

Analyse angulaire des champs aléatoires à anisotropie fonctionnelle

Marie-Cécile PÉRON¹, Éric DELÉCHELLE¹, Steve GUYOT²

¹Laboratoire d'Images, Signaux et Systèmes Intelligents, EA-3956
61, avenue du Général de Gaulle, 94100 Créteil Cedex, France

²Laboratoire de Physique des Interfaces et des Couches Minces
École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France

peron@univ-paris12.fr,
delechelle@univ-paris12.fr,
steve-guyot@polytechnique.edu

Résumé – La transformée de Riesz, associée à un modèle de distribution circulaire, est utilisée pour étudier le champ fractionnaire anisotrope à travers la mesure des directions locales. Plus particulièrement, nous montrons comment l'étude des incréments des ces directions locales permet de retrouver la fonction d'anisotropie.

Abstract –

The transform of Riesz, associated to a model of circular distribution, is used to study the anisotropic fractional field through the measurement of the local directions. More particularly, we show how the study of the local directions increments makes it possible to find the function of anisotropy.

1 Introduction

Les processus fractionnaire sont caractérisés par un certain nombre de propriétés telles que l'invariance d'échelle, qui est définie par une densité spectrale en la loi de puissance. C'est pourquoi de tels processus sont souvent utilisés comme modèles pour des phénomènes naturels aléatoires. Les processus fractionnaires tirent leur particularité du paramètre de Hurst. Ce dernier permet la description de l'ensemble des propriétés d'invariance d'échelle (auto-similarité, dépendance à longue échelle, régularité locale). L'extension de ces processus à des dimensions supérieures nécessite la prise en compte des propriétés d'anisotropie et de directionnalité.

Or, la notion d'anisotropie est liée à la variation du paramètre de Hurst en fonction de l'angle d'analyse dans l'image, définissant ainsi une fonction d'anisotropie, notée $h(\theta)$. Il existe de nombreuses méthodes d'estimation de cette fonction d'anisotropie. Pour la plupart, elles sont basées sur l'estimation du paramètre de Hurst dans différentes directions, tel que la Méthode des Moyennes Directionnelles (MMD) [4] ou encore les K-variations [1]. Enfin de compte, ces estimations s'appuient toutes sur l'étude de la variance des niveaux de gris des champs fractionnaires. Dans cet article, nous présentons une méthode permettant d'obtenir la fonction d'anisotropie à partir de la statistique angulaire des champs fractionnaires et plus particulièrement à partir de la distribution des incréments de la direction locale. Cette dernière est obtenue à partir de la transformée de Riesz. L'étude consiste donc à modéliser les incréments des directions locales des champs à l'aide

de distributions circulaires. L'évolution des paramètres extraits de ce modèle conduit à la fonction d'anisotropie du champ fractionnaire considéré.

2 Synthèse des champs fractionnaires

2.1 Champs fractionnaires isotropes

Les méthodes développées, afin de synthétiser des champs aléatoires, tentent de répondre aux problèmes de modélisation ou de simulation de phénomènes naturels tels que le bruit de speckle dans les images radar (SAR), ou encore les images échographiques. Il existe un grand nombre de méthodes de synthèses. Celle utilisée dans ce papier est une méthode spectrale. Il est possible de définir le bruit Gaussien fractionnaire (bGf) à partir d'une densité spectrale de puissance, définit de la façon suivante [6] :

$$S_H \propto \sigma^2 |\omega|^{-(2H-1)} \quad (1)$$

où H est le paramètre de Hurst. A une dimension supérieur la densité spectrale d'un bGf s'exprime par la relation suivante

$$S_H(\omega) \propto \sigma^2 |\omega|^{-(2H-2+d)} \quad (2)$$

avec $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d)^T$. Pour générer un champ fractionnaire isotrope réelle à l'aide de cette méthode, il faut remplir un vecteur complexe dont le module varie en $1/|\omega|^{(2H-2+d)}$ et dont la phase aléatoire respecte la symétrie hermitique. Enfin l'obtention du champ fractionnaire correspondant, s'effectue en calculant la transformée de Fourier inverse.

