

# Partitionnement optimal de l'image par minimisation d'un critère d'uniformité globale\*

Luc KLAINE<sup>1</sup>, Kacem CHEHDI<sup>2</sup>, Benoit VOZEL<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup>Équipe TSI2M de l'IETR de l'Université de Rennes I  
6 rue de Kerampont, BP 80518, 22305 Lannion Cedex

luc.klaine@enssat.fr,

kacem.chehdi@enssat.fr,

benoit.vozel@enssat.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous décrivons une méthode de réduction de l'information et d'homogénéisation des régions de l'image par transformation d'histogramme. Le traitement s'appuie sur une procédure de multi-seuillage et une procédure d'optimisation d'un critère d'uniformité globale. Le nombre de modes est supposé connu tandis que la position des seuils significatifs est déterminée automatiquement. L'étude des minima est effectuée sur le modèle continu avant d'être naturellement transposée au modèle discret. L'algorithme converge vers des seuils optimaux pour un coût d'implémentation très faible qui peuvent être utilisés pour superviser des méthodes de classification d'images bruitées utilisant *a priori* d'homogénéité.

**Abstract** – In this paper, we describe a method of reduction of information and homogenisation of the regions of the image by histogram transformation. The method is based on a procedure of multi-thresholding and a procedure of optimization of a criterion of global uniformity. The number of modes is supposed to be known and the position of the significant thresholds is automatically founded. The study of the minima is carried out on the continuous model before being naturally transposed to the discrete model. The algorithm converges towards optimal thresholds at a very weak cost of implementation which can be used to supervise methods of classification of disturbed images using *a priori* homogeneity.

## 1 Introduction

Le *multi-seuillage* est une technique de classification consistant à regrouper les valeurs comprises entre deux seuils consécutifs. Lorsqu'il est appliqué aux intensités lumineuses d'une image, il s'apparente à la fois à une méthode de quantification non-linéaire et à une méthode de segmentation des zones homogènes. Le résultat obtenu est une image simplifiée (appelée *image multi-seuillée*) constituée de régions non-connexes (identifiées aux *classes*).

Le procédé est largement utilisé préalablement à certains traitements ou au sein d'une chaîne de traitements. En segmentation par analyse de texture, il peut faciliter le calcul des attributs de texture et en limiter le coût d'implémentation [6, 8, 11, 7]. En filtrage myope, il peut représenter une étape importante du processus d'identification et d'estimation du bruit sur les zones homogènes [4, 3].

Les performances se mesurent en terme de limitation de la perte d'information, de préservation de l'uniformité. Une région est *uniforme* si la dispersion des niveaux de gris ou *variance intra-région* est faible. Une image multi-seuillée est dite *globalement uniforme* si les régions qui la composent le sont. L'*uniformité globale* correspond à la moyenne des variances intra-région pondérées par la taille des régions (*def.* 1.1).

**Définition 1.1** Soient  $u \in I^\Omega$  l'image initiale et  $u_h \in L^\Omega$  l'image multi-seuillée alors on définit la moyenne intra-région, la variance intra-région et l'uniformité globale par :

$$\text{moy}(u|u_h = m) \triangleq \frac{1}{|\Omega_m|} \sum_{(i,j) \in \Omega_m} u_{i,j}$$

\* Ces travaux sont financés par le Conseil Régional de Bretagne et le FEDER au travers du projet Interreg 3B PIMHAI.

$$\text{var}(u|u_h = m) \triangleq \frac{1}{|\Omega_m|} \sum_{(i,j) \in \Omega_m} |u_{i,j} - \text{moy}(u|u_h = m)|^2$$
$$\text{var}(u|u_h) \triangleq \frac{1}{|\Omega|} \sum_{m \in L} |\Omega_m| \text{var}(u|u_h = m)$$

où  $\Omega_m = \{u_h = m\}$  est la région de label  $m \in L$ .

L'objectif de l'article est de présenter une nouvelle méthode pour déterminer les meilleurs seuils au sens de l'uniformité globale. Les seuils optimaux peuvent être utilisés dans le cadre d'un multi-seuillage direct. Ils peuvent également être couplés avec des méthodes de classification d'images bruitées introduisant un *a priori* d'homogénéité [9, 2, 1].

