

Analyse temps-fréquence des signaux vectoriels par modélisation autorégressive bilatérale

A. KACHA¹, F. GRENEZ¹, K. BENMAHAMMED²

¹Service Ondes et Signaux, Faculté des Sciences Appliquées, Université Libre de Bruxelles

Av. F.D. Roosevelt 50, CP 165/51 B-1050 Bruxelles, Belgique

{akacha, fgrenez}@ulb.ac.be

²Département Electronique, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université de Sétif, Sétif 19000, Algérie

khierben@ieec.org

Résumé – Dans cet article, on propose un modèle autorégressif (AR) bilatéral vectoriel temps-variant pour l'analyse temps-fréquence des signaux multicanaux (vectoriels). L'échantillon courant du signal d'un canal donné est exprimé comme une somme des échantillons passés et futurs de ce canal ainsi que ceux des autres canaux pondérés symétriquement. Les paramètres multidimensionnels du modèle AR bilatéral vectoriel supposés temps-variant sont modélisés par une combinaison linéaire d'un ensemble de fonctions de base. L'algorithme des moindres carrés récursif (RLS) est utilisé pour estimer les coefficients de la combinaison linéaire. Le modèle AR bilatéral vectoriel nécessite un ordre plus petit que celui du modèle AR vectoriel conventionnel pour accomplir une meilleure résolution dans le plan temps-fréquence. Des résultats numériques sont fournis afin de comparer la distribution temps-fréquence à base du modèle AR bilatéral la distribution de Choi-Williams et à celle basée sur le modèle AR unilatéral conventionnel.

Abstract – In this paper, we propose a time-varying vector two-sided autoregressive (VTAR) model for time-frequency analysis of multichannel signals. In VTAR modeling, the current sample of the signal in some channel is estimated by a symmetrically weighted sum of past and future samples of this channel as well as of the other channels. The multi-dimensional VTAR parameters are assumed to be time-varying and they are modeled as a linear combination of a set of basis functions. The recursive least squares (RLS) algorithm is used to estimate the coefficients of the linear combination. The VTAR model requires a smaller order than the conventional vector autoregressive (VAR) model to achieve better resolution in the time-frequency plane. Numerical examples are given in order to compare the VTAR-based time-frequency distribution with Choi-Williams distribution and conventional VAR-based time-frequency distribution.

1. Introduction

L'analyse des signaux non stationnaires nécessite le recours à des distributions temps-fréquence permettant de montrer l'évolution du contenu spectral du signal au cours du temps. Plusieurs représentations temps-fréquence ont été développées durant les trois dernières décades. La distribution de Wigner-Ville et le spectrogramme sont deux distributions non paramétriques populaires. Le développement de distributions temps-fréquence caractérisées par une bonne résolution temps-fréquence et présentant une grande aptitude à la suppression des termes d'interférence est d'un intérêt considérable. La distribution de Choi-Williams est un exemple de distribution temps-fréquence à termes d'interférence réduits [1].

Une autre classe de représentations temps-fréquence est basée sur la modélisation paramétrique. Le signal est décrit par un modèle et le problème est alors réduit à celui de la détermination des paramètres du modèle. Les modèles autorégressifs (AR) temps-invariant largement utilisés en analyse spectrale ont été étendus au cas temps-variant pour

l'analyse des signaux non stationnaires [2]. Dans [3], une distribution temps-fréquence à base de prédicteur linéaire bilatéral où un modèle temps-variant combine les échantillons passés et futurs a été proposée comme alternative au modèle AR usuel. Il a été montré que la distribution temps-fréquence à base du modèle de la prédiction linéaire bilatérale possède des performances, en terme de résolution temps-fréquence, supérieures à celles de la distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR conventionnel.

