

# Goniométrie pour les chirps gravitationnels

Olivier RABASTE<sup>1\*</sup>, Éric CHASSANDE-MOTTIN<sup>1</sup> et Archana PAI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>CNRS, Laboratoire AstroParticule et Cosmologie  
10, rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75205 Paris Cedex 13, France

<sup>2</sup>Max-Planck Institut für Gravitationsphysik  
Am Mühlenberg 1, 14476 Potsdam, Allemagne  
rabaste@apc.univ-paris7.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous proposons une procédure de traitement d’antennes s’appliquant aux contextes et spécificités de la détection des ondes gravitationnelles. Plus précisément, nous nous intéressons à la détection cohérente de chirps à l’évolution de phase/fréquence inconnue dans les données d’un réseau inhomogène (en positions, orientations et sensibilités) d’antennes gravitationnelles. Nous proposons une mise en œuvre de la méthode du maximum de vraisemblance généralisé à l’aide d’une recherche de chemin temps-fréquence appliquée à deux “flux synthétiques”, combinons des données qui s’apparentent à des solutions en formation de voie. Nous donnons une preuve de principe d’une recherche plein ciel permettant l’estimation conjointe de la position de la source sur la sphère céleste et de l’évolution de phase du chirp.

**Abstract** – In this article, we propose an array processing procedure which applies to the context and specificities of gravitational wave detection. More precisely, we are interested in the coherent detection of chirps with unknown phase/frequency evolution in the data of an inhomogeneous (in position, orientation and sensitivity) network of gravitational antennas. We propose an implementation of the generalized likelihood ratio test in terms of a time-frequency path search applied to two “synthetic streams” which are similar to beamformers. We give a proof of principle for a full-sky blind search allowing the joint estimation of the sky position of the source and chirp phase evolution.

La théorie de la relativité générale prédit l’existence de solutions radiatives aux équations qui régissent la dynamique de l’espace-temps : les *ondes gravitationnelles* (OG). Une collaboration internationale tente de confirmer cette prédiction par une observation directe des OG au moyen d’un réseau de six antennes gravitationnelles (voir Fig. 1). Ces antennes ouvrent une fenêtre allant de quelques dizaines de Hz à quelques kHz permettant l’observation des sources astrophysiques potentielles. Une prise de données concertée est actuellement en cours.

L’émission gravitationnelle est directement liée à la masse et à la dynamique de la source. Sous certaines approximations, on peut dire que l’OG  $h(t)$  émise par un système en mouvement *orbital* est *quasi-périodique* et peut s’écrire

$$h(t) = A(t) \exp [i(\varphi(t) + \phi_0)]. \quad (1)$$

Plusieurs sources bien identifiées émettent des OG de ce type, que l’on désignera par le terme anglais *chirp*. C’est par exemple le cas des binaires coalescentes d’objets compacts (étoiles à neutrons ou trous noirs) pour lesquelles l’amplitude et la phase suivent une loi précise (une loi de puissance en première approximation). Ces informations sont utilisées lors de recherches “ciblées”.

Les antennes gravitationnelles ouvrent un champ d’observation jusqu’ici inexploré, ce qui laisse une large place à l’imprévu. L’Éq. (1) est valide quand le mouvement est orbital, indépendamment de ses particularités et des phénomènes physiques qui les déterminent. Les chirps sont donc une *signature générique* des systèmes orbitants. Ceci

motive l’extension de la recherche à des familles plus larges de chirps. L’évolution de phase n’est cependant pas totalement arbitraire. Pour être physiquement réaliste, elle doit avoir une certaine régularité. Par ailleurs, nous nous limitons ici aux chirps d’amplitudes constantes i.e.,  $A(t) = A$ .

Nous avons introduit dans [1] une méthode de recherche non-paramétrique pour les chirps réguliers. Son application est restreinte à l’analyse des données d’une seule antenne. On s’intéresse ici à son extension au cas multi-antennes. L’utilisation de plusieurs antennes permet en effet d’estimer plusieurs paramètres physiques inaccessibles autrement, en particulier la localisation de la source. Il s’agit en quelque sorte d’obtenir une procédure de “goniométrie gravitationnelle”.

