilité des éléments de la liste (Num) est complexe. Elle est extrêmement picquée en 1 et ne correspond pas à une loi standard. L'utilisation de l'entropie de Shannon comme longueur de code moyenne fournit une longueur de code moyenne faible et inférieure à 1 nat. Afin de simplifier le calcul des termes de codage nous proposons de majorer la longueur de code moyenne nécessaire pour coder un élément de la liste (Num).

Ainsi la longueur de code minimum considéré pour le codage de la liste (Num) est :

$$\Delta_{Num} = (S - 2M + 2) \times \log(2) \quad (3)$$

La dernière liste (Clk) ne comporte que des 0 et des 1 dont nous connaissons la proportion. En effet il y a  $M$  valeurs à 1 (nombre de noeuds) et  $S - 2M + 2$  valeurs à 0 pour un total de  $S - M + 2$  éléments. La longueur de code pour la liste (Clk) est :

$$\Delta_{Clk} = -(M \log(M/(S - M + 2)) + (S - 2M + 2) \log((S - 2M + 2)/(S - M + 2))). \quad (4)$$

Le dernier terme intervenant dans la longueur de code nécessaire pour représenter le maillage correspond au codage des valeurs nodales. Nous considérons la longueur de codage proposé par Rissanen [6]. Cette longueur de code ne fait intervenir que le nombre de données intervenant dans le calcul du paramètre. Nous approximerons ici ce nombre de données au nombre de pixels  $N_{Poly}(m)$  contenus dans le polygone entourant le noeud considéré ( $m$ ). Cette longueur de code a pour expression :

$$\Delta_{\text{Param}} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \log(N_{Poly}(m)) \quad (5)$$

Finalement, la longueur de code minimale représentant le maillage pour une topologie fixée correspond à :

$$\Delta_{\text{Modèle}} = \Delta_{\text{Pos}} + \Delta_{\text{Num}} + \Delta_{\text{Clk}} + \Delta_{\text{Param}} \quad (6)$$

Notons que ce terme de codage du modèle ainsi que le terme de codage des niveaux de gris ne présentent aucun paramètre à régler. Le critère de MCS ne dépend pas de l'image considérée.

### 3 Optimisation de la topologie

Pour déterminer la valeur moyenne  $S$  au sens de la MCS, il faut minimiser le critère (1). Les paramètres de la ddp  $\boldsymbol{\eta}$  (variance, ordre, etc) sont supposés connus ou aisément calculable en fonction de  $T$ .

Afin d'éliminer le jeu de paramètres  $\boldsymbol{\theta}$  nous le remplaçons par son estimée au sens du maximum de vraisemblance pour une topologie fixée (qui correspond à l'estimée au sens de la MCS) :  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MV}(T) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{MCS}(T)$ . L'estimation rapide de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MV}(T)$  est une clé pour obtenir un algorithme aboutissant à des temps de calculs réduits, néanmoins, tout moyen permettant d'obtenir  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MV}(T)$  est utilisable.

La minimisation du critère de MCS se réduit ainsi à une optimisation sur la topologie  $T$  :

$$\Delta = \Delta_{\text{Niveaux de gris}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MV}(T), T) + \Delta_{\text{Modèle}}(T). \quad (7)$$

Pour cela nous mettons en oeuvre différentes modifications de la topologie : déplacements de noeuds, suppressions de noeuds et basculements d'arêtes.

Partant d'un maillage hexagonal dense et régulier, toute modification est acceptée dès lors qu'elle fait décroître le critère de MCS (7). La méthode utilisée pour optimiser ce critère reprend le concept utilisé dans [5]. On procède par étapes successives : - Déplacements de noeuds, le nombre ainsi que les connexions entre les noeuds étant fixés. - Suppression de noeuds et modification locale des connexions pour retrouver une topologie correcte. - Basculement d'arêtes.

Ormis les déplacements de noeuds, chaque modification locale du maillage implique une nouvelle optimisation des valeurs nodales. L'étape de déplacements des noeuds est elle même basée sur une procédure par étapes. On teste les déplacements à 1 pixel de tous les noeuds pouvant être déplacé, et chaque étape élémentaire de déplacement est alternée avec une optimisation des valeurs nodales du maillage.

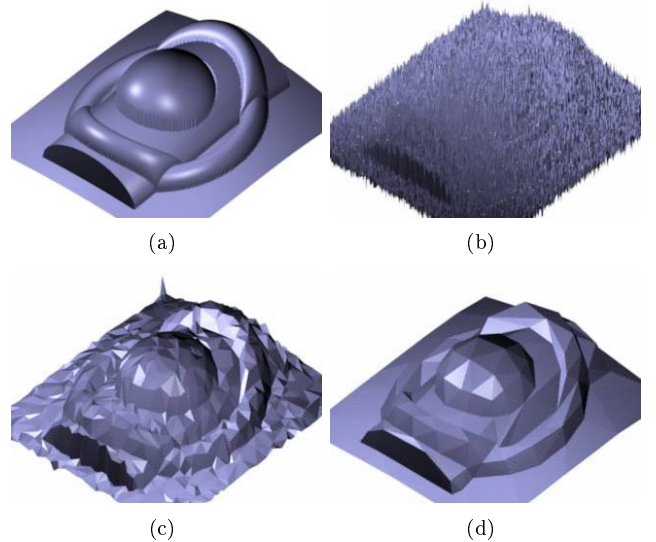


FIG. 2: Exemple sur image  $256 \times 256$  synthétique fortement bruitée. (a) référence, (b) référence bruitée 28.1dB, (c) exemple de résultat intermédiaire et (d) résultat final 42dB. Temps de calcul 5s sur PC Xeon 3Ghz.

### 4 Application et conclusion

Nous présentons dans ce papier des résultats dans le cas d'une ddp gaussienne de puissance  $\sigma^2$  inconnue, constante sur toute l'image.

La figure 2 présente la solution obtenue sur une image synthétique fortement bruitée. Le maillage s'adapte automatiquement aux informations contenues dans l'image en fonction du niveau de bruit. Le temps mis pour traiter cette image  $256 \times 256$  est de 5s sur un PC Xeon cadencé à 3GHz (gcc-3.4).

Le critère MCS ne présente aucun paramètre à régler et ne dépend pas de l'image à traiter <sup>2</sup>.

### References

- [1] N. Bertaux, Y. Frauel, Ph. Réfrégier, and B. Javidi. Speckle removal using a maximum-likelihood technique with isoline gray-level regularization. *JOSA A*, 21(12):2283–2291, Dec 2004.
- [2] J. Rissanen. Modeling by shortest data description. *Automatica*, 14:465–471, 1978.
- [3] M. Figueiredo, J. Leitão, and A. K. Jain. Unsupervised contour representation and estimation using B-splines and a minimum description length criterion. *IEEE Trans. Image Processing*, 9:1075–1087, 2000.
- [4] O. Ruch and Ph. Réfrégier. Minimal-complexity segmentation with a polygonal snake adapted to different optical noise models. *Opt. Lett.*, 26(13):977–979, 2001.
- [5] F. Galland, N. Bertaux, and Ph. Réfrégier. Minimum description length synthetic aperture radar image segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(9):995–1006, 2003.
- [6] J. Rissanen. *Stochastic Complexity in Statistical Inquiry*. World Scientific, Singapore, 1989.

<sup>2</sup><http://nbertaux.perso.ec-marseille.fr/visible/SAS>