Dans des applications telles que l'analyse d'électro-encéphalogrammes et le traitement des données spatiales, les signaux sont obtenus à partir de plusieurs capteurs (canaux) résultant en des processus vectoriels. Etant donné la relation entre les signaux issus des différents capteurs, un modèle vectoriel permettant la modélisation conjointe des signaux est plus approprié. L'information pertinente peut être extraite des spectres propres des canaux individuels ou des spectres croisés des paires de canaux.

Le problème de la modélisation AR vectorielle temps-variant a été considéré dans plusieurs travaux. Dans [4], un

algorithme récursif basé sur un filtre à structure en treillis circulaire a été utilisé pour calculer les coefficients de corrélation partielle instantanés. La modélisation des paramètres du modèle AR vectoriel comme des variables aléatoires suivie d'une procédure de filtrage de Kalman pour les estimer a aussi été envisagée dans ce contexte [5].

L'objectif de cet article est de proposer une approche à base de modélisation AR bilatérale vectorielle temps-variant pour l'analyse temps-fréquence des signaux vectoriels. Le modèle AR vectoriel bilatéral temps-variant est une extension de la version scalaire du modèle AR bilatéral utilisé dans plusieurs applications comme alternative au modèle AR conventionnel [6]. Dans la modélisation AR bilatérale vectorielle, l'échantillon courant du signal dans un certain canal est estimé comme une somme pondérée symétrique des échantillons passés et futurs de ce canal ainsi que ceux des autres canaux. Les paramètres multidimensionnels temps-variant du modèle AR bilatéral vectoriel sont modélisés comme une combinaison linéaire d'un ensemble de fonctions de base et l'algorithme des moindres carrés récursif est utilisé pour estimer les coefficients de la combinaison linéaire. L'utilisation du modèle AR bilatéral vectoriel nécessite un ordre plus petit que celui du modèle AR unilatéral pour obtenir une meilleure résolution temps-fréquence.

2. Modèle AR bilatéral vectoriel temps-variant

La représentation AR bilatérale temps-variant d'ordre p du processus vectoriel $\mathbf{x}(n)$ M -dimensionnel est obtenue à partir de la version scalaire [3] en remplaçant les coefficients scalaires par des matrices, ce qui donne

$$\mathbf{x}(n) = -\sum_{i=1}^p \mathbf{B}_i(n-i)(\mathbf{x}(n-i) + \mathbf{x}(n+i)) + \mathbf{v}(n) \quad (1)$$

où $\mathbf{B}_i(n)$, $i = 1, \dots, p$ sont les paramètres de dimensions $M \times M$ du modèle AR bilatéral vectoriel et $\mathbf{v}(n) = [v_1(n) \ v_2(n) \ \dots \ v_M(n)]^T$ est un bruit vectoriel de matrice de covariance $\Sigma_v(n)$ de dimension $M \times M$. La matrice de distribution temps-fréquence à base du modèle AR bilatéral s'exprime alors comme [4]

$$\mathbf{P}(n, f) = \mathbf{B}^{-1}(n-1, z) \Sigma_v(n) \mathbf{B}^{-T}(n-1, z^{-1}) \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} \quad (2)$$

où $\mathbf{B}(n, z)$ est la matrice de dimension $M \times M$ donnée par

$$\mathbf{B}(n, z) = \mathbf{I}_M + \sum_{i=1}^p \mathbf{B}_i(n) (z^{-i} + z^i).$$

avec \mathbf{I}_M désignant la matrice identité de dimension $M \times M$. Chaque élément diagonal de $\mathbf{P}(n, f)$ montre la distribution d'un canal dans le plan temps-fréquence alors que les éléments non diagonaux montrent les distributions croisées des paires de canaux dans le plan temps-fréquence.