Il existe une littérature abondante sur le traitement d’antennes pour les ondes électromagnétiques (voir [3] pour une revue récente). Les particularités du contexte des OG justifient cependant un travail spécifique. En premier lieu, les ondes reçues sont polarisées (dans le modèle (1), l’OG combine deux polarisations circulaires  $h = h_+ + ih_x$ ) et large bande (la fréquence instantanée varie). D’autre part, contrairement à ce qui est habituellement utilisé pour les ondes électromagnétiques (pour les RADAR par ex.), le réseau des antennes gravitationnelles est inhomogène. Ceci est vrai pour la répartition et l’orientation des antennes (voir Fig. 1) mais aussi pour les caractéristiques de leur bruit instrumental. Ce travail fait suite à une première étude [2] où l’on suppose un bruit blanc et identique pour chaque antenne. On examine ici la situation réaliste où les bruits sont de couleurs différentes.

\* OR reçoit une bourse postdoctorale du Virgo-EGO Scientific Forum.

Nous précisons d'abord les conditions de réception du signal gravitationnel. De cette modélisation du problème, nous obtenons le rapport de vraisemblance (RV) et montrons ensuite comment la détection et l'estimation des paramètres libres peuvent être conduites conjointement.

## 1 Modélisation du problème

Le passage d'une OG produit une signature en sortie de l'antenne qui s'exprime comme la combinaison linéaire de ses polarisations. Plus précisément, le signal obtenu s'écrit

$$s(t) = \Re[f^*h(t - \tau)],$$

où  $\tau$  désigne le délai de l'onde (plane) entre l'antenne et le centre de la Terre choisi comme référence. Selon l'alignement relatif du référentiel de la source avec celui de l'antenne, le diagramme d'antenne  $f$  modifie l'amplitude et la phase initiale du signal reçu. Il s'exprime [2] par le biais de trois fonctions complexes  $t_+$ ,  $t_-$  et  $d$  (que l'on n'explicitera pas ici) des orientations de ces référentiels :

$$f = t_+(\psi, \epsilon) d(\phi, \theta; \mathbf{A}) + t_-(\psi, \epsilon) d^*(\phi, \theta; \mathbf{A}), \quad (2)$$

où les caractéristiques  $\mathbf{A}$  de position et d'orientation de l'antenne sont connues mais les coordonnées  $\theta$  et  $\phi$  de la source sur la sphère céleste, l'angle de polarisation de l'onde  $\psi$  et l'inclinaison  $\epsilon$  du plan orbital par rapport à la ligne de visée sont inconnus et doivent être estimés.

Considérons un réseau de  $N_d$  antennes dénotées par l'indice  $j = 1 \dots N_d$ . La mise en forme des données s'effectue comme suit : on échantillonne le signal  $s_j(t)$  reçu par la  $j^{\text{ème}}$  antenne. Les données sont collectées par bloc (d'une durée égale à celle d'une OG dans la bande d'observation, typiquement quelques secondes) et transformées en vecteurs  $\mathbf{s}_j = \{s_j[k] = s_j(kt_s + \tau_j), k = 0 \dots N - 1\}$ . Notons que l'on prend soin de compenser le délai  $\tau_j$  de sorte que les lignes de chaque vecteur correspondant au début et à la fin de la présence de l'OG coïncident.

Lorsque l'OG suit le modèle (1), le vecteur rassemblant toutes les données du réseau  $\mathbf{s}^T = [\mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_2^T \dots \mathbf{s}_{N_d}^T]$ , se factorise en un modèle linéaire :  $\mathbf{s} = \mathbf{\Pi} \mathbf{p}$ . On a isolé dans le vecteur  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^4$  les paramètres  $A$ ,  $\phi_0$ ,  $\epsilon$  et  $\psi$  (par l'intermédiaire des  $t_{\pm}$ ) qui agissent comme des facteurs d'amplitude complexes. L'espace signal décrit par  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{D} \otimes \mathbf{E}$  est le produit direct de l'espace des OG  $\mathbf{D} = [\mathbf{d}, \mathbf{d}^*]$  où l'on a  $\mathbf{d} = \{d(\phi, \theta; \mathbf{A}_j), j = 1 \dots N_d\}$  et de l'espace chirp  $\mathbf{E} = [\mathbf{e}, \mathbf{e}^*]/2$  avec  $\mathbf{e} = \{e[k] \equiv \exp(i\varphi(kt_s)), k = 0 \dots N - 1\}$ .

