

Filtrages de Kalman et particulaire dans les Chaînes de Markov Triplet

Boujemaa AIT EL FQUIH, François DESBOUVRIES

GET / INT / Dépt. CITI et CNRS UMR 5157, 9 rue Charles Fourier, 91011 Evry, France
 Boujemaa.Ait_Elfquih@int-evry.fr, Francois.Desbouvries@int-evry.fr

Résumé – Soit $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un processus caché, $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un processus observé, et $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un troisième processus. On considère le problème de la restauration Bayésienne dans une chaîne de Markov "Triplet" (CMT) continue, c'est-à-dire un modèle où l'on suppose que $\mathbf{t} = (\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{y})$ est une chaîne de Markov (CM) (vectorielle). Ce modèle est une généralisation des chaînes de Markov cachées (CMCa) classiques, et permet cependant le développement d'algorithmes de Kalman et de filtrage particulaire.

Abstract – Let $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ be a hidden process, $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ an observed process, and $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ some additional process. We address Bayesian restoration in a continuous so-called "Triplet" Markov Chain model, i.e. a model in which we assume that $\mathbf{t} = (\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{y})$ is a vector Markov Chain. This model generalizes the classical Hidden Markov Chain model, and yet enables Kalman-like and particle filtering.

1 Introduction

1.1 Le filtre de Kalman (FK) et ses extensions

Considérons le modèle d'état

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{F}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{G}_n \mathbf{u}_n \\ \mathbf{y}_n &= \mathbf{H}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{J}_n \mathbf{v}_n \end{cases}, \quad (1)$$

où $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^{n_x}$ est l'état, $\mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^{n_y}$ l'observation, $\mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^{n_u}$ le bruit d'entrée et $\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^{n_v}$ le bruit de mesure. Les processus $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont supposés indépendants, conjointement indépendants et indépendants de \mathbf{x}_0 .

Soit $\mathbf{x}_{0:n} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^n$ et $\mathbf{y}_{0:n} = \{\mathbf{y}_i\}_{i=0}^n$. Notons respectivement $p(\mathbf{x}_n)$, $p(\mathbf{x}_{0:n})$ et $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{0:n})$ les densités de probabilité (ddp) (par rapport à la mesure de Lebesgue) de \mathbf{x}_n , de $\mathbf{x}_{0:n}$, et de \mathbf{x}_n conditionnellement à $\mathbf{y}_{0:n}$; les autres ddp sont définies de façon similaire. Un problème fondamental associé au modèle (1) (le problème de filtrage) consiste à calculer la ddp a posteriori $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{0:n})$. À partir de (1), on a

$$p(\mathbf{x}_{n+1} | \mathbf{x}_{0:n}) = p(\mathbf{x}_{n+1} | \mathbf{x}_n); \quad (2)$$

$$p(\mathbf{y}_{0:n} | \mathbf{x}_{0:n}) = \prod_{i=0}^n p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_{0:n}); \quad (3)$$

$$p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_{0:n}) = p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i) \quad \forall i, 0 \leq i \leq n. \quad (4)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{0:n} | \mathbf{y}_{0:n}) &= \frac{p(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n | \mathbf{x}_{0:n-1}, \mathbf{y}_{0:n-1})}{p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{0:n-1})} p(\mathbf{x}_{0:n-1} | \mathbf{y}_{0:n-1}) \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_n | \mathbf{x}_n) p(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{n-1})}{p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{0:n-1})} p(\mathbf{x}_{0:n-1} | \mathbf{y}_{0:n-1}), \end{aligned} \quad (5)$$

d'où l'on déduit par marginalisation une équation de propagation de $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{0:n})$. Si de plus \mathbf{x}_0 et $\mathbf{w}_n = (\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n)$ sont Gaussiennes, $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{0:n})$ est également Gaussienne; propager $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{0:n})$ équivaut à propager ses paramètres, et l'équation de filtrage coïncide dans ce cas avec le FK [1] (voir également [2] [3] [4]).

Il existe de nombreuses généralisations du FK. Citons entre autres le développement d'algorithmes robustes (en racine carrée) ou rapides (de type Chandrasekhar); le développement d'algorithmes de lissage ou de prédiction; la levée de l'hypothèse d'indépendance sur \mathbf{u} et/ou \mathbf{v} ; et l'extension de (1) à des systèmes non-linéaires et/ou non-Gaussiens, pour lesquels ont été proposées des solutions approchées telles que le FK étendu ou le filtrage particulaire (voir par ex. [5] [3] [6]).