Dans la **section 2**, l'énergie de partitionnement est définie comme une généralisation de l'uniformité globale. Les résultats théoriques se rapportant à l'existence et à la caractérisation d'un minimum y sont exposés.

Dans la **section 3**, nous présentons la suite de partitionnement qui correspond à l'algorithme de minimisation alternée et qui converge vers un minimum de l'énergie de partitionnement. Une attention toute particulière est portée sur la quantification linéaire.

Enfin, les résultats expérimentaux sont donnés dans la **section 4** afin d'illustrer l'efficacité de la méthode.

## 2 Approche variationnelle

L'originalité de l'approche proposée consiste à se donner un nouveau degré de liberté pour optimiser l'uniformité globale. L'idée est de remplacer la moyenne intra-région par une nouvelle donnée : le mode. Le critère ainsi obtenu est appelé *énergie de partitionnement*.

## 2.1 Optimisation de l'énergie de partitionnement

Les classes sont formées des intervalles compris entre deux seuils consécutifs. Les modes sont associés bijectivement aux classes. Ils fournissent chacun une valeur unique et caractéristique de la classe. Les seuils et les modes doivent être ordonnés de sorte que chaque mode soit compris entre deux seuils consécutifs. Les bornes de l'enveloppe convexe des intensités lumineuses  $C(I)$  sont notées  $s_0$  et  $s_N$ . Les vecteurs :

$$\vec{s} \triangleq (s_1, \dots, s_{N-1}) \in C(I)^{N-1} \text{ et } \vec{m} \triangleq (m_1, \dots, m_N) \in C(I)^N$$

sont respectivement appelés *vecteur des seuils* et *vecteur des modes*. L'espace affine  $(s_0, s_N) \times C(I)^{2N-1}$  s'identifie aisément par projection sur les  $2N - 1$  dernières coordonnées à l'espace vectoriel  $C(I)^{2N-1}$ . Par conséquent, on écrit indifféremment  $(\vec{s}, \vec{m})$  pour :

$$(s_1, \dots, s_{N-1}, m_1, \dots, m_N) \in C(I)^{2N-1}$$

ou bien pour :

$$(s_0, s_N, s_1, \dots, s_{N-1}, m_1, \dots, m_N) \in (s_0, s_N) \times C(I)^{2N-1}.$$

Supposons dès lors que les vecteurs des seuils et des modes vérifient  $s_0 < m_1 < s_1 < \dots < s_N$ . On peut alors définir l'énergie de partitionnement (déf. 2.1)

**Définition 2.1** Soit  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  une densité strictement positive alors on définit l'énergie de partitionnement associée par :

$$Q(h; \vec{s}, \vec{m}) \triangleq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_{s_{k-1}}^{s_k} h(t) |t - m_k|^2 dt \quad (1)$$

qui mesure la qualité de l'histogramme discret :

$$\sum_{k=1}^N \left[ \int_{s_{k-1}}^{s_k} h(s) ds \right] \delta(t - m_k)$$

comme approximation de la densité  $h(t)$ .

### 2.1.1 Formule d'extraction des seuils

les modes sont supposés connus. L'énergie de partitionnement admet un unique minimum caractérisé par annulation de la dérivée par rapport aux seuils. Il est donné par les milieux des intervalles compris entre deux modes consécutifs (prop. 2.1).

**Proposition 2.1** Soit  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  alors le meilleur vecteur des seuils  $\vec{s}$  connaissant le vecteur des modes  $\vec{m}$  est obtenu par :

$$s_k = S_k(\vec{m}) \triangleq (m_k + m_{k+1})/2. \quad (2)$$

On note  $\vec{S}(\vec{m})$  la fonction d'optimisation des seuils qui retourne le vecteur dont les composantes sont les  $S_k(\vec{m})$ .