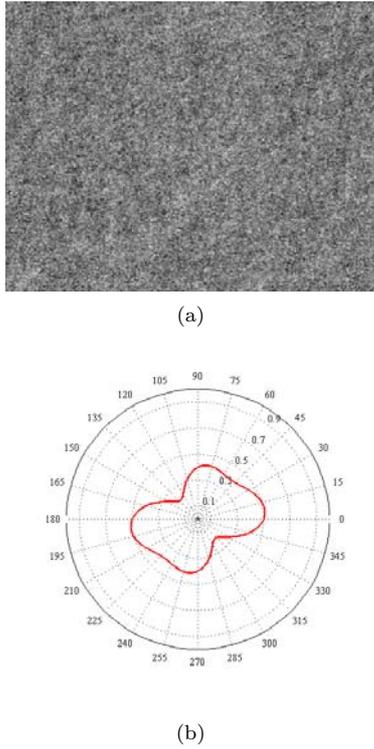


FIG. 1 – Anisotropie fonctionnelle : (a) Réalisation du champ fractionnaire obtenue par la modélisation fractale 2D pour une fonction d’anisotropie donnée par l’équation (4). (b) Représentation polaire de la fonction d’anisotropie.

2.2 Champs fractionnaires anisotropes

Dans le cas de l’anisotropie fonctionnelle, le champ fractionnaire est défini dans le domaine spectral par un paramètre de Hurst variable suivant la direction θ . La densité spectrale de puissance s’exprime de la façon suivante :

$$\omega \rightarrow \frac{1}{|\omega|^{h(\theta)+n}}. \quad (3)$$

où $h(\theta)$ est la fonction d’anisotropie. Cette fonction varie entre 0 et 1. Ainsi, les caractéristiques directionnelles du champs fractionnaires dépendent de la définition de $h(\theta)$. Dans le cadre de ce papier la fonction d’anisotropie choisi pour synthétiser nos champs fractionnaires anisotropes est la suivante [7] :

$$h(\theta) = a_1 \cos(\theta) + b_1 \sin(\theta) + a_2 \cos^2(\theta) + b_2 \sin^2(\theta) \quad (4)$$

avec $a_1 = \frac{1}{2}(H_{11} - H_{12})$, $a_2 = \frac{1}{2}(H_{11} + H_{12})$ et $b_1 = \frac{1}{2}(H_{21} - H_{22})$ et $b_2 = \frac{1}{2}(H_{21} + H_{22})$, et $\theta = \arctan \frac{\omega_x}{\omega_y}$. Dans l’expression (4), H_1 et H_2 sont les vecteurs, qui fournissent la valeurs des paramètre dans 4 directions ($0^\circ - 180^\circ$, $45^\circ - 225^\circ$, $90^\circ - 270^\circ$, $135^\circ - 315^\circ$).

Fig.1, nous avons représenté un exemple d’un tel champ anisotrope, pour un $H_1 = [0.5, 0.4]$ et $H_2 = [0.4, 0.2]$.

3 Analyse du signal Monogénique

L’étude des propriétés locales d’un signal est souvent utilisée afin de le caractériser. Les méthodes d’estimation de la phase et de l’amplitude locales sont basées sur la définition du signal analytique obtenu à l’aide de la transformée de Hilbert. Dans le cas des images, l’obtention du signal analytique requiert la généralisation de son expression à 2 dimensions. Cette dernière se réduit à la généralisation de la transformée de Hilbert, par la transformée de Riesz. Dans le cas 2D, la phase locale est alors associée à une information géométrique additionnelle, l’orientation locale [3].