1.2 CMCa \subset CMCo \subset CMT

Une autre extension possible du FK consiste à lever certaines hypothèses d'indépendance conditionnelle sur \mathbf{x} et \mathbf{y} . Ainsi que nous avons vu, (1) implique (2)-(4); en d'autres termes, \mathbf{x} est une CM, et comme elle n'est connue que par l'intermédiaire du processus observé \mathbf{y} , (1) est une CM cachée (CMCa). Par ailleurs (2)-(4) impliquent

$$p(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n | \mathbf{x}_{0:n}, \mathbf{y}_{0:n-1}) = p(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n | \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{n-1}), \quad (6)$$

ce qui signifie que le couple $\{(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n)\}$ est une CM (vectorielle). Toute CMCa est donc également une CM "Couple" (CMCo); en revanche, si $\{(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n)\}$ est une CMCo le processus marginal $\{\mathbf{x}_n\}$ n'est plus nécessairement une CM, et (3) ou (4) n'est plus nécessairement vérifiée [7]. Il est cependant possible de restaurer \mathbf{x} dans une CMCo, car (5) devient

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{0:n} | \mathbf{y}_{0:n}) &= \frac{p(\mathbf{y}_n | \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{n-1}) p(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_{n-2})}{p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{0:n-1})} \\ &\times p(\mathbf{x}_{0:n-1} | \mathbf{y}_{0:n-1}), \end{aligned} \quad (7)$$

et les algorithmes de filtrage s'adaptent en conséquence [7] [8].

Le modèle CMCo peut à son tour se généraliser au modèle CMT [9] [10] [11]. Soit $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un processus additionnel (éventuellement artificiel), et soit $\mathbf{t}_n = (\mathbf{x}_n, \mathbf{r}_n, \mathbf{y}_{n-1})$. Nous dirons que $\mathbf{t} = \{\mathbf{t}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une CMT si \mathbf{t} est une CM (vectorielle) (voir [12] [11] pour des exemples concrets de CMT). L'intérêt des CMT est double :

- En ce qui concerne la restauration, la CMT $(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{y})$ peut être vue comme la CMCo $((\mathbf{x}, \mathbf{r}), \mathbf{y})$; donc $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}, \mathbf{r})$ peut être restauré à partir de \mathbf{y} par un algorithme couple, et finalement \mathbf{x} est obtenu par marginalisation;
- En ce qui concerne la modélisation, les CMT généralisent des modèles classiques en ce sens qu'aucune des chaînes $\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{y}, (\mathbf{x}, \mathbf{r}), (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ou (\mathbf{r}, \mathbf{y}) n'est nécessairement de Markov. Par ailleurs, dans une CMCa $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ est donné par (3) (4), et cette modélisation est trop simple dans certaines applications, telles que la reconnaissance de la parole [13]; alors que dans une CMT $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ est la marginale de la CM $p(\mathbf{r}, \mathbf{y}|\mathbf{x})$, et peut donc être beaucoup plus complexe. En pratique un certain nombre de simulations ont montré l'apport des CMCo [14] (resp. CMT [15]) par rapport aux CMCa en segmentation d'images.

Le reste de cet article est organisé de la façon suivante. Nous considérons d'abord le cas de CMT linéaires et Gaussiennes (LG), et étendons au cas singulier quelconque un algorithme [12] de filtrage de Kalman. Nous proposons ensuite un algorithme de filtrage particulière pour le cas général.

2 Filtrage de Kalman dans les CMTLG

2.1 CMT linéaires et filtrage optimal

Soit $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^{n_x}$ le processus caché, $\mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^{n_y}$ l'observation et $\mathbf{r}_n \in \mathbb{R}^{n_r}$ un troisième processus. Pour $n > 0$, soit $\mathbf{t}_n = (\mathbf{x}_n, \mathbf{r}_n, \mathbf{y}_{n-1})$, et $\mathbf{t}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{0})$. Concaténon les variables cachées \mathbf{x}_n et \mathbf{r}_n en $\mathbf{x}_n^* = (\mathbf{x}_n, \mathbf{r}_n)$. Nous dirons que $\mathbf{t} = \{\mathbf{t}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une CMT si \mathbf{t} est une CM (vectorielle), et que \mathbf{t} est une CMT linéaire si de plus \mathbf{t}_n satisfait :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1}^* \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{F}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*} & \mathcal{F}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{y}} \\ \mathcal{F}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{x}^*} & \mathcal{F}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{y}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}_n} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n^* \\ \mathbf{y}_{n-1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^{\mathbf{x}^*} \\ \mathbf{w}_n^{\mathbf{y}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_n}, \quad (8)$$

où \mathcal{F}_n est déterministe, et $\mathbf{w} = \{\mathbf{w}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est centré, indépendant et indépendant de \mathbf{t}_0 .