PREUVE : On dérive par rapport à  $s_k$  pour rechercher les éventuels minima et on obtient formellement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial s_k}(h; \vec{s}, \vec{m}) &= \frac{1}{2} h(s_k) [(s_k - m_k)^2 - (s_k - m_{k+1})^2] \\ &= h(s_k) (m_{k+1} - m_k) [s_k - (m_k + m_{k+1})/2] \\ &= h(s_k) (m_{k+1} - m_k) [s_k - S_k(\vec{m})]. \end{aligned}$$

La dérivée est du signe de  $s_k - S_k(\vec{m})$  et ne dépend que de  $s_k$ . En particulier, elle s'annule pour  $s_k = S_k(\vec{m})$ . Le vecteur des seuils minimisant l'énergie de multi-seuillage vaut  $\vec{S}(\vec{m})$ . Comme  $h(\cdot) > 0$ , la dérivée ne s'annule que pour  $\vec{s} = \vec{S}(\vec{m})$  d'où le minimum est unique et strict. ■

**Proposition 2.2** Soit  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  alors la fonction d'optimisation des seuils minimise l'énergie de partitionnement au sens strict :

$$\vec{s} \neq \vec{S}(\vec{m}) \Rightarrow Q(h; \vec{S}(\vec{m}), \vec{m}) < Q(h; \vec{s}, \vec{m}).$$

### 2.1.2 Formule d'extraction des modes

les seuils sont supposés connus. L'énergie de partitionnement admet un unique minimum caractérisé par annulation de la dérivée par rapport aux modes. Il correspond aux moyennes pondérées entre deux seuils consécutifs (prop. 2.3).

**Proposition 2.3** Soit  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  alors le meilleur vecteur des modes  $\vec{m}$  connaissant le vecteur des seuils  $\vec{s}$  est obtenu par :

$$m_k = M_k(h; \vec{s}) \triangleq \left[ \int_{s_{k-1}}^{s_k} h(t) dt \right]^{-1} \left[ \int_{s_{k-1}}^{s_k} h(t) t dt \right]. \quad (3)$$

On note  $\vec{M}(h; \vec{s})$  la fonction d'optimisation des modes qui retourne le vecteur dont les composantes sont les  $M_k(h; \vec{s})$ .

PREUVE : On dérive par rapport à  $m_k$  pour rechercher les éventuels minima et il vient formellement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial m_k}(h; \vec{s}, \vec{m}) &= \int_{s_{k-1}}^{s_k} h(t) (m_k - t) dt \\ &= \left[ \int_{s_{k-1}}^{s_k} h(t) dt \right] [m_k - M_k(h; \vec{s})]. \end{aligned}$$

La dérivée est du signe de  $m_k - M_k(h; \vec{s})$  et ne dépend que de  $m_k$ . Elle s'annule simplement pour  $m_k = M_k(h; \vec{s})$ . Le vecteur des modes minimisant l'énergie de multi-seuillage vaut  $\vec{M}(h; \vec{s})$ . Comme  $h(\cdot) > 0$ , la dérivée ne s'annule que pour  $\vec{m} = \vec{M}(h; \vec{s})$  d'où le minimum est unique et strict. ■

**Proposition 2.4** Soit  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  alors la fonction d'optimisation des modes minimise l'énergie de partitionnement au sens strict :

$$\vec{m} \neq \vec{M}(h; \vec{s}) \Rightarrow Q(h; \vec{s}, \vec{M}(h; \vec{s})) < Q(h; \vec{s}, \vec{m}).$$

### 2.1.3 Formule d'extraction conjointe

ni les seuils ni les modes ne sont supposés connus. L'énergie de partitionnement admet au moins un minimum en vertu du théorème de point fixe de Schauder. De plus, si  $(\vec{s}, \vec{m})$  est un minimum local de l'énergie de partitionnement alors il annule les dérivées par rapport aux seuils et aux modes. En d'autres termes,  $\vec{s}$  stabilise  $\vec{S}(\vec{m})$  et  $\vec{m}$  stabilise  $\vec{M}(h; \vec{s})$ .

**Définition 2.2** Soit  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  alors on définit la fonction d'optimisation conjointe par :

$$\vec{SM}(h; \vec{s}, \vec{m}) \triangleq (\vec{S} \circ \vec{M}(h; \vec{s}), \vec{M}(h; \vec{s})). \quad (4)$$

Si le minimum existe, il est impossible de conclure quant à son unicité. Même lorsque l'histogramme est donné par une fonction continûment dérivable strictement positive. L'énergie de partitionnement est convexe par rapport aux seuils et aux modes séparément, elle ne l'est pas forcément simultanément. La fonction d'optimisation conjointe laisse cependant augurer de bons résultats (*prop.* 2.5).

