

# Estimation de décalages subpixéliques par ajustement de la phase des signaux complexes

A. BASARAB<sup>1</sup>, C. GRAVA<sup>2</sup>, V. BUZULOIU<sup>3</sup>, P. DELACHARTRE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>CREATIS, CNRS UMR5220, Inserm U630, INSA-Lyon, F-69621, France, <sup>2</sup>Laboratoire d'Electronique Appliquée, Faculté de Génie Electrique et Technologie d'Information, Oradea, Roumanie, <sup>3</sup>Laboratoire d'Analyse et Traitement d'Images, Université Politehnica de Bucarest, Roumanie

**Résumé** – Une nouvelle méthode d'estimation de décalages subpixéliques basée sur une forme à priori des signaux et appliquée à l'estimation du mouvement en échographie est présentée. Ainsi, un estimateur au sens des moindres carrés et qui utilise la phase des signaux analytiques multidimensionnels est proposé. Nous montrons que cet estimateur, par rapport à un estimateur classique de détection du maximum de la fonction de corrélation, donne des meilleurs résultats pour des images faiblement échantillonnées.

**Abstract** – This paper investigates the subsample shift estimation between two-dimensional signals and its application to motion tracking with ultrasound images. Using a given signal model, the proposed method is based on least-squares estimation between theoretical and measured phases of multi-dimensional analytical signals. We show that our method gives more accurate results for low sampled data compared to classical maximum of correlation estimator.

## 1. Introduction

L'estimation des décalages subpixéliques peut être utilisée dans plusieurs domaines, dont le domaine médical auquel nous nous intéressons ici. La plupart des méthodes d'estimation du mouvement en échographie [1] sont basées sur la minimisation de fonctions de coût telles que la somme des différences absolues ou la corrélation [2]. Comme les décalages à estimer sont localement très inférieurs à la résolution spatiale des images échographiques, les méthodes évoquées auparavant nécessitent une interpolation préalable des signaux, qui s'avère être coûteuse en temps de calcul et en précision.

Notre méthode se propose, à partir d'un modèle à priori des signaux [3], d'estimer directement des décalages subpixéliques utilisant la phase de deux signaux analytiques multidimensionnels. Les signaux analytiques sont obtenus à partir du signal de départ et de ces transformées de Hilbert multidimensionnelles.

L'application à l'imagerie de l'élasticité par échographie montre que notre estimateur donne des résultats aussi bons que l'estimateur par maximum de corrélation après interpolation d'un facteur 9 des images.

## 2. Modèle de signal discret

Le modèle de signal considéré est un cosinus bidimensionnel pondéré par une fenêtre notée  $w$ , comme le montre l'équation (1). Liebgott et al. [3] ont montré la possibilité de former des images échographiques qui suivent localement le modèle de signal donné en (1). Les lettres minuscules indiquent les signaux dans le domaine spatial et les majuscules leurs transformées de Fourier.

$$r(m, n) = \cos(2\pi f_1(m - \Delta_1)) \cdot \cos(2\pi f_2(n - \Delta_2)) \cdot w(m, n) \quad (1)$$

où  $m \in [m_1, m_2]$  et  $n \in [n_1, n_2]$ ,  $f_1$  et  $f_2$  sont les fréquences sur chaque direction,  $w(m, n)$  est la fenêtre de pondération et  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont les décalages à estimer.

Notre méthode d'estimation utilise les concepts de transformée de Hilbert et de signal analytique. Pour des signaux unidimensionnels, la transformée de Hilbert [4] d'une fonction quelconque  $f(t)$ , qu'on notera ici  $f_H(t)$ , est définie dans le domaine de Fourier par :

$$F_H(u_1) = -j \operatorname{sgn}(u_1) F(u_1), \quad (2)$$

avec

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \\ -1 & \text{pour } x < 0 \end{cases}. \quad (3)$$

Ainsi, le signal analytique d'une fonction réelle 1-D est défini par :

$$f_1(t) = f(t) + j f_H(t). \quad (4)$$

Dans le domaine fréquentiel, le signal analytique d'une fonction unidimensionnelle a la propriété de ne garder que la partie droite du spectre de la fonction initiale, correspondant aux fréquences positives.

$$F_1(u_1) = \begin{cases} 2 F(u_1) & \text{pour } u_1 > 0 \\ F(u_1) & \text{pour } u_1 = 0 \\ 0 & \text{pour } u_1 < 0 \end{cases} \quad (5)$$