Le but de ce chapitre est d'établir un algorithme de calcul récursif, dans le cas Gaussien, de $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{0:n})$ dans une CMT linéaire (8). Supposons donc de plus que

$$\mathbf{x}_0^* \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_0^*, \mathbf{P}_0^*), \quad \mathbf{w}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{Q}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*} & \mathcal{Q}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{y}} \\ \mathcal{Q}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{x}^*} & \mathcal{Q}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{y}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}_n}). \quad (9)$$

Alors \mathbf{t} est Gaussien, et le modèle (8)-(9) définit en fait un processus (vectoriel) de Gauss-Markov partiellement observé, dans lequel on observe certaines composantes $\{\mathbf{y}_n\}$ et on veut restaurer une partie des composantes restantes $\{\mathbf{x}_n^*\}$. Notre algorithme calcule donc récursivement $p(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{y}_{0:n})$ (ou, dans le cas de mesures singulières, $p(\bar{\mathbf{x}}_n | \mathbf{y}_{0:n})$, où $\bar{\mathbf{x}}_n$ est un sous-vecteur de \mathbf{x}_n^*), puis $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{0:n})$ est obtenu par marginalisation.

2.2 Le cas singulier

Un algorithme de filtrage de Kalman a été proposé dans le cas où $\mathcal{Q}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{y}}$ est définie positive [10] [12]. Nous nous focalisons donc désormais sur le cas où les observations sont singulières. Soit donc $r = \text{rang}(\mathcal{Q}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{y}}) \in \{0, 1, \dots, n_y - 1\}$. On peut utiliser l'algorithme du cas régulier (c'est-à-dire [12, éqs.

(13)-(17)]) en remplaçant (si nécessaire) les inverses par des inverses généralisées. Nous verrons qu'il est cependant possible (en adaptant une technique classique [3]) d'exploiter la singularité de $\mathcal{Q}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{y}}$ pour réduire, par une transformation d'état, de $m = n_y - r$ la dimension de \mathbf{x}_n^* ; nous proposerons alors un algorithme de restauration pour ce système équivalent.

2.2.1 Transformation d'état

$\mathcal{Q}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{y}}$ a m valeurs propres nulles. Donc $\exists \mathbf{M}_n$ inversible t.q.

$$\mathbf{M}_n \mathcal{Q}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{y}} \mathbf{M}_n^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{r \times r} \end{bmatrix}.$$

Soit $\bar{\mathbf{y}}_n = \mathbf{M}_n \mathbf{y}_n$ et $\mathbf{w}_n^{\bar{\mathbf{y}}} = \mathbf{M}_n \mathbf{w}_n^{\mathbf{y}}$; alors (8) implique

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_n^p \\ \bar{\mathbf{y}}_n^r \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \mathbf{x}^*} \\ \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^r, \mathbf{x}^*} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathcal{F}}_n} \mathbf{x}_n^* + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{y}}} \\ \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^r, \bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathcal{F}}_n} \bar{\mathbf{y}}_{n-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{w}_n^{\bar{\mathbf{y}}^r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_n^{\bar{\mathbf{y}}}}, \quad (10)$$

$\bar{\mathbf{y}}_n \quad \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}^*} = \mathbf{M}_n \mathcal{F}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{x}^*} \quad \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}} = \mathbf{M}_n \mathcal{F}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{y}} \mathbf{M}_n^{-1} \quad \mathbf{w}_n^{\bar{\mathbf{y}}}$

et l'on voit que $\bar{\mathbf{y}}_n$ se divise en une partie non bruitée $(\bar{\mathbf{y}}_n^p)_{m \times 1}$ et une partie régulière $(\bar{\mathbf{y}}_n^r)_{r \times 1}$. Comme m combinaisons linéaires de \mathbf{x}_n^* sont connues lorsque $\bar{\mathbf{y}}_{n-1}$ et $\bar{\mathbf{y}}_n$ le sont, il n'est pas nécessaire de les estimer, et c'est la raison pour laquelle on peut réduire de m la dimension du système, ainsi que nous allons le voir. Soit $n_{x^*} \geq m$, et considérons la partition suivante de \mathbf{x}_n^* :

$$\mathbf{x}_n^* = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_n)_{n_x \times 1} \\ (\mathbf{r}_n)_{n_r \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{x}}_n)_{(n_x + n_r - m) \times 1} \\ (\tilde{\mathbf{r}}_n)_{m \times 1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