3. Estimation des paramètres multidimensionnels

Si les coefficients matriciels $\mathbf{B}_i(n)$ de dimensions $M \times M$ sont lentement variables, ils peuvent être exprimés comme une combinaison linéaire de fonctions de base

$$\mathbf{B}_i(n) = \sum_{j=0}^m \mathbf{B}_{ij} f_j(n), \quad i = 1, \dots, p \quad (3)$$

où \mathbf{B}_{ij} , $i = 1, \dots, p$; $j = 0, \dots, m$ sont des constantes matricielles de dimension $M \times M$ à calculer. Dans cet article, les polynômes de Legendre ont été utilisés comme fonctions de base. En utilisant (3), chaque terme de l'expression donnée par (1) peut être exprimé comme

$$\mathbf{B}_i(n-i)(\mathbf{x}(n-i) + \mathbf{x}(n+i)) = \sum_{j=0}^m \mathbf{B}_{ij} f_j(n-i)(\mathbf{x}(n-i) + \mathbf{x}(n+i)) \quad (4)$$

En définissant le vecteur X_{n-i} de dimension $M(m+1) \times 1$ par

$$X_{n-i} = \begin{bmatrix} f_0(n-i)(\mathbf{x}(n-i) + \mathbf{x}(n+i)) \\ f_1(n-i)(\mathbf{x}(n-i) + \mathbf{x}(n+i)) \\ \vdots \\ f_m(n-i)(\mathbf{x}(n-i) + \mathbf{x}(n+i)) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, p, \quad (5)$$

l'équation (1) devient

$$\mathbf{x}(n) = -\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{B}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{n-1} \\ X_{n-2} \\ \vdots \\ X_{n-p} \end{bmatrix} + \mathbf{v}(n) \quad (6)$$

où

$$\mathbf{B}_i = [\mathbf{B}_{i0} \ \mathbf{B}_{i1} \ \dots \ \mathbf{B}_{im}], \quad i = 1, \dots, p$$

sont des matrices de dimensions $M \times M(m+1)$. L'équation (1) peut être réécrite sous la forme

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_M(n) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11}^T & \mathbf{b}_{12}^T & \dots & \mathbf{b}_{1p}^T \\ \mathbf{b}_{21}^T & \mathbf{b}_{22}^T & \dots & \mathbf{b}_{2p}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_{M1}^T & \mathbf{b}_{M2}^T & \dots & \mathbf{b}_{Mp}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{n-1} \\ X_{n-2} \\ \vdots \\ X_{n-p} \end{bmatrix} + \mathbf{v}(n) \quad (7)$$

où

$$\mathbf{b}_{ki} = [b_{k1}^{(i0)} \ b_{k2}^{(i0)} \ \dots \ b_{kM}^{(i0)} \ \dots \ b_{k1}^{(im)} \ b_{k2}^{(im)} \ \dots \ b_{kM}^{(im)}]^T$$

avec $b_{kl}^{(ij)}$ dénotant l'élément (k, l) de la matrice \mathbf{B}_{ij} . En égalisant les deux membres de l'équation matricielle (7), on obtient l'ensemble des M équations suivant

$$x_i(n) = -\begin{bmatrix} X_{n-1}^T & X_{n-2}^T & \dots & X_{n-p}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_i + v_i(n), \quad i = 1, \dots, M \quad (8)$$

où $\theta_i = [b_{i1}^T \ b_{i2}^T \ \dots \ b_{ip}^T]^T$ est un vecteur de dimension $M(m+1)p \times 1$.

La minimisation de l'erreur quadratique moyenne dans chaque canal fournit

$$E \left(\begin{bmatrix} X_{n-1} \\ \vdots \\ X_{n-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{n-1}^T & \dots & X_{n-p}^T \end{bmatrix} \right) \theta_i = -E \left(\begin{bmatrix} X_{n-1} \\ \vdots \\ X_{n-p} \end{bmatrix} x_i(n) \right), \quad i = 1, \dots, M. \quad (9)$$

L'équation (9) possède une forme similaire à celle de l'équation développée dans le cas scalaire [3] à l'exception que les vecteurs X_{n-i} , $i = 1, \dots, p$ sont formés en utilisant les échantillons des signaux issus de tous les canaux. Le vecteur des paramètres courant θ_i est estimé en utilisant l'algorithme des moindres carrés récursif. La matrice de covariance peut être estimée en la modélisant comme une combinaison linéaire des mêmes fonctions de base f_{ij} .