Par analogie avec le cas 1-D, la transformée de Hilbert peut être définie pour les signaux bi-directionnels. Parmi les définitions de la transformée de Hilbert multidimensionnelle que nous pouvons trouver dans la

littérature [5, 6, 7], nous allons en retenir trois, comme le montrent les équations (6), (7) et (8).

$$R_{H_2}(u_1, u_2) = -\text{sgn}(u_1)\text{sgn}(u_2)R(u_1, u_2) \quad (6)$$

$$R_{H_2}^1(u_1, u_2) = -j\text{sgn}(u_1)R(u_1, u_2) \quad (7)$$

$$R_{H_2}^2(u_1, u_2) = -j\text{sgn}(u_2)R(u_1, u_2) \quad (8)$$

A partir des transformées de Hilbert que nous venons de définir, nous pouvons construire deux signaux analytiques notés  $r_1(m, n)$  et  $r_2(m, n)$  et dont les transformées de Fourier s'écrivent :

$$R_1(u_1, u_2) = (1 + \text{sgn}(u_1))(1 + \text{sgn}(u_2))R(u_1, u_2) \quad (9)$$

$$R_2(u_1, u_2) = (1 - \text{sgn}(u_1))(1 + \text{sgn}(u_2))R(u_1, u_2) \quad (10)$$

La figure 1 montre les spectres de ces deux signaux analytiques. Contrairement au cas 1-D, chaque signal analytique 2-D pris séparément ne permet pas de reconstruire le signal de départ.

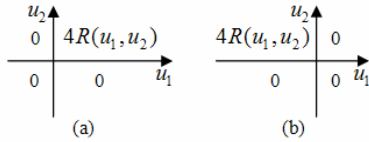


Fig. 1 : Spectres des signaux analytiques (a)  $r_1(m, n)$  et (b)  $r_2(m, n)$ .

Compte tenu de la forme du signal  $r(m, n)$  et en utilisant des relations trigonométriques élémentaires, nous en déduisons la forme spatiale des deux signaux analytiques introduits auparavant. Les relations (11) et (12) sont valables sous l'hypothèse que la fenêtre de pondération  $w(m, n)$  a un support spectral disjoint du cosinus 2-D.

$$r_1(m, n) = w(m, n) \exp(j(2\pi f_1(m - \Delta_1) + 2\pi f_2(n - \Delta_2))) \quad (11)$$

$$r_2(m, n) = w(m, n) \exp(j(2\pi f_2(n - \Delta_2) - 2\pi f_1(m - \Delta_1))) \quad (12)$$

On en déduit les phases de  $r_1(m, n)$  et  $r_2(m, n)$ , qu'on notera  $\phi_1(m, n)$  et  $\phi_2(m, n)$  :

$$\phi_1(m, n) = 2\pi f_1(m - \Delta_1) + 2\pi f_2(n - \Delta_2) \quad (13)$$

$$\phi_2(m, n) = 2\pi f_2(n - \Delta_2) - 2\pi f_1(m - \Delta_1) \quad (14)$$

### 3. Méthode

Nous rappelons que le but de notre méthode est d'estimer, à partir du signal donné en (1), les décalages que nous avons appelés  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ . Pour cela, nous proposons une méthode qui utilise la phase des deux signaux complexes introduits auparavant. Le principe est de minimiser l'erreur quadratique entre les phases mesurées et leurs formes théoriques. Notons cependant que même si les expressions (13) et (14) laissent apparaître des

plans de phase sur tout le domaine de définition du signal  $r$ , en pratique nous avons à faire avec des sauts de phase qui impliquent l'apparition de plusieurs plans parallèles. Ainsi, avant de comparer les plans de phase mesurés à leurs formes théoriques, nous utilisons un algorithme qui nous conduit à choisir des intervalles réduits sur  $m$  et  $n$  sur lesquels il n'y a pas de saut de phase ni pour  $\phi_1(m, n)$  ni pour  $\phi_2(m, n)$ .

*Algorithme de détection des plans de phase :*

A. Initialisation :

- Point  $(m_0, n_0)$  autour duquel on extrait les plans.
- Définir un seuil  $S$  sur les dérivées des phases à partir duquel on considère qu'il y a un saut de phase.
- Calculs des dérivées numériques partielles des deux phases, par différences finies à un pas :  $\phi_i(m+1, n) - \phi_i(m, n)$  et  $\phi_i(m, n+1) - \phi_i(m, n)$ ,  $i = \overline{1, 2}$

B. Seuillage :

- On procède à un seuillage des images dérivées définies au point A (initialisation).
- On calcule le produit des quatre images dérivées après seuillage.
- On procède à un seuillage de l'image finale afin de délimiter les régions pour lesquelles il n'y a pas de saut de phase ni pour  $\phi_1(m, n)$  ni pour  $\phi_2(m, n)$ . Un exemple classique d'image obtenue est donné figure 2.