L'antenne  $j$  est affectée d'un bruit gaussien coloré, de matrice de corrélation  $\mathbf{R}_j$ , indépendant des autres. Le logarithme du RV lié à la détection du chirp s'écrit alors

$$\Lambda(\mathbf{x}) = -\|\mathbf{x} - \mathbf{\Pi} \mathbf{p}\|_{\mathbf{R}^{-1}} + \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{R}^{-1}}, \quad (3)$$

où la construction du vecteur de données  $\mathbf{x}$  est calquée sur celle de  $\mathbf{s}$ . La matrice de corrélation globale du bruit  $\mathbf{R} \equiv \text{diag}(\mathbf{R}_j)$  est diagonale par blocs. En introduisant les versions blanchies  $\tilde{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{\Pi}$  et  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{x}$ , le RV peut finalement se récrire sous la forme

$$\Lambda(\mathbf{x}) = -\|\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{\Pi}} \mathbf{p}\|^2 + \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2. \quad (4)$$

## 2 Statistique de décision

Notre modèle comporte un certain nombre de paramètres inconnus. Nous suivons l'approche classique du Maximum de Vraisemblance Généralisé (MVG) et obtenons dans cette section la statistique de décision en remplaçant ces paramètres par leur estimateur au sens du MV.

### 2.1 Facteurs d'amplitude

L'estimation de  $\mathbf{p}$  se ramène à un problème aux moindres carrés  $\hat{\mathbf{p}} = \arg \min_{\mathbf{p}} \|\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{\Pi}} \mathbf{p}\|^2$  qui donne classiquement

$$\hat{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{\Pi}}^{\#} \tilde{\mathbf{x}}, \quad (5)$$

où  $\tilde{\mathbf{\Pi}}^{\#}$  est la pseudo-inverse de  $\tilde{\mathbf{\Pi}}$ . Celle-ci s'exprime simplement au moyen de la Décomposition en Valeurs Singulières (DVS) de  $\tilde{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{U}_{\tilde{\mathbf{\Pi}}} \Sigma_{\tilde{\mathbf{\Pi}}} \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{\Pi}}}^H$  comme  $\tilde{\mathbf{\Pi}}^{\#} = \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{\Pi}}} \Sigma_{\tilde{\mathbf{\Pi}}}^{-1} \mathbf{U}_{\tilde{\mathbf{\Pi}}}^H$ , l'exposant  $\cdot^H$  dénotant la transposée hermitienne.

En introduisant (5) dans (4), on obtient

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{x}) \equiv \|\mathbf{U}_{\tilde{\mathbf{\Pi}}}^H \tilde{\mathbf{x}}\|^2. \quad (6)$$

Si le bruit est blanc, i.e.,  $\mathbf{R} \propto \mathbf{I}_N$ , alors  $\tilde{\mathbf{\Pi}} \propto \mathbf{\Pi}$  et on a simplement  $\mathbf{U}_{\tilde{\mathbf{\Pi}}} = \mathbf{U}_D \otimes \mathbf{U}_E$ . La coloration du bruit modifie ce résultat. Nous obtenons en annexe la DVS de  $\tilde{\mathbf{\Pi}}$  et plus spécifiquement en Éq. (18) l'expression de  $\mathbf{U}_{\tilde{\mathbf{\Pi}}}$  où interviennent  $\mathbf{U}_E \propto \mathbf{E}$  et  $\tilde{\mathbf{U}}_D$ , une version modifiée de  $\mathbf{U}_D$ . Ceci conduit à

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{x}) = \|(\tilde{\mathbf{U}}_D \otimes \mathbf{E})^H \tilde{\mathbf{x}}\|^2, \quad (7)$$

où le vecteur  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1/2} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}$  contient les données "doublement blanchies". Cette expression s'écrit aussi

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{x}) = \|\text{vec}(\mathbf{E}^H \tilde{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{U}}_D^*)\|^2, \quad (8)$$

où la matrice  $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{N \times d}$  est telle que  $\tilde{\mathbf{x}} = \text{vec}(\tilde{\mathbf{X}})$ . On voit donc qu'interviennent deux mélanges linéaires instantanés des données du réseau que l'on appelle *flux synthétiques*

$$[\mathbf{y}_+, \mathbf{y}_-] \equiv \tilde{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{U}}_D^*.$$

La combinaison est telle que les signatures des chirps gravitationnels reçues par chaque antenne s'additionnent constructivement. En ce sens, ces flux sont à rapprocher des solutions en formation de voie du traitement d'antenne classique [3]. On obtient ainsi

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{x}) = |\mathbf{e}^H \mathbf{y}_+|^2 + |\mathbf{e}^H \mathbf{y}_-|^2. \quad (9)$$

Chaque terme de la statistique représente le filtrage adapté du flux  $\mathbf{y}_{\pm}$  (que l'on peut voir comme les données d'une antenne virtuelle) avec la forme d'onde du chirp  $\mathbf{e}$ .