4. Résultats de simulation

Les performances du modèle AR bilatéral vectoriel temps-variant pour l'analyse temps-fréquence des signaux vectoriels sont illustrées par des signaux synthétiques et comparées à celles de la distribution temps-fréquence à base du modèle AR unilatéral conventionnel et à la distribution de Choi-Williams [1]. Le paramètre d'échelle qui contrôle la réduction des termes d'interférence versus la résolution temps-fréquence dans la distribution de Choi-Williams a été fixé à 0.5.

Pour illustrer la grande résolution de la distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR vectoriel bilatéral temps-variant, un signal vectoriel de dimension $M=2$, de longueur $N = 500$ échantillons, a été généré à une fréquence $f_s = 1$ kHz selon l'expression suivante

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.8 & -0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

où $s_1(n)$ et $s_2(n)$ sont deux chirps linéaires et $w_1(n)$ et $w_2(n)$ sont deux séquences de bruit blanc Gaussien. Les fréquences instantanées des deux composantes $s_1(n)$ et $s_2(n)$ varient de 50 Hz à 100 Hz et de 57 Hz à 107 Hz, respectivement. Le rapport signal à bruit dans chaque canal est de 20 dB. Les quatre premiers polynômes de Legendre ont été utilisés dans la décomposition des coefficients matriciels temps-variant.

On peut observer sur les figures 1-a et 1-b que les distributions propres de Choi-Williams de chaque canal montrent une seule composante. Les contributions des deux chirps sont confondues dans le plan temps-fréquence. La distribution temps-fréquence croisée basée sur la méthode de Choi-Williams (Figure 1-c) montre deux composantes légèrement séparées et caractérisées par un élargissement autour de la loi de la fréquence instantanée. L'amplitude des termes d'interférences est plus faible dans

la distribution croisée que dans les distributions propres de sorte que les composantes apparaissent plus nettement.

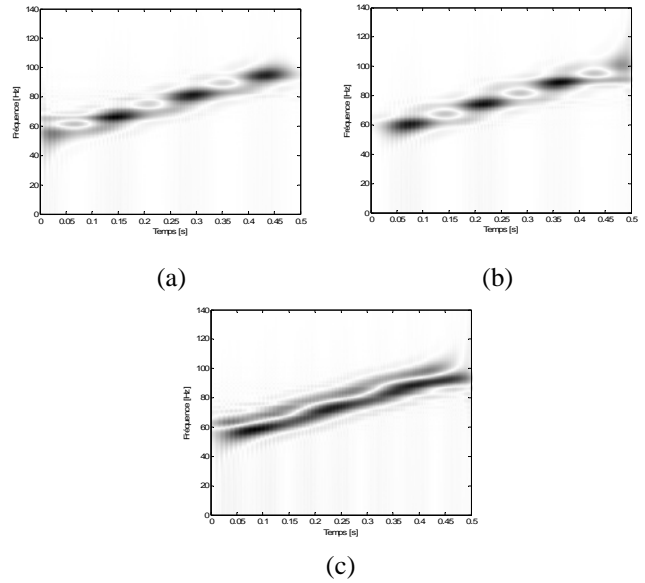


Fig. 1 : Distributions de Choi-Williams propres (a, b) et croisée (c) du signal vectoriel à deux composantes.