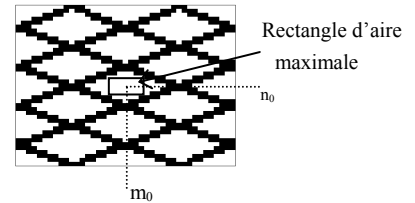


Fig. 2 : Spectres des signaux analytiques (a)  $r_1(m, n)$  et (b)  $r_2(m, n)$ .

C. Extraction des plans de phase :

- A partir du point initial  $(m_0, n_0)$ , nous détectons le rectangle d'aire maximale qui ne contient pas de sauts de phase, comme le montre la figure 2. On note  $(M_1, M_2)$  et  $(N_1, N_2)$  les limites du rectangle et donc les domaines de définition des deux plans de phase mesurés.

La minimisation de l'erreur quadratique entre les plans de phase mesurés et leurs expressions théoriques peut alors s'écrire :

$$(\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2) = \Omega_1 \cap \Omega_2, \quad (15)$$

où

$$\Omega_i = \left\{ (\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2) \in \mathbb{R}^2 \mid J_i(\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2) = \min_{(\Delta_1, \Delta_2) \in \mathbb{R}^2} (J_i(\Delta_1, \Delta_2)) \right\} \quad (16)$$

$i = \overline{1, 2}$ .  
avec

$$\begin{aligned}
J_1(\Delta_1, \Delta_2) &= \sum_{m=M_1}^{M_2} \sum_{n=N_1}^{N_2} \left[ 2\pi f_1(m - \Delta_1) + 2\pi f_2(n - \Delta_2) - \hat{\phi}_1(m, n) \right]^2 \\
J_2(\Delta_1, \Delta_2) &= \sum_{m=M_1}^{M_2} \sum_{n=N_1}^{N_2} \left[ 2\pi f_2(n - \Delta_2) - 2\pi f_1(m - \Delta_1) - \hat{\phi}_2(m, n) \right]^2,
\end{aligned} \quad (17)$$

où  $\hat{\phi}_1(m, n)$  et  $\hat{\phi}_2(m, n)$  sont les phases mesurées. En dérivant chaque expression en (17) par rapport à  $\Delta_1$

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}_1 &= \frac{M_1 + M_2}{2} - \frac{1}{4\pi f_1(M_2 - M_1 + 1)(N_2 - N_1 + 1)} \sum_{m=M_1}^{M_2} \sum_{n=N_1}^{N_2} [\hat{\phi}_1(m, n) - \hat{\phi}_2(m, n)] \\
\hat{\Delta}_2 &= \frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{1}{4\pi f_2(M_2 - M_1 + 1)(N_2 - N_1 + 1)} \sum_{m=M_1}^{M_2} \sum_{n=N_1}^{N_2} [\hat{\phi}_1(m, n) + \hat{\phi}_2(m, n)]
\end{aligned} \quad (18)$$

#### 4. Validation

Afin de valider l'estimateur, nous proposons une simulation numérique dans laquelle la fenêtre de pondération du signal de départ est une gaussienne 2-D et dans laquelle nous considérons des pas de  $1/f_{e1}$  et respectivement  $1/f_{e2}$  sur chaque direction.

$$r(m, n) = \cos(2\pi f_1(m - \Delta_1)) \cdot \cos(2\pi f_2(n - \Delta_2)) \times \exp\left(-\pi \left(\frac{m - \Delta_1}{\sigma_1}\right)^2\right) \cdot \exp\left(-\pi \left(\frac{n - \Delta_2}{\sigma_2}\right)^2\right) \quad (19)$$

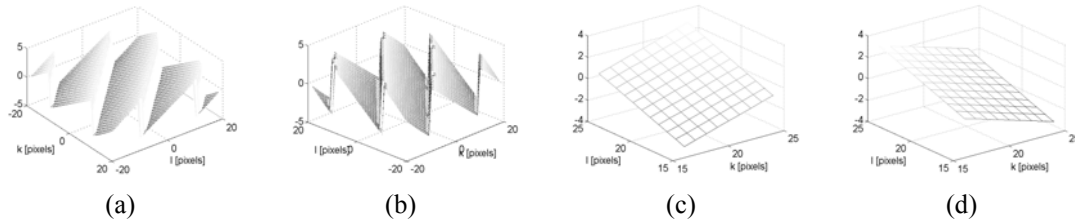


Fig. 3 : Phase (a)  $\hat{\phi}_1(m, n)$ , (b)  $\hat{\phi}_2(m, n)$ . Plans de phase extraits de (c)  $\hat{\phi}_1(m, n)$ , (d)  $\hat{\phi}_2(m, n)$ .