Plus précisément en dimension n , la fonction de transfert de la transformée de Riesz est égale à $\mathbf{H}(\omega) = -\frac{i\omega}{|\omega|}$ où $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T$. Dans l’espace à 2 dimensions, la transformée de Riesz de f a alors pour expression :

$$\mathbf{f}_R = (\mathbf{h} * f)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (h_1 * f)(\mathbf{x}) \\ (h_2 * f)(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (5)$$

où $\mathbf{x} = (x, y)$, h_1 et h_2 sont les noyaux de convolutions de la fonction de transfert \mathbf{H} définie par :

$$h_1 = \frac{x}{2\pi |\mathbf{x}|^3}, \quad h_2 = \frac{y}{2\pi |\mathbf{x}|^3} \quad (6)$$

La combinaison de l’image, $f(\mathbf{x})$ et de sa transformée de Riesz forme une généralisation 2D du signal analytique, appelée *image monogénique*, $\mathbf{f}_M(\mathbf{x})$ qui est définie de la façon suivante

$$\mathbf{f}_M(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}), \mathbf{f}_R(\mathbf{x}))^T \quad (7)$$

En passant en coordonnées polaires, il est possible de définir respectivement l’amplitude locale A , la phase locale ϕ , et la direction locale θ par les relations suivantes

$$A = |\mathbf{f}_M|, \quad \phi = \arctan 2 \frac{|\mathbf{f}_R|}{f}, \quad \theta_0 = \arctan \frac{f_2}{f_1} \quad (8)$$

où la fonction \arctan est définie dans l’intervalle $[-\pi, \pi]$ et la fonction $\arctan 2$ est défini dans $[0, \pi]$.

Dans cette article, nous nous intéressons uniquement à l’analyse des incréments de la direction locale et plus particulièrement à leur distribution dans le cadre de l’étude des champs fractionnaires. Tout d’abord, afin de quantifier les différentes distributions, nous introduisons un modèle basé sur les distributions circulaires.

4 Distribution circulaire

4.1 Distribution de von Mises

La distribution de von Mises peut être vue comme la version circulaire de la distribution normale. Elle permet la description de phénomènes aléatoires directionnelles. La forme générale de la fonction de densité de probabilité de von Mises pour un angle θ est donnée par

$$\rho_0(\theta; \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp(\kappa \cos(\theta - \mu)) \quad (9)$$

où I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d’ordre 0. Les paramètres μ et $\kappa \geq 0$ représentent respectivement la localisation et la concentration de la distribution. Récemment, une nouvelle famille de distributions circulaires, appelée *ψ -distributions*, a été introduite.

4.2 ψ -distributions

Jones et Pewsey [5] ont introduit une nouvelle famille de distributions circulaires. Les distributions qui appartiennent à cette famille ont pour densité de probabilité

$$\rho_\psi(\theta; \mu, \kappa) = \frac{(\cosh \kappa\psi + \sinh \kappa\psi \cos(\theta - \mu))^{1/\psi}}{2\pi P_{1/\psi}^0(\cosh \kappa\psi)} \quad (10)$$

où μ et κ sont définis comme étant les paramètres de localisation et de concentration de manière équivalente aux paramètres de la distribution de von Mises, et où $\psi \in \mathbb{R}$ définit le type de la distribution. Dans l'expression 10, $P_p^r(z)$ est la fonction de Legendre associée de première espèce de degré p et d'ordre r .

La famille de ψ -distributions inclus, comme cas particulier, la distribution de von Mises pour $\psi \rightarrow 0$, la distribution de Cauchy pour $\psi = -1$ et la distribution cardioïde pour $\psi = 1$. La ψ -distribution est une distribution unimodale. Notre étude sur les champs va donc s'effectuer par l'analyse des paramètres extraits de ce modèle.

5 Étude des incréments de direction

Dans un précédent article [2], nous avons étudié les incréments des directions monogéniques de champs fractionnaires isotropes et nous avons montré comment à partir de leur modélisation par une distribution circulaire, l'on pouvait obtenir le paramètre de Hurst. De la même façon, nous allons étudier les incréments des directions d'un champs fractionnaires anisotropes, afin d'obtenir la fonction d'anisotropie $h(\theta)$.