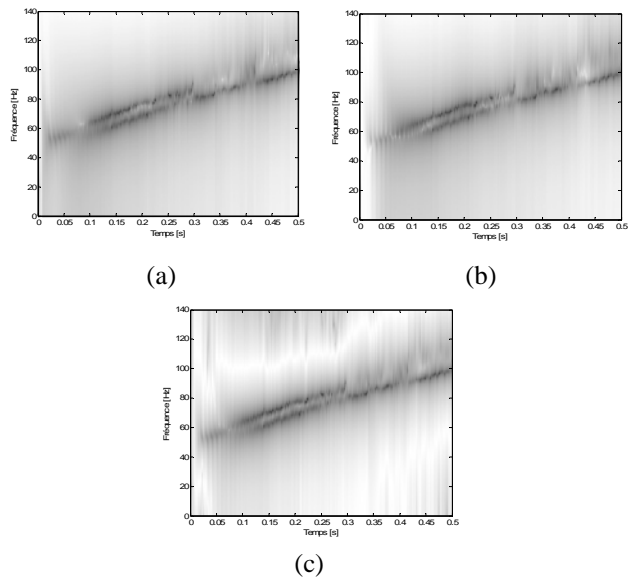


Fig. 2 : Distributions temps-fréquence propres (a, b) et croisée (c) basées sur le modèle AR vectoriel unilatéral ($p = 4$) du signal vectoriel à deux composantes.

Les distributions propres des canaux 1 et 2 ainsi que la distribution temps-fréquence croisée basées sur un modèle vectoriel AR unilatéral d'ordre $p=4$ sont incapables de discerner de manière précise les deux composantes dans la totalité du plan temps-fréquence comme illustré sur la figure 2. Les distributions temps-fréquence propres des canaux 1 et 2 utilisant un modèle AR vectoriel bilatéral ainsi que la distribution croisée montrées sur les figures 3-a, 3-b et 3-c, respectivement, font apparaître clairement deux composantes distinguables fortement concentrées

autour de la loi théorique linéaire de la fréquence instantanée. Notons qu'un ordre $p = 2$ a été utilisé pour le modèle AR vectoriel bilatéral. Comme dans le cas scalaire, le modèle AR vectoriel bilatéral renforce les pics spectraux conduisant à une amélioration de la résolution de la distribution temps-fréquence.

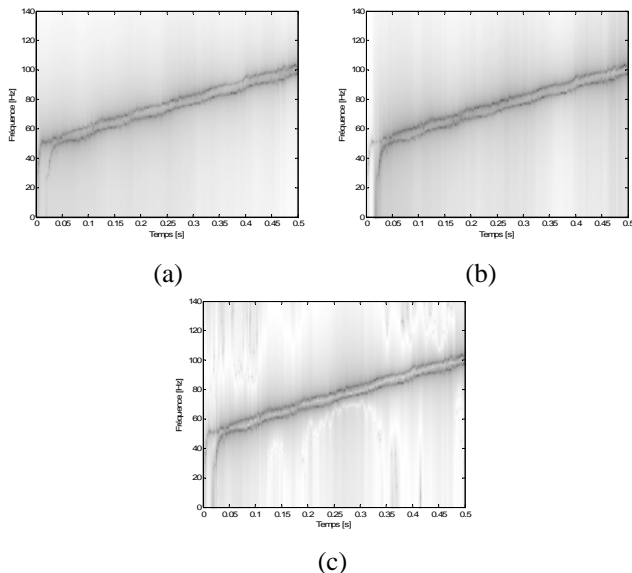


Fig. 3 : Distributions temps-fréquence propres (a, b) et croisée (c) basées sur le modèle AR vectoriel bilatéral ($p = 2$) du signal vectoriel à deux composantes.

Des simulations ont été effectuées sur des signaux dont les composantes se croisent dans le plan temps-fréquence. Comme illustration, la figure 4 montre les distributions croisées de Choi-Williams et à base de modèles AR vectoriels unilatéral et bilatéral d'un signal à deux composantes ayant pour première composante un chirp linéaire dont la fréquence instantanée varie de 57 Hz à 107 Hz et pour seconde composante un chirp quadratique dont la fréquence instantanée augmente non linéairement de 50 Hz à 175 Hz. Le rapport signal à bruit de chaque canal est de 25 dB.