**Proposition 2.5** Soit  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  alors la fonction d'optimisation conjointe minimise l'énergie de partitionnement au sens strict :

$$(\vec{s}, \vec{m}) \neq \overrightarrow{SM}(h; \vec{s}, \vec{m}) \Rightarrow Q(h; \overrightarrow{SM}(h; \vec{s}, \vec{m})) < Q(h; \vec{s}, \vec{m}).$$

## 2.2 Approximation et relaxation de l'énergie de partitionnement

Nous avons toujours supposé que  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  était une densité strictement positive. Que se passe-t-il si la densité  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}^+)$  passe par zéro ? Que se passe-t-il si  $h(\cdot) \in \mathcal{H}_I^+(C(I))$  est un histogramme discret ? Or justement dans la pratique,  $h(\cdot)$  sera toujours un histogramme discret.

### 2.2.1 Pour une densité positive

la définition de l'énergie de partitionnement reste valable. Les passages par zéro de la densité ne garantissent plus l'unicité des seuils optimaux lorsque les modes sont fixés. Toutefois, non seulement ils existent et réciproquement mais les minima donnés par les fonctions d'optimisation des seuils et des modes restent valables. Le cas des densités positives peut être vu comme un cas limite (limite uniforme) du cas des densités strictement positives (*prop.* 2.6).

**Proposition 2.6** Soit  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}^+)$  alors il existe des densités strictement positives  $h_\varepsilon(\cdot)$  telles que la famille  $Q(h_\varepsilon; \cdot, \cdot)$  converge uniformément vers  $Q(h; \cdot, \cdot)$ .

Par conséquent, la théorie de la  $\Gamma$ -convergence [5] assure que toute suite convergente de minima des  $Q(h_\varepsilon; \cdot, \cdot)$  converge vers un minimum de  $Q(h; \cdot, \cdot)$ .

### 2.2.2 Pour un histogramme discret

la définition et les propriétés de l'énergie de partitionnement doivent être étendues. Or la mesure ponctuelle des échantillons n'est pas nulle puisque la mesure associée n'est plus absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Concrètement, dans quelle classe faut-il mettre un échantillon  $x_j$  lorsqu'il coïncide avec un seuil  $s_k$  ? L'échantillon  $x_j$  doit logiquement être placé dans la classe pour laquelle sa contribution  $|x_j - m_k|^2$  est minimale. L'énergie de partitionnement des histogrammes discrets est obtenue par cumul des contributions de chacun des échantillons (*déf.* 2.3).

**Définition 2.3** Soit  $h(\cdot) = \sum_{j \in I} h_j \delta(\cdot - x_j) \in \mathcal{H}_I^+(C(I))$  alors

on définit l'énergie de partitionnement associée par :

$$Q(h; \vec{s}, \vec{m}) \triangleq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \sum_{x_j > s_k}^{x_j < s_{k+1}} h_j |x_j - m_k|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{x_j = s_k} h_j \min(|x_j - m_k|^2, |x_j - m_{k+1}|^2) \quad (5)$$

Les propriétés de l'énergie associée aux densités strictement positives se reportent sur celle associée aux histogrammes discrets. Le cas des histogrammes discrets est vu comme un cas limite du cas des densités strictement positives (*th.* 2.1).

**Théorème 2.1** Soit  $h(\cdot) \in \mathcal{H}_I^+(C(I))$  alors il existe des densités strictement positives  $h_\varepsilon(\cdot)$  telles que la famille  $Q(h_\varepsilon; \cdot, \cdot)$   $\Gamma$ -converge vers  $Q(h; \cdot, \cdot)$  pour la topologie usuelle de  $\mathbb{R}^{2N-1}$ .

De même, d'après la théorie de la  $\Gamma$ -convergence, un minimum de  $Q(h; \cdot, \cdot)$  peut être obtenu à l'aide d'une suite convergente de minima des  $Q(h_\varepsilon; \cdot, \cdot)$ .

## 3 Mise en œuvre et convergence

Il semble difficile d'envisager la minimisation directe de l'énergie de partitionnement. En effet, une méthode de descente risque de converger lentement vers un minimum. A l'inverse, la formulation explicite des seuils optimaux d'une part et des modes optimaux d'autre part, plaident en faveur de la minimisation alternée.

### 3.1 Convergence de la suite de partitionnement

La minimisation alternée de l'énergie de partitionnement est par conséquent l'algorithme le plus naturel. Elle permet de construire le minimum via la suite de partitionnement (*déf.* 3.1).