(pour le moment nous ne supposons rien sur la position de n_r par rapport à m). Supposons que dans (10)

$$\text{rang}(\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \mathbf{x}^*})_{m \times n_{x^*}} = m. \quad (12)$$

Alors on peut choisir \mathbf{U}_n de telle sorte que la transformation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{U}_n)_{(n_{x^*} - m) \times n_{x^*}} \\ (\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \mathbf{x}^*})_{m \times n_{x^*}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_n} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_n \\ \tilde{\mathbf{r}}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_n^*} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_n \\ \bar{\mathbf{y}}_n^p - \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathbf{y}}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

soit réversible, et finalement \mathbf{T}_n et \mathbf{M}_n permettent de remplacer (8) par un système équivalent :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{t}'_{n+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1}^* \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n \end{bmatrix} \mathcal{F}_n \begin{bmatrix} \mathbf{T}_n^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n^* \\ \mathbf{y}_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^{\mathbf{x}^*} \\ \mathbf{w}_n^{\mathbf{y}} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Les n_{x^*} premières équations de (14) se réécrivent

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{n+1} \\ \bar{\mathbf{y}}_{n+1}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}} \\ \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{x}}} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_n \\ \bar{\mathbf{y}}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{G}_n^{\bar{\mathbf{x}}} \\ \mathcal{G}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_{n-1} + \mathbf{T}_{n+1} \mathbf{w}_n^{\mathbf{x}^*}, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}} \\ \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{x}}} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n+1} \mathcal{F}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*} \mathbf{T}_n^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}}_{n_{x^*} \times (n_{x^*} + r)} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_{\bar{\mathbf{x}}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_n^{\bar{\mathbf{x}}} \\ \mathcal{G}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{n+1} \mathcal{F}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{y}} \mathbf{M}_n^{-1} \mathbf{T}_n^{-1} \mathcal{F}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*} \mathbf{T}_n^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_{\bar{\mathbf{x}}} \times n_y} \\ \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

D'autre part, les n_y dernières équations de (14) sont données par (10). Les m premières équations de (10) coïncident avec les

m dernières de (15) et sont donc redondantes. En concaténant (15) et les r dernières équations de (10) (écrites à l'instant $n+1$ grâce à (8)), on obtient le système de dimension réduite :

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{n+1} \\ \bar{\mathbf{y}}_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{x}}} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}}} \\ \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{x}}} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathcal{F}}_n} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_n \\ \bar{\mathbf{y}}_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathcal{G}}_n^{\bar{\mathbf{x}}} \\ \bar{\mathcal{G}}_n^{\bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathcal{G}}_n} \bar{\mathbf{y}}_{n-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathcal{F}_{n+1}^{\bar{\mathbf{y}},\mathbf{x}^*} & \tilde{\mathbf{I}}_r \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{w}}_n} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{n+1}^{\mathbf{x}^*} \\ \mathbf{w}_{n+1}^{\bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

avec $\tilde{\mathbf{I}}_r = [\mathbf{0}_{m \times r}^T, \mathbf{I}_{r \times r}]^T$, et

$$\bar{\mathcal{F}}_n = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n+1} \\ \mathcal{F}_{n+1}^{\bar{\mathbf{y}},\mathbf{x}^*} \end{bmatrix}}_{(n_{\mathbf{x}^*}+r) \times n_{\mathbf{x}^*}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{F}_n^{\mathbf{x}^*,\mathbf{x}^*} \mathbf{T}_n^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}}_{n_{\mathbf{x}^*} \times (n_{\mathbf{x}^*}+r)} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_{\bar{\mathbf{x}}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{F}_{n+1}^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\bar{\mathcal{G}}_n = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n+1} \\ \mathcal{F}_{n+1}^{\bar{\mathbf{y}},\mathbf{x}^*} \end{bmatrix}}_{(n_{\mathbf{x}^*}+r) \times n_{\mathbf{x}^*}} (\mathcal{F}_n^{\mathbf{x}^*,\bar{\mathbf{y}}} \mathbf{M}_{n-1}^{-1} - \mathcal{F}_n^{\mathbf{x}^*,\mathbf{x}^*} \mathbf{T}_n^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_{\bar{\mathbf{x}}} \times n_{\bar{\mathbf{y}}}} \\ \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}). \quad (20)$$