Avec le signal donné en (19) et avec les données numériques de la *simulation 1*, nous avons testé le comportement de notre estimateur en présence de bruit sur le signal  $r$ . Les résultats sont comparés avec ceux obtenus avec un estimateur classique qui détecte le maximum du signal  $r$ , correspondant en théorie au couple  $(\Delta_1, \Delta_2)$ . Comme cet estimateur est très dépendant de la résolution du signal  $r$  et pour mettre en évidence uniquement son comportement vis-à-vis du bruit, nous prenons numériquement des fréquences d'échantillonnage 10 fois

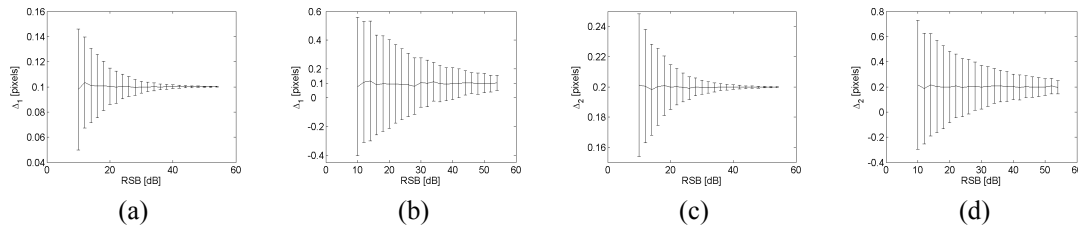


Fig. 4 : Estimations de (a)  $\Delta_1$  et (c)  $\Delta_2$  avec notre estimateur après **décimation d'un facteur 10** du signal  $r$  et (b)  $\Delta_1$  et (d)  $\Delta_2$  avec estimateur par maximum de  $r$  **sans décimation du signal** en présence de bruit pour différents RSB.

et  $\Delta_2$  et en annulant ces dérivées, nous nous retrouvons avec un système de deux équations avec deux inconnues qui nous conduit à la forme de notre estimateur, donnée en (18).

Plus de détails concernant les propriétés statistiques de l'estimateur par ajustement de la phase des signaux complexes peuvent être trouvés dans [8].

Numériquement nous considérons :

*Simulation 1* :  $m_1 = n_1 = -19; m_2 = n_2 = 19;$

$f_1 = f_2 = 0,05; f_{e1} = f_{e2} = 1; \sigma_1 = \sigma_2 = 30; \Delta_1 = 0,1; \Delta_2 = 0,2$

Les phases des deux signaux analytiques ainsi que les deux plans de phase extraits qui vont servir à l'estimation sont montrés sur la figure 3.

plus grandes. Ainsi, l'estimateur par maximum du signal sera testé avec les données numériques suivantes :

*Simulation 2* :  $m_1 = n_1 = -19; m_2 = n_2 = 19;$

$f_1 = f_2 = 0,05; f_{e1} = f_{e2} = 10; \sigma_1 = \sigma_2 = 30; \Delta_1 = 0,1; \Delta_2 = 0,2$

Dans les deux cas nous avons considéré un bruit gaussien et des rapports signal à bruit (RSB) allant de 10 à 55 dB. Pour chaque niveau du RSB nous avons répété l'estimation 512 fois. La figure 4 montre les valeurs moyennes et les écart-types que nous avons obtenus pour notre estimateur et pour l'estimateur classique.

Nous pouvons observé sur la figure 4 que notre estimateur donne des résultats nettement meilleurs que l'estimateur classique (des écarts-types 4 fois plus petits), et cela après une décimation d'un facteur 10, sur chaque direction, du signal  $r$ .

## 5. Application

Nous avons utilisé l'estimateur par ajustement de phase dans le cadre de l'imagerie de l'élasticité des tissus mous par échographie. Cette technique, appelée aussi élastographie, consiste à caractériser les tissus humains du point de vue de leur élasticité à partir des images ultrasonores acquises à différents niveaux de compression du milieu étudié. La première étape consiste à estimer le mouvement entre les images échographiques ainsi acquises. Pour cela, nous utilisons une méthode par mise en correspondance des blocs [1], dont l'estimation locale des translations est effectuée avec notre estimateur. Il s'avère que pour des images échographiques spécifiques [3], la fonction de corrélation localement calculées entre des telles images suit le modèle du signal considéré en (1).