De l'expression de  $\tilde{\mathbf{U}}_D$  obtenue en annexe, on peut expliciter les flux synthétiques comme suit

$$\mathbf{y}_{\pm}(\mathbf{n}) = \frac{\delta(\mathbf{n}) \mathbf{z} \pm \mathbf{z}^*}{\sqrt{2(\mathcal{D}(\mathbf{n}) \pm |\Delta(\mathbf{n})|)}}, \quad (10)$$

où l'on note  $\mathbf{z} = \mathbf{X} \mathbf{d}^*$ ,  $\mathcal{D}(\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^{N_d} |d_j|^2 n_j$ ,  $\Delta(\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^{N_d} d_j^2 n_j$  et  $\delta(\mathbf{n}) = \Delta(\mathbf{n})/|\Delta(\mathbf{n})|$ . Ceci met en évidence la dépendance des  $\mathbf{y}_{\pm}$  au schéma fréquentiel suivi par le signal cherché, dépendance exprimée par le biais du vecteur  $\mathbf{n} = \{n_j, j = 1 \dots N_d\}$  avec  $n_j$  tel que

$$n_j = \mathbf{e}^H \mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{e} \approx \int \frac{1}{\Gamma_j(\nu(t))} dt, \quad (11)$$

où  $\Gamma_j(f)$  désigne la DSP du bruit du  $j^{\text{ème}}$  détecteur et  $\nu(t) \equiv (2\pi)^{-1} d\varphi/dt$  la fréquence instantanée du chirp.

## 2.2 Phase et position de la source

**Phase : suivi de chemin temps-fréquence** — La phase  $\varphi(t)$  du chirp est inconnue *a priori*. Notons cependant que pour être physiquement réalistes, cette phase et ses dérivées (la fréquence  $\nu(t)$  et les taux de modulations  $d\nu/dt$  et  $d^2\nu/dt^2$ ) doivent satisfaire des propriétés de continuité et de régularité. Le principe du MVG nous amène à chercher dans cette famille de chirps admissibles celui dont la phase maximise le RV. Cette maximisation, difficile à résoudre analytiquement en raison de sa non-linéarité et de sa non-convexité, nécessite une méthode numérique, ce qui a été proposé dans [1]. Nous en repreneons le principe en l'adaptant à la situation présente.

On reformule tout d'abord la statistique dans le domaine temps-fréquence (TF) via les propriétés d'unitarité de la distribution de Wigner-Ville (DWV). Elle s'écrit alors comme la corrélation entre la DWV  $w_e$  de la forme d'onde  $\mathbf{e}$  et la somme  $v(\cdot, \cdot; \mathbf{n}) = w_{y_+(\mathbf{n})} + w_{y_-(\mathbf{n})}$  des DWV des flux synthétiques, i.e.,

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{x}) = \sum_{k,l} w_e(k,l)v(k,l;\mathbf{n}), \quad (12)$$

où  $k$  et  $l$  sont les variables temporelles et fréquentielles dans un plan TF discret. Comme la DWV d'un chirp est géométriquement simple — on a approximativement  $w_e(k,l) \propto \delta(l - l_k)$ , où  $l_k = \nu(kt_s)/f_s$  représente la fréquence du chirp au temps  $k$  —, la statistique se réduit à une intégrale de chemin dans le plan TF :

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{x}) \approx \sum_k v(k, l_k; \mathbf{n}). \quad (13)$$

Si le bruit est blanc, i.e.,  $\Gamma_j(f) = \Gamma_0$ , alors  $n_j = t_s N / \Gamma_0$  pour toute antenne et pour tout chirp. Dans ce cas, l'intégrande dans l'Éq. (13) dépend du chirp uniquement via le chemin d'intégration associé à  $l_k$ . La fonction objectif  $\hat{\Lambda}$  est alors additive et sa maximisation s'apparente à un problème de recherche du chemin le plus long qui peut être résolu par la programmation dynamique (PD).