Le calcul des incréments D_δ des directions consiste à voir comment les directions voisines sont couplées, et est défini par

$$D_\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} d_\delta(\mathbf{x}) & -\pi \leq d_\delta < \pi \\ d_\delta(\mathbf{x}) \mp 2\pi & d_\delta \gtrless \pm \pi \end{cases} \quad (11)$$

où $d_\delta(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x} + \delta) - \theta(\mathbf{x})$ et $\delta = (\delta_x, \delta_y)^T$. L'incrément des directions D_δ mesure la différence de directions monogéniques de la texture pour un voisinage donnée. Le calcul des incréments peut s'effectuer pour différentes orientations et des amplitudes de pas différentes. Fig.2, nous avons représenté la distribution empirique des ces incréments, calculés pour un pas $\delta = 1$, et pour plusieurs orientations, notée $\angle\delta$.

Quelque soit l'orientation, nous obtenons une distribution des incréments unimodale et centrée en $\mu = 0$. D'autre part, l'étude a montré que le paramètre ψ oscille toujours autour de la même valeur soit $\psi \approx -0.9$. Par conséquent, l'analyse va se concentrer sur le paramètre de concentration κ . L'évolution de la fonction $\rho = \tanh \kappa(\angle\delta)$ pour toutes les orientations de calcul d'incrément $\angle\delta$, est représentée à la Fig.3. ρ présente une forme quasiment isotrope lorsque $\delta = 1$. Elle ne permet pas d'accéder à une information quelconque quant à la fonction d'anisotropie.

En revanche, en augmentant l'amplitude du pas du calcul des incréments, et en observant l'évolution de la $\tanh \kappa(\angle\delta)$

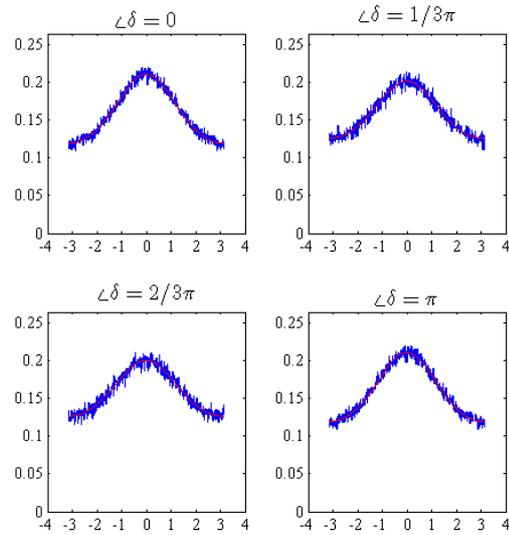


FIG. 2 – Distribution des incréments de directions dans différentes directions $\angle\delta$.

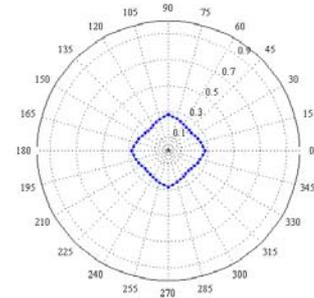


FIG. 3 – Évolution de $\rho = \tanh \kappa(\angle\delta)$ pour $\delta = 1$.

(multiplié par l'amplitude du pas, afin de rendre le résultat plus lisible), nous constatons que la fonction $\tanh \kappa(\angle\delta)$, pour tout $\angle\delta$ tend vers une forme semblable à la fonction d'anisotropie, comme cela est illustré à la Fig.4(a).