Dans l'exemple donné ci-dessous, qui représente un milieu homogène (de module de Young 50 kPa) avec une inclusion cylindrique de 100 kPa, le déplacement entre les images échographiques a été simulé avec un logiciel d'éléments finis. Les images ont été simulées en utilisant un modèle acoustique linéaire implémenté dans le logiciel Field [9]. La figure 5 montre le champ de déplacement 2-D estimé et superposé à l'image initiale, ainsi que les cartes des déformations axiales obtenues par dérivation du champ axial du déplacement (utilisant notre estimateur, avec un estimateur classique et à partir du déplacement imposé). Comme nous disposons du vrai déplacement entre les images, nous considérons comme critère d'erreur l'écart type de l'erreur absolue entre le déplacement imposé et ceux estimés. Ainsi, nous obtenons 1,2 $\mu$ m avec notre estimateur et 1,3 $\mu$ m avec l'estimateur par maximum de corrélation (facteur d'interpolation 9) pour le déplacement axial, respectivement 13,4 $\mu$ m et 13 $\mu$ m pour le déplacement latéral. La figure 5 montre que l'inclusion est clairement visible sur l'image des déformations alors qu'elle ne l'est pas sur l'image échographique.

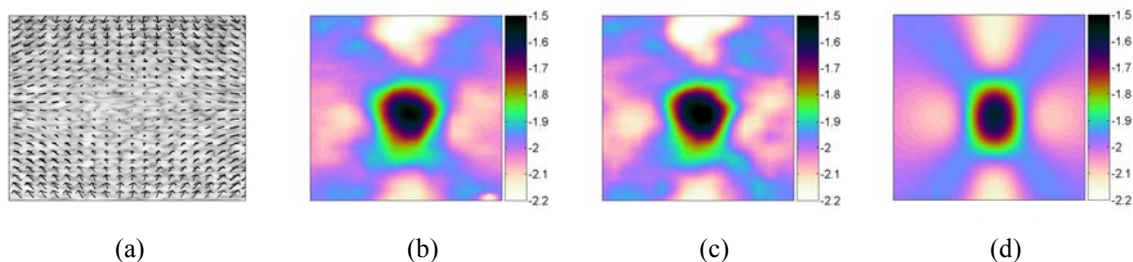


Fig. 5 : Champ 2-D du déplacement estimé (a) et cartes des déformations axiales en % (b) avec notre estimateur **sans interpolation des images**, (c) avec un estimateur classique par maximum de corrélation et **facteur d'interpolation 9**, (d) vraie

## Références

- [1] P. Delachartre, H. Liebgott, F. Lacouture, A. Lyshchik, T. Higashi, R. Asato. *Modélisation bilinéaire et estimation du déplacement pour l'imagerie de l'élasticité appliquée au cancer de la thyroïde*. Traitement du signal, 2006. 23(3/4): p. 235-245
- [3] H. Liebgott, A. Giachetti. *Matching techniques to compute image motion*. Image and Vision Computing, 2000. 18(3): p. 247-260.
- [3] H. Liebgott, J. Wilhjelm, A. Jensen, D. Vray, P. Delachartre, *PSF dedicated to estimation of displacement vectors for tissue elasticity imaging with ultrasound*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control 54(4):746-756, 2007.
- [4] F. de Coulon. *Théorie et traitement des signaux*. 1984: Dunod, Paris.
- [5] T. Bulow, G. Sommer. *A novel approach to the 2D analytic signal*. Proceeding of the 8th International Conference of Images and Patterns. 25 - 32, 1999. London, UK: Springer-Verlag.
- [6] S.L. Hahn. *Multidimensional complex signals with single-orthant spectra*. Proceedings of the IEEE, 1992. 80(8): p. 1287-1300.
- [7] T. Bulow, G. Sommer. *Hypercomplex signals-a novel extension of the analytic signal to the multidimensional case*. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001. 49(11): p. 2844-2852.
- [8] A. Basarab, H. Liebgott, C. Grava, P. Delachartre. *Two-Dimensional Sub-Sample Shift Estimation Using Plane Phase Fitting*. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. II-1152-II-1155, 2006.
- [9] J.A. Jensen. *Field: A Program for Simulating Ultrasound Systems*. Medical & Biological Engineering & Computing, 1996. 34(Supplement 1, Part 1): p. 351-353.