

Reconstruction tomographique de séquences d'images 3D - Application aux données SOHO/STEREO

Nicolas BARBEY^{1,2}, Thomas RODET², Frédéric AUCHÈRE¹, Jean-Claude VIAL¹,

¹ Institut d'Astrophysique Spatiale
Bâtiment 121, Université Paris XI, Orsay, France

²Laboratoire des Signaux et Systèmes
3 rue Joliot-Curie, Gif-sur-Yvette, France

nicolas.barbey@lss.supelec.fr, thomas.rodet@lss.supelec.fr,
frederic.auchere@ias.u-psud.fr, jean-claude.vial@ias.u-psud.fr

Résumé –

Nous présentons une nouvelle méthode tomographique qui prend en compte l'évolution temporelle de l'objet pendant l'acquisition des données. Ce problème est extrêmement mal posé. On cherche à le résoudre pour la reconstruction de la couronne solaire à partir des données STEREO/SECCHI (cf. [1]). On veut en particulier reconstruire les plumes polaires. Pour ce faire, nous forçons l'évolution temporelle à être homogène par région. Des premiers résultats ont été obtenus sur simulations et données réelles. Ils prouvent l'intérêt de notre méthode pour estimer à la fois la forme et l'évolution temporelle de l'objet là où les méthodes classiques telles que la rétroprojection filtrée (RPF), (cf. [2],[3]) échouent.

Abstract – We present a new tomography method which takes into account the temporal evolution of the object during data acquisition. This is an extremely ill-posed problem. This method has been designed to be applied to the tomography of the solar corona using STEREO/SECCHI (cf. [1]) images and specifically to reconstruct polar plumes. This is achieved by enforcing the temporal evolution to be homogeneous per region. We have preliminary results on simulations and real data. These results show that our method can estimate both the object and its temporal evolution where filtered back-projection (FBP), (cf. [2],[3]) fails.

1 Introduction

Grâce aux missions SOHO et STEREO nous disposons d'images du soleil dans l'extrême ultra-violet (EUV). Images qui permettent en particulier d'étudier les plumes polaires, structures brillantes de la couronne situées au-dessus des pôles du soleil. Elles pourraient être liées à la résolution de deux grands problèmes actuels de la physique solaire, que sont le chauffage de la couronne et l'accélération du vent solaire rapide (cf. [4]). Les données résultent de l'intégration de l'émission le long de la ligne de visée et sont prises tout au long de la rotation du Soleil sur lui-même, offrant une vue sous différents angles du Soleil. On cherche à obtenir la structure 3D des plumes polaires. Ces plumes sont connues pour évoluer plus vite que le temps nécessaire à l'acquisition des données sur une demi-rotation solaire (cf. [5]). Il nous est donc nécessaire de développer une méthode de tomographie avec évolution temporelle, problème extrêmement mal posé en raison du faible nombre de données par rapport au nombre de paramètres à estimer. Ce problème de reconstruction de la couronne avec évolution temporelle a déjà été abordé par [6] en utilisant le formalisme du filtrage de Kalman ([7]). Notre méthode exposée ci-dessous cherche à prendre en compte les spécificités de ce problème et de l'objet à reconstruire. En particulier, on utilisera l'hypothèse que les plumes ne bougent pas par rapport au Soleil mais voient leur intensité varier avec le temps (modèle d'évolution temporelle par zone).

2 Présentation de la méthode

On présente notre problème comme un problème inverse discret que l'on va chercher à résoudre par des méthodes statistiques.