**Définition 3.1** Soient  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  et  $\vec{m}^0$  le vecteur des modes initial alors on définit la suite de partitionnement par :

$$\vec{s}^0 = \vec{S}(\vec{m}^0) \text{ et } (\vec{s}^{n+1}, \vec{m}^{n+1}) = \overrightarrow{SM}(h; \vec{s}^n, \vec{m}^n). \quad (6)$$

La suite converge vers un point fixe de la fonction d'optimisation conjointe (*th.* 3.1). En ce sens, la suite minimise l'énergie de partitionnement.

**Théorème 3.1** La suite de partitionnement converge vers un minimum de  $Q(h; \cdot, \cdot)$ .

### 3.2 Etude d'un exemple fondamental

Considérons le cas le plus simple d'une densité constante et normalisée. Elle correspond notamment à l'histogramme d'une image dont les niveaux de gris sont équi-distribués.

**Théorème 3.2** Si  $h(\cdot) \equiv N/|I|$  alors l'énergie de partitionnement admet un unique minimum donné par :

$$s_k = k|I|/N \text{ et } m_k = \frac{1}{2}(2k-1)|I|/N. \quad (7)$$

Le meilleur partitionnement consiste donc à répartir régulièrement les seuils. Il s'agit de la quantification linéaire, méthode la plus couramment utilisée pour simplifier une image. Elle n'a pourtant de sens que dans le cas très particulier d'une densité uniforme.

TAB. 1 – Tableau comparatif du multi-seuillage par (b) quantification linéaire, (c) la méthode de Kermad et al, (d) partitionnement optimal

|     | [gu]          | [mae]        | [mse]        | [me] | [psnr]        |
|-----|---------------|--------------|--------------|------|---------------|
| (b) | 49.659        | 5.976        | 7.056        | 16   | 31.656        |
| (c) | 36.558        | 5.358        | 6.420        | 25   | 31.980        |
| (d) | <b>34.732</b> | <b>4.909</b> | <b>5.905</b> | 28   | <b>32.706</b> |

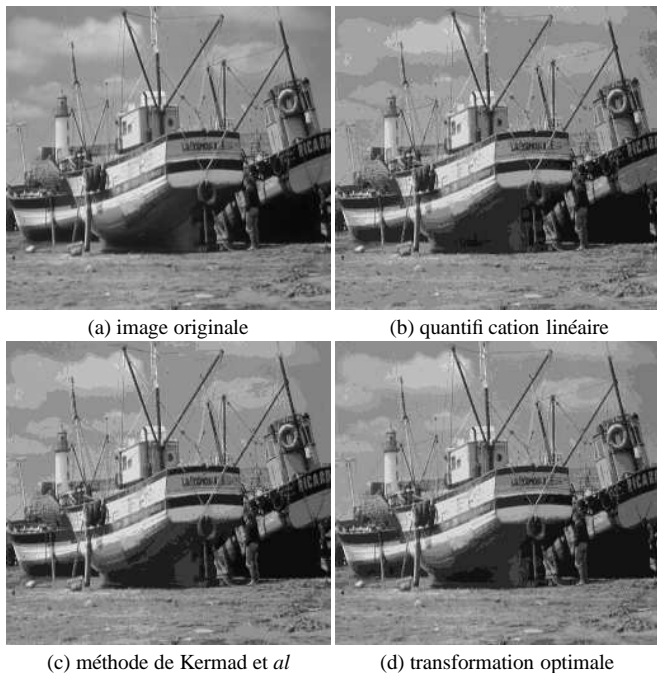


FIG. 1 – Comparaison des images multi-seuillées

## 4 Étude expérimentale

Les tests ont été menés sur l'image réelle [bateau] contenant des détails très fins. Trois méthodes ont été mises en œuvre : la quantification linéaire, la méthode de Kermad et al [7, 6] et la transformation optimale. Les images multi-seuillées ont été obtenues de sorte à contenir 10 classes. Chaque région a été labellisée par la moyenne intra-région. Ainsi, l'observation visuelle est révélatrice de la qualité du partitionnement. Dans ce cas, le carré de l'erreur moyenne quadratique et l'uniformité globale coïncident.