Si le bruit est coloré, l'intégrande en Éq. (13) exhibe une double dépendance du chirp via  $l_k$  et  $\mathbf{n}$ . La statistique  $\hat{\Lambda}$  perd son additivité et la PD ne permet plus d'obtenir le maximum global. La PD est une procédure itérative opérant sur des intervalles de temps successifs jusqu'à couvrir l'entière durée du signal. Nous proposons d'adapter cette procédure en y intégrant une étape de ré-évaluation des coefficients  $n_j$  à chaque itération. Autrement dit, on se sert de l'estimation courante du signal pour ajuster les flux synthétiques. On envisage deux méthodes de mise à jour de  $n_j$  : à l'itération  $m$  où l'on traite l'intervalle  $[k_{m-1}, k_m]$ ,

– la méthode "locale" :  $n_j = \int_{k_{m-1}t_s}^{k_m t_s} 1/\Gamma_j(\nu(t)) dt$ ,

– la méthode "globale" :  $n_j = \int_0^{k_m t_s} 1/\Gamma_j(\nu(t)) dt$ .

On s'attend à ce que la méthode globale produise de meilleurs résultats puisque le calcul de  $n_j$  s'affine au fur et à mesure que la recherche progresse. Notons qu'en pratique, on peut isoler dans l'Éq. (13) la dépendance de  $\mathbf{n}$  et éviter ainsi d'avoir à calculer les DWV de  $\mathbf{y}_\pm$  à chaque itération.

Bien qu'elles ne garantissent pas l'obtention du maximum global de  $\hat{\Lambda}$ , les versions modifiées de PD donnent des résultats satisfaisants que nous présentons en Sect. 3.

**Position de la source : recherche exhaustive sur une grille céleste** — Pour estimer la position de la source, on échantillonne la sphère céleste et on répète la recherche temps-fréquence en chaque point du ciel. On obtient alors un "paysage de vraisemblance" dans lequel on sélectionne le maximum. Si ce maximum excède un certain seuil, une OG est détectée.

## 3 Simulations et discussion

Pour tester les idées proposées ici, nous considérons le réseau formé des deux antennes américaines LIGO et du détecteur franco-italien Virgo (voir Fig. 1). Nous simulons le bruit de chacun de ces détecteurs en utilisant un modèle auto-régressif gaussien imitant globalement le bruit instrumental réel, en particulier la domination des basses fréquences. On injecte dans ce bruit un chirp gravitationnel dont la fréquence suit une marche aléatoire (satisfaisant les conditions de régularité) dans le plan TF. L'amplitude de l'OG est ajustée pour fixer le Rapport Signal à Bruit (RSB)  $\rho \equiv \|\tilde{\mathbf{s}}\|_2 = \|\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{p}\|_2$  à une valeur donnée.

**Estimation du chirp** — Afin de comparer les performances des deux variantes locale et globale proposées, nous calculons  $d(\nu, \hat{\nu}) \equiv (1/N \sum_{k=1}^N (\nu(kt_s) - \hat{\nu}(kt_s))^2)^{1/2}$ , où  $\hat{\nu}$  est la fréquence estimée, à savoir l'erreur quadratique moyenne faite sur la fréquence du chirp. La Figure 2 présente une illustration du résultat d'estimation obtenu par les deux variantes proposées, ainsi que par une méthode (algorithmiquement plus simple) ne prenant pas en compte la couleur du bruit [2] (on suppose le bruit blanc en chaque détecteur).

La Figure 3 présente une comparaison plus systématique de l'erreur puisque moyennée sur  $10^5$  simulations et pour une gamme de valeurs réalistes du RSB. On voit que les méthodes sont équivalentes à fort RSB. Notons que l'erreur d'estimation de la fréquence tend vers une précision moyenne commune à toutes les méthodes envisagées. Cette précision est en fait liée au biais (proportionnel à la courbure locale de  $\nu$ ) dû à l'utilisation de la DWV. À faible RSB, notons l'importance de la prise en compte de la coloration du bruit et l'avantage de la méthode globale.

**Estimation de la position de la source** — Une démonstration de principe d'une recherche plein ciel par la méthode globale est présentée en Figure 4.