2.1 Modèle direct

Nous introduisons tout d'abord un modèle adapté à notre problème. L'intégration selon la ligne de visée étant linéaire, on peut modéliser l'obtention des données comme un problème linéaire en fonction de l'émission volumique de l'objet :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{P}_t \mathbf{z}_t + \mathbf{n}_t, \forall t \in [1, \dots, T] \quad (1)$$

où \mathbf{y}_t est le vecteur des données au temps t , \mathbf{z}_t un vecteur regroupant les émissions, \mathbf{n}_t un vecteur de bruit additif et \mathbf{P}_t la matrice de projection. L'opération de projection et l'opération symétrique de rétroprojection ont été implémentées en utilisant l'algorithme de Siddon (cf. [8]). On décrit \mathbf{z}_t comme le produit de deux termes dont un seul dépend du temps :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{P}_t(\mathbf{x} * \mathbf{g}_t) + \mathbf{n}_t \quad (2)$$

avec $*$ la multiplication terme à terme de deux vecteurs. Ce problème n'est plus linéaire mais bilinéaire. Le nombre d'inconnus du problème est important par rapport au nombre de données. Nous réduisons ce nombre par une modification du modèle direct qui limite d'avantage le nombre de solutions possibles.

Pour se faire nous supposons que les plumes ne se déplacent pas mais varient en intensité. On écrit :

$$\mathbf{g}_t = \mathbf{L}\boldsymbol{\theta}_t \quad (3)$$

La matrice \mathbf{L} définit les régions où l'évolution temporelle est identique. Chaque colonne de \mathbf{L} est donnée par la fonction support d'une zone homogène temporellement.

Remarquons que cette hypothèse d'immobilité peut se justifier physiquement si on admet que les plumes sont formées par des tubes de champ magnétique, leur intensité variant avec les paramètres du plasma qui les traverse. En combinant les équations (2) et (3) on obtient le problème bilinéaire suivant :

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}_x\boldsymbol{\theta} + \mathbf{n} \quad (4)$$

avec :

$$\mathbf{U}_x = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \mathbf{X} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_T \mathbf{X} \mathbf{L} \end{pmatrix}$$

et $\mathbf{X} = \text{diag}(\mathbf{x})$ est la matrice diagonale de coefficients \mathbf{x} où :

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_T \end{pmatrix}, \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_T \end{pmatrix}, \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{n}_T \end{pmatrix}$$

De même,

$$\mathbf{y} = \mathbf{V}_\theta \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (5)$$

avec,

$$\mathbf{V}_\theta = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \text{diag}(\mathbf{L}\boldsymbol{\theta}_1) & \mathbf{0} \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_T \text{diag}(\mathbf{L}\boldsymbol{\theta}_T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_d \\ \vdots \\ \mathbf{I}_d \end{pmatrix}$$

2.2 Problème inverse

Le problème inverse associé reste mal posé. Nous choisissons de définir notre solution comme le maximum *a posteriori*. En supposant que \mathbf{n} est un bruit gaussien indépendant identiquement distribué, la fonction de vraisemblance peut s'écrire :

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \sigma_n) = K_1 \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{U}_x\boldsymbol{\theta}\|^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (6)$$

On choisit les *a priori* de douceur suivants sur les estimés :

$$f(\mathbf{x}|\sigma_x) = K_2 \exp\left(-\frac{\|\mathbf{D}_r \mathbf{x}\|^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (7)$$

$$f(\boldsymbol{\theta}|\sigma_\theta, \sigma_1) = K_3 \exp\left(-\frac{\|\mathbf{D}_t \boldsymbol{\theta}\|^2}{2\sigma_\theta^2} - \frac{\|\boldsymbol{\theta} - \mathbf{1}\|^2}{2\sigma_1^2}\right) \quad (8)$$

avec \mathbf{D}_r and \mathbf{D}_t des opérateurs de différentiation discrets sur le temps et l'espace. Nous avons donc un critère de douceur pour \mathbf{x} et $\boldsymbol{\theta}$, ainsi qu'un rappel à 1 sur $\boldsymbol{\theta}$ qui garantit que la solution soit définie de manière unique. L' *a posteriori* s'écrit alors :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{L}, \mathcal{H}) = \frac{f(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{L}, \sigma_n) f(\mathbf{x}|\sigma_x) f(\boldsymbol{\theta}|\sigma_\theta, \sigma_1)}{f(\mathbf{y}|\mathbf{L}, \mathcal{H})} \quad (9)$$

où $\mathcal{H} = \{\sigma_n, \sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_1\}$. Nous pouvons maintenant définir notre solution comme étant l'argument du maximum *a posteriori* :

$$(\mathbf{x}^{\text{MAP}}, \boldsymbol{\theta}^{\text{MAP}}) = \arg \min_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}} J(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \quad (10)$$