2.2.2 Algorithme de restauration

Nous étudions maintenant la restauration de $\bar{\mathbf{x}}_n$ à partir de $\{\bar{\mathbf{y}}_{0:n}\}$ dans (18), et, en définitive, celle de \mathbf{x}_n à partir de $\{\mathbf{y}_{0:n}\}$ dans (8), qui est notre but ultime. Supposons que $\mathbf{w}_n^{\mathbf{x}^*}$ et $\mathbf{w}_n^{\bar{\mathbf{y}}}$ sont indépendants, et posons

$$\bar{\mathcal{Q}}_n = E(\bar{\mathbf{w}}_n \bar{\mathbf{w}}_n^T) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathcal{F}_{n+1}^{\bar{\mathbf{y}},\mathbf{x}^*} & \tilde{\mathbf{I}}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_n^{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{x}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathcal{F}_{n+1}^{\bar{\mathbf{y}},\mathbf{x}^*} & \tilde{\mathbf{I}}_r \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{Q}}_n^{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathcal{Q}}_n^{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}}} \\ \bar{\mathcal{Q}}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathcal{Q}}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Proposition 1 (FK pour CMTLG singulières) Soit (8), (9) et (12). Supposons que $n_{\mathbf{x}^*} \geq m$, et supposons également que $\mathbf{w}_n^{\mathbf{x}^*}$ et $\mathbf{w}_n^{\bar{\mathbf{y}}}$ sont indépendants. Posons $p(\bar{\mathbf{x}}_n | \bar{\mathbf{y}}_{0:n}) \sim \mathcal{N}(\hat{\bar{\mathbf{x}}}_n | n, \bar{\mathbf{P}}_{n|n})$ et $p(\bar{\mathbf{x}}_{n+1} | \bar{\mathbf{y}}_{0:n}) \sim \mathcal{N}(\hat{\bar{\mathbf{x}}}_{n+1} | n, \bar{\mathbf{P}}_{n+1|n})$. Alors $\hat{\bar{\mathbf{x}}}_n | n$ et $\bar{\mathbf{P}}_{n|n}$ peuvent être calculés récursivement selon¹ :

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}}_{n+1|n} = \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{x}}} \hat{\bar{\mathbf{x}}}_n | n + \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathbf{y}}_n + \bar{\mathcal{G}}_n^{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{y}}_{n-1}, \quad (22)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{n+1|n} = \bar{\mathcal{Q}}_n^{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{x}}} + \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{P}}_{n|n} (\bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{x}}})^T, \quad (23)$$

$$\hat{\bar{\mathbf{y}}}_{n+1|n} = \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{x}}} \hat{\bar{\mathbf{x}}}_n | n + \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathbf{y}}_n + \bar{\mathcal{G}}_n^{\bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathbf{y}}_{n-1}, \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{n+1|n+1} = \bar{\mathcal{Q}}_n^{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}}} + \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{P}}_{n|n} (\bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{x}}})^T, \quad (25)$$

$$\bar{\mathbf{L}}_{n+1|n+1} = \bar{\mathcal{Q}}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{y}}} + \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{P}}_{n|n} (\bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{x}}})^T, \quad (26)$$

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}}_{n+1|n+1} = \hat{\bar{\mathbf{x}}}_{n+1|n} + \bar{\mathbf{K}}_{n+1|n+1} \bar{\mathbf{L}}_{n+1|n+1}^{-1} (\bar{\mathbf{y}}_{n+1} - \hat{\bar{\mathbf{y}}}_{n+1|n}), \quad (27)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{n+1|n+1} = \bar{\mathbf{P}}_{n+1|n} - \bar{\mathbf{K}}_{n+1|n+1} \bar{\mathbf{L}}_{n+1|n+1}^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{n+1|n+1}^T. \quad (28)$$

En ce qui concerne l'initialisation, $\hat{\bar{\mathbf{x}}}_{0|0}$ et $\bar{\mathbf{P}}_{0|0}$ vérifient (27) et (28) avec $n = -1$, et $\hat{\bar{\mathbf{x}}}_{0|-1} = \mathbf{U}_0 \hat{\mathbf{x}}_0^*$, $\bar{\mathbf{P}}_{0|-1} = \mathbf{U}_0 \mathbf{P}_0^* \mathbf{U}_0^T$, $\hat{\bar{\mathbf{y}}}_{0|-1} = \mathcal{F}_0^{\bar{\mathbf{y}},\mathbf{x}^*} \hat{\mathbf{x}}_0^*$, $\bar{\mathbf{K}}_{0|0} = \mathbf{U}_0 \mathbf{P}_0^* (\mathcal{F}_0^{\bar{\mathbf{y}},\mathbf{x}^*})^T$ et $\bar{\mathbf{L}}_{0|0} = \mathcal{F}_0^{\bar{\mathbf{y}},\mathbf{x}^*} \mathbf{P}_0^* (\mathcal{F}_0^{\bar{\mathbf{y}},\mathbf{x}^*})^T + \text{diag}(\mathbf{0}_m, \mathbf{I}_r)$. Enfin conditionnellement à $\mathbf{y}_{0:n}$, $\mathbf{x}_n \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_n | n, \mathbf{P}_{n|n})$, avec