De façon empirique, nous avons constaté qu'il est possible de relier le paramètre extrait du modèle à la fonction d'anisotropie à l'aide d'une relation linéaire. Nous obtenons alors la relation suivante ; soit

$$h_{est}(\angle\delta) \approx a\delta \tanh \kappa(\angle\delta) + b \quad (12)$$

où a et b représentent respectivement le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine. Ils dépendent de l'amplitude du pas. Dans le cas de l'exemple présenté le pas est $\delta = 5$, et nous obtenons comme valeur $a = 1.1862$, et $b = 0.0217$, l'illustration de cette exemple se trouve à la Fig.4(b)

Cependant lorsque nous allons au-delà de ce pas, la relation (12) est perdue. En effet, la fonction décrite par le paramètre du modèle devient de plus en plus chaotique à mesure que nous augmentons l'amplitude du pas. Il existe donc un pas optimal qui permet d'obtenir la fonction d'anisotropie du champ aléatoire fractionnaire.

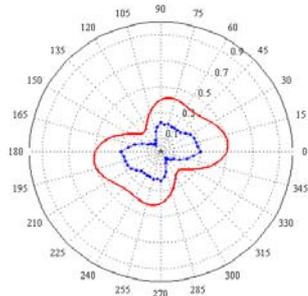
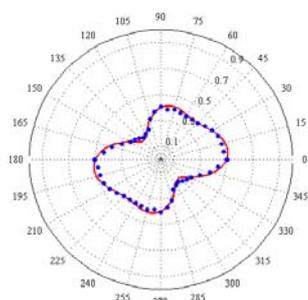
(a) $\delta \tanh \kappa(\angle \delta)$ pour $\delta = 5$ (b) $h_{est}(\theta)$ (point) et $h(\theta)$ (trait plein)

FIG. 4 – Estimation de la fonction d’anisotropie **(a)** Fonction $h(\theta)$ et fonction $\delta \tanh \kappa(\angle \delta)$, **(b)** Fonction d’anisotropie estimée à partir des paramètres du modèle.

6 Conclusion

A partir de la modélisation, par une ψ -distribution, des incréments des directions locales d’un champ fractionnaire, nous étudions l’évolution du paramètre extrait de ce modèle. Il existe un pas optimal pour lequel, les incréments ainsi calculés permettent d’estimer la fonction d’anisotropie. L’estimation de cette dernière s’effectue alors à partir d’une simple relation linéaire dépendante du paramètre du modèle. Des études complémentaires peuvent être menées afin de compléter ces résultats notamment par l’estimation du pas optimal. Nous pouvons également étendre cette approche à l’analyse de champs aléatoires multifractionnaires ou à anisotropie topologique

Références

- [1] BONAMI, A., et A. ESTRADÉ. “Anisotropic analysis of some Gaussian models”. Dans : *J. Fourier Anal. Appl.* 9 (2003). 215–236.
- [2] DELÉCHELLE, E., M.C. PÉRON et S. GUYOT. “Circular Statistic of Fractional Fields”. Dans : *IEEE Signal Processing Letters* 14.4 (2007). 275–278.
- [3] FELSBERG, M., et G. SOMMER. “The monogenic Scale-Space : A Unifying Approach to Phase-Based Image Processing in Scale-Space”. Dans : *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 21 (2004). 5–26.

- [4] JENNANE, R., R. HARBA, E. PERRIN, A. BONAMI et A. ESTRADÉ. “Analyse des champs browniens fractionnaires anisotropes”. Dans : *18e colloque GRESTI*. 2001. 99–102.
- [5] JONES, M.C ., et A. PEWSEY. “A family of symmetric distributions on the circle”. Dans : *Journal of The American Statistical Association* 100.472 (2005). 1422–1428.
- [6] MANDELBROT, B.B. *The fractal geometry of nature*. Éd. par San-Francisco W.H. FREEMAN. 1982.
- [7] YANG, Z.Y., C.C. DI et S.C. LO. “Two-dimensional Hurst Index of Joint Surfaces”. Dans : *Rock Mechanics and Rock Engineering* 34 (2001). 323–345.