Cette équation (9) peut aussi s'écrire comme la minimisation d'un critère (cf [9]) :

$$J(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = -2\sigma_n \log f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{L}, \mathcal{H}) \quad (11)$$

$$= \|\mathbf{y} - \mathbf{U}_x\boldsymbol{\theta}\|^2 + \lambda \|\mathbf{D}_r \mathbf{x}\|^2 + \mu \|\mathbf{D}_t \boldsymbol{\theta}\|^2 + \nu \|\boldsymbol{\theta} - \mathbf{1}\|^2$$

$\lambda = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2}$, $\mu = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\theta^2}$ et $\nu = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_1^2}$ sont des hyperparamètres pouvant être définis par l'utilisateur.

2.3 Optimisation

Il reste maintenant à minimiser le critère obtenu. La nature bilinéaire du critère facilite une minimisation alternée sur \mathbf{x} et $\boldsymbol{\theta}$. De plus la faible taille de \mathbf{U}_x permet de calculer directement l'argument du minimum selon $\boldsymbol{\theta}$ au prix d'une inversion matricielle. Par contre, le minimum sur \mathbf{x} est trouvé de manière approximative par une méthode du type gradient. À la $n^{\text{ième}}$ itération, on met donc à jour $\boldsymbol{\theta}$ comme suit :

$$\boldsymbol{\theta}^{n+1} = [\mathbf{U}_{x^n}^T \mathbf{U}_{x^n} + \mu \mathbf{D}_t^T \mathbf{D}_t]^{-1} \mathbf{U}_{x^n}^T \mathbf{y} \quad (12)$$

Puis, on met à jour \mathbf{x} , de manière itérative. À l'étape p , on calcul le gradient courant :

$$\nabla_{\mathbf{x}} J|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^p} = 2\mathbf{V}_{\boldsymbol{\theta}^{n+1}}^T (\mathbf{V}_{\boldsymbol{\theta}^{n+1}} \mathbf{x}^p - \mathbf{y}) + 2\lambda \mathbf{D}_r^T \mathbf{D}_r \mathbf{x}^p \quad (13)$$

On choisit une direction de descente comme suit (cf. [10]):

$$\mathbf{d}^{p+1} = \mathbf{d}^p + b^p \nabla_{\mathbf{x}} J|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^p}$$

$$b^p = \frac{\langle \nabla_{\mathbf{x}} J|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^p}, \nabla_{\mathbf{x}} J|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{p-1}} \rangle}{\|\nabla_{\mathbf{x}} J|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{p-1}}\|^2} \quad (14)$$

Ce qui nous permet de calculer le pas optimal :

$$a_{\text{OPT}}^{p+1} = \arg \min_a J(\mathbf{x}^p + a\mathbf{d}^{p+1}) \quad (15)$$

qui peut s'explicitier :

$$a_{\text{OPT}}^{p+1} = -\frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}^{p+1} \nabla_{\mathbf{x}} J|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^p}}{\|\mathbf{V}_{\boldsymbol{\theta}^{n+1}} \mathbf{d}^{p+1}\|^2 + \lambda \|\mathbf{D}_r \mathbf{d}^{p+1}\|^2} \quad (16)$$

Enfin, on met à jour \mathbf{x} :

$$\mathbf{x}^{p+1} = \mathbf{x}^p + a_{\text{OPT}}^{p+1} \mathbf{d}^{p+1} \quad (17)$$

Les méthodes itératives requièrent un critère d'arrêt. On choisit pour la minimisation selon \mathbf{x} :

$$\text{mean}_{\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^p, \mathbf{x}^{p-1}, \mathbf{x}^{p-2}\}} \|\nabla_{\mathbf{x}} J\|^2 < S_x \quad (18)$$

où mean est la moyenne sur 3 itérations. Pour la minimisation globale nous ne disposons pas du gradient, nous choisissons donc :

$$\text{mean}_{[n, n-1, n-2]} \|(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\theta}_n) - (\mathbf{x}_{n-1}, \boldsymbol{\theta}_{n-1})\|^2 < S_G \quad (19)$$

Toutes les étapes sont récapitulées dans l'algorithme 1.