$$\hat{\mathbf{x}}_n | n = [\mathbf{I}_{n_{\mathbf{x}}}, \mathbf{0}_{n_{\mathbf{x}} \times n_r}] \mathbf{T}_n^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\bar{\mathbf{x}}}_n | n \\ \bar{\mathbf{y}}_n^p - \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathbf{y}}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$\mathbf{P}_{n|n} = [\mathbf{I}_{n_{\mathbf{x}}}, \mathbf{0}_{n_{\mathbf{x}} \times n_r}] \mathbf{T}_n^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{n|n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_m \end{bmatrix} (\mathbf{T}_n^{-1})^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{\mathbf{x}}} \\ \mathbf{0}_{n_r \times n_{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} \quad (30)$$

¹Les inverses dans (27) et (28) doivent être remplacés par des inverses généralisées si $\bar{\mathbf{L}}_{n+1|n+1}$ n'est pas inversible.

Preuve 1 Le modèle (18) est un cas particulier de [16, éqs. (13.46)-(13.47)] ou [17, (3.1.1), (3.1.3), (3.2.20)], donc (22)-(28) peuvent être obtenues à partir de [16, éqs. (13.56)-(13.57)] ou [17, §3.2.4 p. 112]. Considérons maintenant l'initialisation. A partir de (10) et de (13), on obtient

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{y}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathcal{F}_0^{\bar{\mathbf{y}},\mathbf{x}^*} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0^* + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_0^{\bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix},$$

donc

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{y}}_0 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \hat{\bar{\mathbf{x}}}_{0|-1} \\ \hat{\bar{\mathbf{y}}}_{0|-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{0|-1} & \bar{\mathbf{K}}_{0|0} \\ \bar{\mathbf{K}}_{0|0}^T & \bar{\mathbf{L}}_{0|0} \end{bmatrix} \right),$$

$\hat{\bar{\mathbf{x}}}_{0|-1}$, $\bar{\mathbf{P}}_{0|-1}$, $\hat{\bar{\mathbf{y}}}_{0|-1}$, $\bar{\mathbf{K}}_{0|0}$ et $\bar{\mathbf{L}}_{0|0}$ étant calculés grâce à (9). Par ailleurs, $p(\bar{\mathbf{x}}_0 | \bar{\mathbf{y}}_0) \sim \mathcal{N}(\hat{\bar{\mathbf{x}}}_{0|0}, \bar{\mathbf{P}}_{0|0})$ est fourni par (27) et (28) pour $n = -1$. Finalement partitionnons \mathbf{T}_n^{-1} en $\mathbf{T}_n^{-1} = [(\mathbf{V}_n)_{n_{\mathbf{x}^*} \times (n_{\mathbf{x}^*}-m)}, (\mathbf{W}_n)_{n_{\mathbf{x}^*} \times m}]$. A partir de (13), $\mathbf{x}_n^* = \mathbf{V}_n \bar{\mathbf{x}}_n + \mathbf{W}_n (\bar{\mathbf{y}}_n^p - \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathbf{y}}_{n-1})$. Donc conditionnellement à $\mathbf{y}_{0:n}$, $\mathbf{x}_n^* \sim \mathcal{N}(\mathbf{V}_n \hat{\bar{\mathbf{x}}}_n | n + \mathbf{W}_n (\bar{\mathbf{y}}_n^p - \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathbf{y}}_{n-1}), \mathbf{V}_n \bar{\mathbf{P}}_{n|n} \mathbf{V}_n^T)$. En marginalisant par rapport aux $n_{\mathbf{x}}$ premières composantes de $\mathbf{x}_n^* = (\mathbf{x}_n, \mathbf{r}_n)$, on obtient finalement (29) et (30).