L'observation des images multi-seuillées (fig. 1) montre que les détails sont mieux préservés avec la transformation optimale. Les histogrammes multi-seuillés (fig. 2) obtenus par le multi-seuillage de Kermad et al et la transformation optimale ne sont pas uniformément répartis. Par conséquent, ils s'adaptent effectivement à la distribution des niveaux de gris dans l'image. Le tableau comparatif (tab. 1) fait apparaître l'uniformité globale **gu**, l'erreur moyenne absolue **mae** et quadratique **mse**, l'erreur maximale **me** et le rapport signal à bruit **psnr**. L'objectif est atteint puisque la transformation optimale minimise le critère d'uniformité globale.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une méthode optimale de partitionnement au sens de l'uniformité globale. Elle prend la forme d'une suite qui minimise alternativement l'énergie de partitionnement par rapport aux modes et aux seuils. La so-

lution obtenue à la convergence correspond alors au meilleur partitionnement. En effet, l'énergie de partitionnement limite au maximum l'erreur avec la distribution des niveaux de gris initiale.

La méthode a été couplée avec succès à la méthode de classification supervisée robuste de Samson [10, 9]. En effet, la méthode de classification s'apparente à un multi-seuillage robuste au bruit par introduction un *a priori* d'homogénéité. Le paramètre de la classification est la fonction potentiel qu'il est possible de déterminer automatiquement à l'aide des seuils et des modes. L'idée est de construire une fonction à  $N$  puits centrés sur les modes et séparés par les seuils.

## Références

- [1] G. Aubert, L. Blanc-Féraud, and R. March.  $\Gamma$ -convergence of discrete functionals with non-convex perturbation for image classification. Technical Report 4560, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, September 2002.
- [2] G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical problems in image processing (Partial differential equations and the calculus of variations)*. Springer, 2002.
- [3] K. Chehdi. An approach to the automatic filtering of images. In *Proceedings of EUSIPCO' 92*, pages 1409–1412, August 1992.
- [4] K. Chehdi and M. Sabri. A new approach to identify the nature of the noise affecting an image. In *Proceedings of ICASSP' 92*, pages 285–288, March 1992.
- [5] E. De Giorgi. *Convergence problems for functionals or operators*. Proc. of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis, Pitagoria, Ed. Bologna, 1978.
- [6] C. Kermad. *Segmentation d'images : recherche d'une mise en œuvre automatique par coopération de méthodes*. PhD thesis, Université de Rennes I, 1997.
- [7] C. Kermad, K. Chehdi, and C. Cariou. Segmentation d'images par multi-seuillage et fusion des régions labellisées minimisant un critère de similarité. In *Proceedings of GRETSI' 95*, pages 641–644, September 1995.
- [8] C. Rosenberger. *Mise en œuvre d'un système adaptatif de segmentation d'images*. PhD thesis, Université de Rennes I, 1999.
- [9] C. Samson. *Contribution à la classification d'images satellitaires par approche variationnelle et équations aux dérivées partielles*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, 2000.
- [10] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and J. Zerubia. A variational model for image classification and restoration. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(5) :460–472, May 2000.
- [11] N. Voisine. *Approche adaptative de coopération hiérarchique de méthodes de segmentation : application aux images multi-composante*. PhD thesis, Université de Rennes I, 2002.

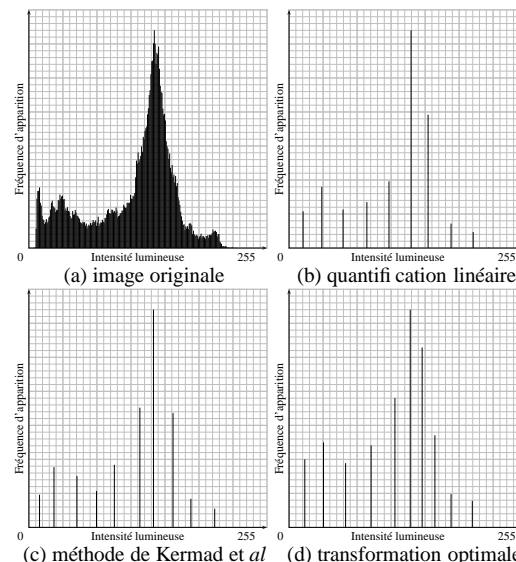


FIG. 2 – Comparaison des histogrammes multi-seuillés