3 Résultats et analyse

3.1 Données simulées

Une reconstruction à partir de données simulées nous permet de valider notre méthode d'optimisation. Les résultats sont présentés figure 1, comparés à une reconstruction par rétro-projection filtrée (RPF) et à l'objet de départ. Notre méthode permet d'estimer de manière fiable l'évolution temporelle de

Algorithm 1 Reconstruction tomographique avec évolution temporelle

initialisation : $x = 0$ and $\theta = 1$

tant que eq. (19) est vérifiée

minimisation de x :

tant que eq. (18) est vérifiée

- * calculer le gradient en x_n avec l'eq. (13)
- * calculer la direction de descente avec l'eq. (14)
- * calculer le pas optimal avec l'eq. (16)
- * mettre à jour x avec l'eq. (17)

fin

minimisation de θ :

- * calcul $U_{x^n}^T U_{x^n}$ and $U_{x^n}^T y$
- * inverse $U_{x^n}^T U_{x^n} + \mu D_r^T D_r$
- * calcul eq. (12)

fin

l'objet et réduit de significativement les artefacts dans les cartes d'émission. L'algorithme RPF présente de nombreux voxels négatifs presque entièrement disparus avec notre algorithme. Notre algorithme estime x et θ à un facteur multiplicatif près sans conséquence pour l'analyse physique puisque seul le produit $x \cdot \theta$ a un sens physique. On pourrait également réduire cet effet en augmentant l'hyperparamètre de rappel à un. On pourrait également imposer une douceur spatiale sur x par zone uniquement. Dans ce dernier cas, on élimine la possibilité de recouvrement des différentes zones.

Remarquons que les gains θ des zones 1 et 3 sont mal estimés pour les 10 premiers instants environ. Cela correspond à un moment où ces 2 plumes sont alignées avec le détecteur. L'indétermination qui en résulte ne permet pas d'estimer correctement l'évolution temporelle à ce moment. Quoiqu'il en soit l'utilisation des 2 points de vue simultanés des données STEREO permettra de s'affranchir de ce type de problèmes.

taille du cube (rayons solaires)	nombre de voxels du cube	taille des projections (radians)	nombre de pixels des projections
1x1x0.05	64x64x4	$5e^{-5} \times 5e^{-5}$	128x8 5

(a) Paramètres géométriques

RSB	λ	μ	ν	S_x	S_G
5	$2e^{-2}$	100	0	$2e^{-2}$	$1e^{-2}$

(b) Paramètres d'optimisation

TAB. 1 – Paramètres de la simulation

3.2 Données réelles

La figure 2 présente les résultats obtenus avec les données SOHO, précurseur de STEREO. Certains pré-traitement ont été fait sur les données. En particulier, nous marquons comme données manquantes les pixels frappés par des rayons cosmiques. La valeur trop importante de ces pixels permet de les