## Annexe : spectre singulier de $\tilde{\mathbf{\Pi}}$

La DVS de  $\tilde{\mathbf{\Pi}}$  s'obtient en calculant la décomposition en valeurs propres (DVP) de la matrice  $\tilde{\mathbf{\Pi}}^H \tilde{\mathbf{\Pi}}$ . En raison de la forme particulière de la matrice  $\mathbf{D}$  et de la structure diagonale par blocs de la matrice de covariance  $\mathbf{R}$ , il vient :

$$\tilde{\mathbf{\Pi}}^H \tilde{\mathbf{\Pi}} = \sum_{j=1}^{N_d} \begin{bmatrix} |d_j|^2 \tilde{\mathbf{E}}_j & (d_j^2 \tilde{\mathbf{E}}_j)^* \\ d_j^2 \tilde{\mathbf{E}}_j & |d_j|^2 \tilde{\mathbf{E}}_j \end{bmatrix}, \quad (14)$$

où  $\tilde{\mathbf{E}}_j = \mathbf{E}^H \mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{E}$  mesure les corrélations propre et croisée des versions blanchies des chirps  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{e}^*$ .

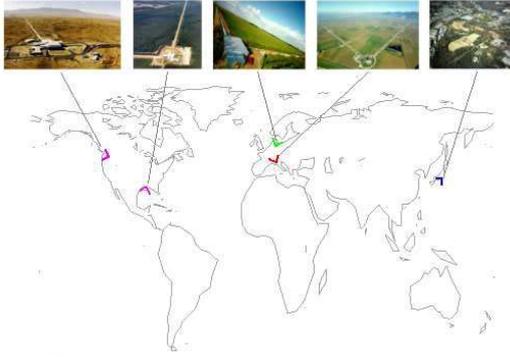


FIG. 1 – Le réseau se compose de trois antennes gravitationnelles (dont une double) aux États-Unis (LIGO, <http://www.ligo.org>), deux en Europe (GEO, <http://www.geo600.uni-hannover.de>, et Virgo, <http://www.virgo.infn.it>) et une au Japon (TAMA, <http://tamago.mtk.nao.ac.jp>).

Comme les matrices de covariances  $\mathbf{R}_j$  sont Toeplitz, elles sont asymptotiquement diagonalisables dans la base de Fourier  $\mathbf{W} \equiv \{e^{-i2\pi kl/N}; k, l = 0 \dots N-1\}$ , soit  $\mathbf{R}_j = \mathbf{W}\mathbf{\Gamma}_j\mathbf{W}^H$  où  $\text{diag}(\mathbf{\Gamma}_j)$  est composée d'échantillons de la Densité Spectrale de Puissance (DSP)  $\Gamma_j(f)$  du bruit de l'antenne  $j$ . On obtient  $\tilde{\mathbf{E}}_j \approx n_j \mathbf{I}_2$ , les termes hors diagonaux étant négligeables (car résultant d'une somme de fonctions oscillantes) devant les termes diagonaux  $n_j$  dont on donne une approximation en Éq. (11). Ainsi,  $\tilde{\mathbf{\Pi}}^H \tilde{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_2$ , avec

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{D} & \Delta^* \\ \Delta & \mathcal{D} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} \equiv \sum_{j=1}^{N_d} |d_j|^2 n_j \quad \text{et} \quad \Delta \equiv \sum_{j=1}^{N_d} d_j^2 n_j. \quad (15)$$

La DVP de  $\tilde{\mathbf{\Pi}}^H \tilde{\mathbf{\Pi}}$  se déduit simplement de celle de  $\mathbf{T} = \mathbf{V}_T \mathbf{\Sigma}_T \mathbf{V}_T^H$  où  $\mathbf{\Sigma}_T$  et  $\mathbf{V}_T$  sont donnés par

$$\mathbf{\Sigma}_T = \begin{bmatrix} \mathcal{D} + |\Delta| & 0 \\ 0 & \mathcal{D} - |\Delta| \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \delta & \delta \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

avec  $\delta \equiv \Delta/|\Delta|$ . La DVS de  $\tilde{\mathbf{\Pi}}$  en découle directement :

$$\mathbf{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{\Pi}}} = \mathbf{\Sigma}_T^{1/2} \otimes \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{\Pi}}} = \mathbf{V}_T \otimes \mathbf{I}_2, \quad (17)$$

$$\mathbf{U}_{\tilde{\mathbf{\Pi}}} = \tilde{\mathbf{\Pi}} \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{\Pi}}} \mathbf{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{\Pi}}}^{-1} = \mathbf{R}^{-1/2} (\check{\mathbf{U}}_D \otimes \mathbf{E}), \quad (18)$$

où l'on note  $\check{\mathbf{U}}_D \equiv \mathbf{D} \mathbf{V}_T \mathbf{\Sigma}_T^{-1/2}$ .