2.2.3 Remarques

- Des simplifications surviennent dans certains cas particuliers. Partitionnons par exemple $\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\mathbf{x}^*}$ définie en (10) en $\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\mathbf{x}^*} = [(\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{x}}})_{m \times n_{\bar{\mathbf{x}}}}, (\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{r}}})_{m \times m}]$, et supposons $\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{r}}}$ inversible. Dans ce cas on peut choisir $\mathbf{U}_n = [\mathbf{I}_{n_{\bar{\mathbf{x}}}}, \mathbf{0}]$, et

$$\mathbf{T}_n^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{\bar{\mathbf{x}}}} & \mathbf{0}_{n_{\bar{\mathbf{x}}} \times m} \\ \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{x}}} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{r}}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{\bar{\mathbf{x}}}} & \mathbf{0}_{n_{\bar{\mathbf{x}}} \times m} \\ -(\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{r}}})^{-1} \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{x}}} & (\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{r}}})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Il y a alors deux cas. Si $n_r \geq m$, alors dans (11) $n_{\mathbf{x}} \leq n_{\bar{\mathbf{x}}}$, et à partir de (29) et (30) $\hat{\mathbf{x}}_n | n$ est un sous-vecteur de $\hat{\bar{\mathbf{x}}}_n | n$ et $\mathbf{P}_{n|n}$ une sous-matrice de $\bar{\mathbf{P}}_{n|n}$. Si $m > n_r$, (30) implique que $\mathbf{P}_{n|n}$ est une matrice singulière $n_{\mathbf{x}} \times n_{\mathbf{x}}$ de rang au plus $n_{\bar{\mathbf{x}}}$. La raison en est que dans (11) $\tilde{\mathbf{x}}_n$ est un sous-vecteur de \mathbf{x}_n , et donc, à une matrice inversible près, il n'est nécessaire d'estimer à partir de $\mathbf{y}_{0:n}$ que $n_{\bar{\mathbf{x}}}$ composantes de \mathbf{x}_n .

- Un certain nombre de CMT linéaires utilisées en pratique sont telles que $\mathbf{w}_n^{\bar{\mathbf{y}}} = \mathbf{0}$ [12], donc le cas $m = n_{\bar{\mathbf{y}}}$ est un cas particulier important de notre algorithme. Dans ce cas $\mathcal{Q}_n^{\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{y}}} = \mathbf{0}_{n_{\bar{\mathbf{y}}}}$, et on peut donc choisir $\mathbf{M}_n = \mathbf{I}_{n_{\bar{\mathbf{y}}}}$. Les $n_{\bar{\mathbf{y}}}$ dernières équations de (14) sont contenues dans (10), et elles coïncident avec les $n_{\bar{\mathbf{y}}}$ dernières équations de (15). Donc (15) suffit, et (18) se réduit à (15) (avec $\bar{\mathbf{y}}_n^p = \mathbf{y}_n$), (19) à (16) et (20) à (17) (voir également [12]).

3 Filtrage particulière dans les CMT

Nous considérons désormais le problème de la restauration de \mathbf{x}^* (et donc de \mathbf{x}) dans le cas général. Comme $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$ est une CMCo, $p(\mathbf{x}_{0:n}^* | \mathbf{y}_{0:n})$ vérifie une équation récursive analogue à (7) (obtenue en remplaçant \mathbf{x} par \mathbf{x}^*), qui constitue la base d'un algorithme de propagation d'une approximation discrète de $p(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{y}_{0:n})$. L'algorithme de filtrage particulière obtenu est donc une adaptation immédiate de [8] (qui considérait le cas des CMCo) :

Algorithme de filtrage particulaire pour CMT.

Pour $i = 1, \dots, N$,

Tirer $\mathbf{x}_n^{*(i)} \sim q(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{x}_{0:n-1}^{*(i)}, \mathbf{y}_{0:n})$, poser $\mathbf{x}_{0:n}^{*(i)} = [\mathbf{x}_{0:n-1}^{*(i)}, \mathbf{x}_n^{*(i)}]$;

Calculer les poids d'importance

$$\tilde{w}_n^{(i)} = \frac{p(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{x}_{n-1}^{*(i)}, \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_{n-2}) p(\mathbf{y}_n | \mathbf{x}_n^{*(i)}, \mathbf{y}_{n-1})}{q(\mathbf{x}_n^{*(i)} | \mathbf{x}_{0:n-1}^{*(i)}, \mathbf{y}_{0:n})} w_{n-1}^{(i)},$$

$$w_n^{(i)} = \tilde{w}_n^{(i)} / \sum_{i=1}^N \tilde{w}_n^{(i)};$$

$\sum_{i=1}^N w_n^{(i)} \delta(\mathbf{x}_n^* - \mathbf{x}_n^{*(i)})$ est une approximation de $p(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{y}_{0:n})$.