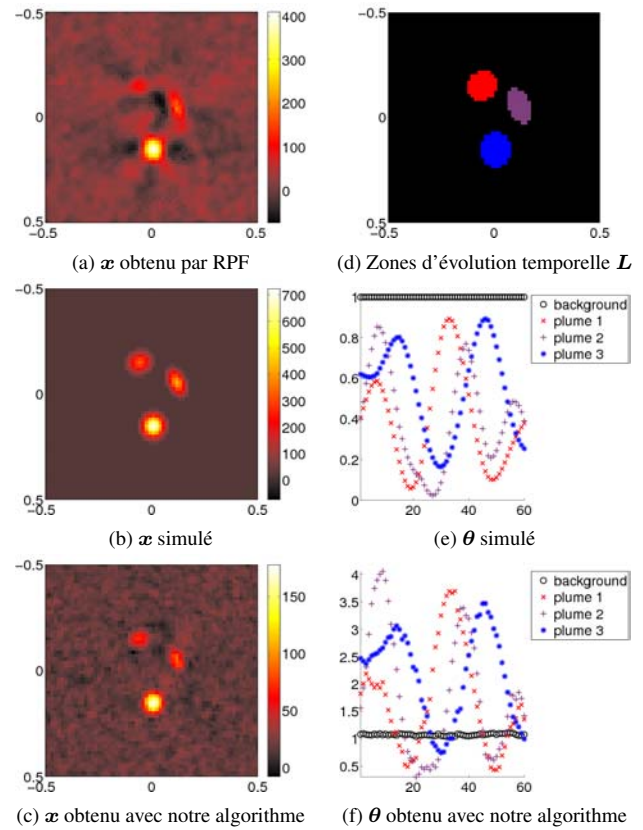


FIG. 1 – Comparaison de notre méthode, la méthode RPF et l'objet simulé. L'objet est reconstruit à partir de 60 projections espacées régulièrement sur 180° . θ est défini en associant un instant à chaque projection. x décrit la densité volumique d'émission. θ est un gain en émission variant avec le temps. Hormis pour la reconstruction par RPF, seul le produit $x \cdot \theta$ a une dimension physique. Les distances sont en rayons solaires et repérées par rapport à l'axe de rotation du Soleil.

repérer grâce à un filtre médian. Avec les blocs de données non transmis, ils ne contribuent pas à la reconstruction. Les données utilisés ont été prise entre le 1er novembre 1996 et le 14 novembre 1996 (soit environ une demi-rotation) à une longueur d'onde de 17,1 nm. Les images ne sont pas prises à un intervalle de temps et de longitude régulier. On peut remarquer la forte diminution du nombre de voxels négatifs et de l'intensité de leurs valeurs. Puisqu'on sait que ces valeurs ne sont pas physiques, cela atteste de l'amélioration apportée par l'introduction d'une évolution temporelle. On peut regretter par contre la présence de quelques valeurs de θ négatives. Deux hypothèses importantes pour ce résultat sont le choix des zones d'évolution et la vitesse de rotation des plumes. On a choisi pour les zones temporelle de prendre les régions les plus intenses dans une reconstruction sans évolution temporelle. Pour ce qui est de la vitesse de rotation, on a choisi la vitesse Carrington, mais la vitesse de rotation est en réalité mal connue près des pôles du Soleil et on sait que le Soleil n'a pas une rotation parfaitement rigide.

taille du cube (rayons solaires)	nombre de voxels du cube	taille des projections (radians)	nombre de pixels des projections
3x3x0.15	256x256x8	$2.55e^{-5}$ $\times 2.55e^{-5}$	512x38

(a) Paramètres géométriques

λ	μ	ν	S_x	S_G
$2e^{-2}$	$1e^4$	0	0.1	0.05

(b) Paramètres d'optimisation

TAB. 2 – Paramètres de la reconstruction avec données SOHO

4 Conclusion

Nous avons exposé une méthode de reconstruction tomographique de la couronne solaire prenant en compte l'évolution temporelle des plumes polaires. Une reconstruction à partir de données simulées démontre l'efficacité de notre optimisation en supposant que l'on connaît la position des plumes et la vitesse de rotation du Soleil.

Nous montrons ensuite qu'il est possible d'estimer l'évolution temporelle des plumes à partir de données réelles. Pour ce faire, dans ce travail, nous assimilons les zones temporelles aux zones les plus intenses. On pourrait envisager d'utiliser d'autres sources d'informations pour localiser les plumes. Il serait également envisageable d'estimer la position des plumes ainsi que les hyperparamètres.