## Références

- [1] E. Chassande-Mottin and A. Pai. Best chirplet chain : near-optimal detection of gravitational wave chirps. *Phys. Rev. D*, 73(4) :042003 — 1–25, 2006.
- [2] A. Pai, E. Chassande-Mottin, and O. Rabaste. Best net-CC : Near-optimal coherent detection of unmodelled chirps with a network of detectors. En préparation.
- [3] H. L. Van Trees. *Optimum array processing*. Wiley, New York, US, 2002.

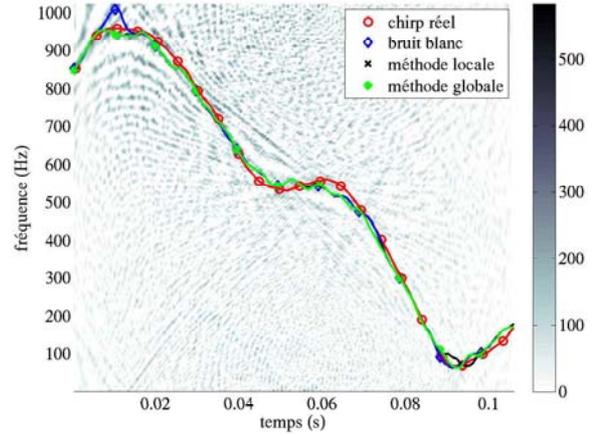


FIG. 2 – Exemple d'estimation temps-fréquence d'un chirp gravitationnel (RSB=20). Bruit blanc :  $d(\nu, \hat{\nu}) = 16.9$  Hz ; méthode locale :  $d(\nu, \hat{\nu}) = 15.9$  Hz ; méthode globale :  $d(\nu, \hat{\nu}) = 15.7$  Hz.

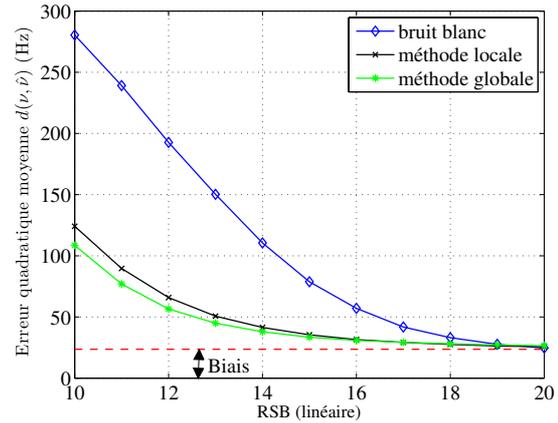


FIG. 3 – Performances d'estimation de la forme d'onde.

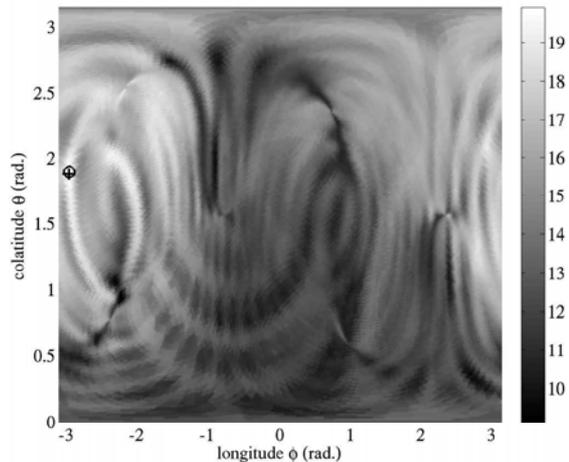


FIG. 4 – Paysage de vraisemblance pour un chirp gravitationnel aléatoire (RSB=20).  $\circ$  : position réelle de la source ;  $+$  : position estimée.