Comme le montre la figure 4-a, la distribution de Choi-Williams ne permet pas de discerner clairement les deux composantes entre les instants 0 s et 0.35 s. De même, entre les instants 0 s et 0.15 s, la distribution temps-fréquence à base du modèle AR vectoriel unilatéral d'ordre $p=4$ (Fig. 4-b) est incapable de discerner clairement les deux composantes. La distribution temps-fréquence basée sur un modèle AR vectoriel bilatéral d'ordre $p=2$ montre avec clarté deux composantes dans la totalité du plan temps-fréquence comme observé sur la figure 4-c.

5. Conclusion

Le modèle AR vectoriel bilatéral nécessite un ordre plus faible que celui du modèle unilatéral pour accomplir une meilleure résolution temps-fréquence. La distribution temp-fréquence utilisant le modèle AR vectoriel bilatéral a

montré une performance supérieure à celle des deux autres distributions en terme de résolution temps-fréquence. En effet, elle permet de discerner deux composantes ayant des fréquences instantanées très proches que ni la distribution de Choi-Williams ni la distribution basée sur le modèle AR vectoriel unilatéral ne permettent de distinguer avec clarté.

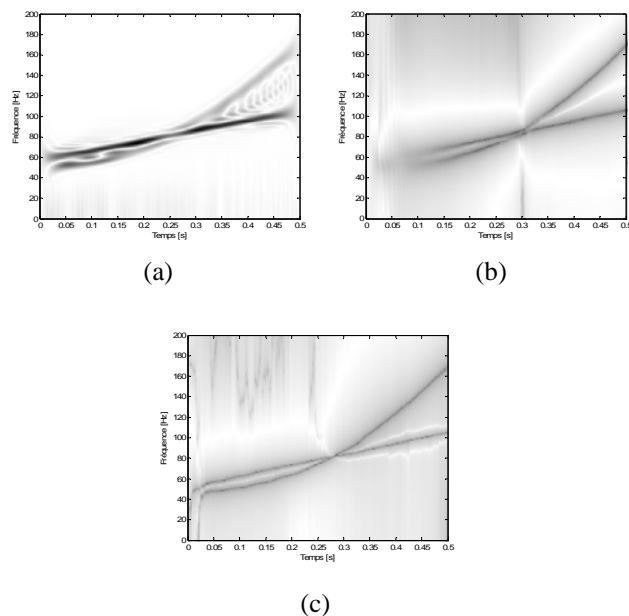


Fig. 4 : Distributions temps-fréquence croisées basées sur la méthode de Choi-Williams (a), le modèle AR vectoriel unilatéral d'ordre $p = 4$ (b) et le modèle AR vectoriel bilatéral d'ordre $p = 2$ (c) du signal vectoriel à deux composantes se croisant dans le plan temps-fréquence.

Références

- [1] H. I. Choi et W. J. Williams, Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels, *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, 37, no. 6, p. 862-871, 1989.
- [2] Y. Grenier, Time-dependent ARMA modeling of nonstationary signals, *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. 31, no. 4, p. 899-911, 1983.
- [3] A. Kacha, F. Grenez et K. Benmahammed, Time-frequency analysis and instantaneous frequency estimation using two-sided linear prediction, *Signal Processing*, vol. 85, no. 3, p. 491-503, 2005.
- [4] W. Gersch et D. Stone. Multichannel time varying autoregressive modelling: A circular lattice-smoothness priors realization. *Proceedings of the 29th IEEE Conf. Decis. Contr.*, p. 859-860, 1990.
- [5] M. Arnold et al. Adaptive AR modeling of nonstationary time series by means of Kalman filtering. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 45, no. 5, p. 553-562, 1998.
- [6] J. Hsu et A. -E. Yagle. Similarities and differences between one-sided and two-sided linear prediction. *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, no. 1, p. 345-349, 1995.