5 Remerciements

Nicolas Barbey remercie le Centre National d'Études Spatiales et Collecte Localisation Satellites pour leur support dans leur cadre de sa thèse. Les auteurs remercient également les rapporteurs pour la pertinence de leurs remarques.

Références

- [1] R. A. Howard, J. D. Moses, D. G. Socker, K. P. Dere et J. W. Cook, « Sun earth connection coronal and heliospheric investigation (SECCHI) », *Advances in Space Research*, vol. 29, pp. 2017–2026, August 2002.
- [2] F. Natterer, *The mathematics of computerized tomography*, John Wiley, 1986.
- [3] A. C. Kak et M. Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, IEEE Press, New York, NY, 1987.
- [4] A. H. Gabriel, L. Abbo, F. Bely-Dubau, A. Llebaria et E. Antonucci, « Solar Wind Outflow in Polar Plumes from 1.05 to 2.4 R_{solar} », *ApJ*, vol. 635, pp. L185–L188, December 2005.
- [5] A. Llebaria, F. Saez et P. Lamy, « The fractal nature of the polar plumes », in *ESA SP-508: From Solar Min to Max: Half a Solar Cycle with SOHO*, A. Wilson, Ed., June 2002, pp. 391–394.
- [6] R. Frazin, M. Butala, A. Kemball et F. Kamalabadi, « Time-dependent Reconstruction of Nonstationary Ob-

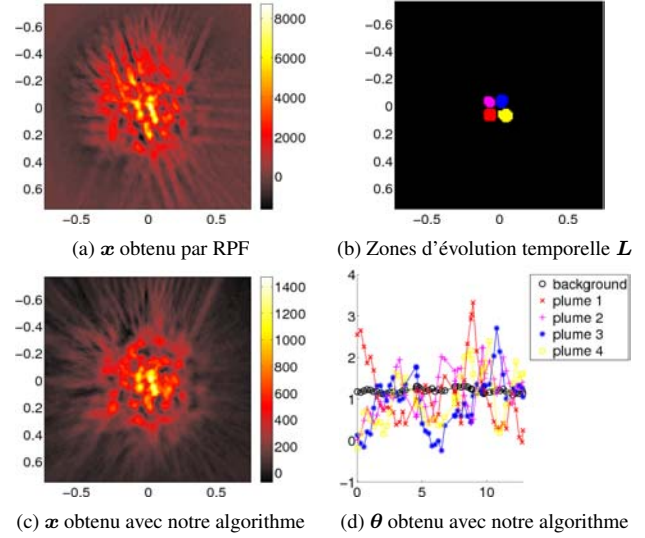


FIG. 2 – Comparaison des résultats de RPF et de notre algorithme en utilisant les données SOHO. x est la densité volumique d'émission intégrée sur la bande passante de l'instrument autour de 17,1 nm. θ est un gain en émission variant avec le temps. Hormis pour la reconstruction par RPF, seul le produit $x \cdot \theta$ a une dimension physique. Les distances sont en rayons solaires et repérées par rapport à l'axe de rotation du Soleil. Les zones définissant L sont numérotées dans le sens anti-trigonométrique en partant d'en bas à gauche

jects with Tomographic or Interferometric Measurements », *The Astrophysical Journal*, vol. 635, n°2, pp. L197–L200, 2005.

- [7] R. E. Kalman, « A new approach to linear filtering and prediction problems », *J. Basic Engng.*, vol. 82-D, pp. 35–45, 1960.
- [8] R. L. Siddon, « Fast calculation of the exact radiological path for a three-dimensional CT array », *Medical Physics*, vol. 12, pp. 252–255, 1985.
- [9] G. Demoment, « Image reconstruction and restoration: Overview of common estimation structure and problems », *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-37, n°12, pp. 2024–2036, December 1989.
- [10] J. Nocedal et S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Series in Operations Research. Springer Verlag, New York, 2000.