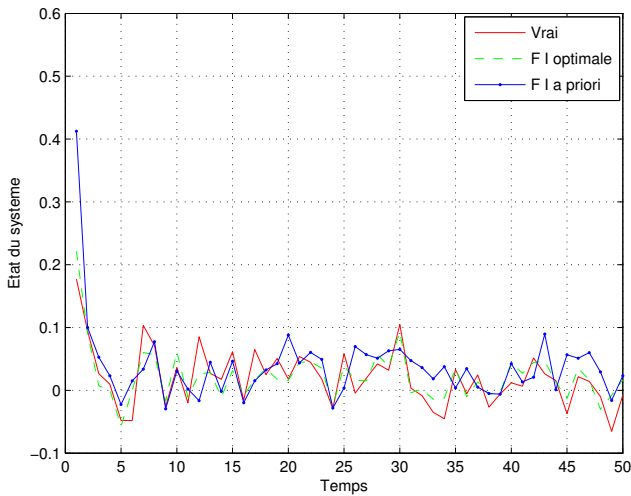
Nous proposons maintenant une simulation de cet algorithme.

Considérons la CMT non linéaire

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ r_{n+1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .213 \frac{x_n}{x_n^2+1} & .066x_n & .033x_n r_n \\ .033r_n & .030 \frac{r_n}{r_n^2+1} & .036x_n r_n \\ 1.35 & .10 & .82 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ r_n \\ y_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_n^x \\ w_n^r \\ w_n^y \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q}_n = \begin{bmatrix} .125 & .015 & .012 \\ .015 & .125 & .013 \\ .012 & .013 & .125 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^* \sim \mathcal{N}([.5, .5]^T, 2.5 \mathbf{I}_{2 \times 2}).$$

La figure représente un moyennage des résultats sur 80 simulations. Le nombre N de particules est égal à 100. Un rééchantillonnage est appliqué lorsque la taille effective estimée devient inférieure à $N/3$. La figure montre la trajectoire de l'état x_n et de son estimée, obtenue en prenant pour fonction d'importance la fonction "optimale" [8], c'est-à-dire la loi a posteriori $q(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{x}_{0:n-1}^{*(i)}, \mathbf{y}_{0:n}) = p(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{x}_{0:n-1}^{*(i)}, \mathbf{y}_{0:n}) = p(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{x}_{n-1}^{*(i)}, \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_{n-2})$, ou la fonction d'importance a priori $p(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{x}_{0:n-1}^{*(i)}, \mathbf{y}_{0:n-1}) = p(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{x}_{n-1}^{*(i)}, \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_{n-2})$.



Références

- [1] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960.
- [2] Y. C. Ho and R. C. K. Lee, "A Bayesian approach to problems in stochastic estimation and control," *IEEE Tr. on Automatic Control*, vol. 9, pp. 333–339, October 1964.

- [3] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Filtering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.
- [4] T. Kailath, A. H. Sayed, and B. Hassibi, *Linear estimation*, Prentice Hall Information and System Sciences Series. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2000.
- [5] A. H. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*, vol. 64 of *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, San Diego, 1970.
- [6] A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon, Eds., *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Statistics for Engineering and Information Science. Springer Verlag, New York, 2001.
- [7] W. Pieczynski and F. Desbouvries, "Kalman filtering using pairwise Gaussian models," in *Proceedings of the ICASSP*, Hong-Kong, April 6-10 2003.
- [8] F. Desbouvries and W. Pieczynski, "Particle filtering in pairwise and triplet Markov chains," in *Proceedings of the IEEE - EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing (NSIP 2003)*, Grado-Gorizia, Italy, June 8-11 2003.
- [9] W. Pieczynski, C. Hular, and T. Veit, "Triplet Markov chains in hidden signal restoration," in *SPIE International Symposium on Remote Sensing*, Crete, Grece, September 22-27 2002.
- [10] F. Desbouvries and W. Pieczynski, "Modèles de Markov triplet et filtrage de Kalman," *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Mathématiques*, vol. 336, no. 8, 2003, in French.
- [11] W. Pieczynski and F. Desbouvries, "On Triplet Markov chains," in *Proceedings of the International Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA 2005)*, Brest, France, May 17-20 2005.
- [12] B. Ait-El-Fquih and F. Desbouvries, "Kalman filtering for triplet Markov chains : Applications and extensions," in *Proceedings of the ICASSP*, Philadelphia, USA, March 18-23 2005.
- [13] M. Ostendorf, V.V. Digalakis, and O. A. Kimball, "From HMMs to segment models : a unified view of stochastic modeling for speech recognition," *IEEE Tr. Speech and Audio Processing*, vol. 4, no. 5, pp. 360–378, Sept. 1996.
- [14] S. Derrode and W. Pieczynski, "Signal and image segmentation using pairwise Markov chains," *IEEE Tr. Signal Processing*, vol. 52, no. 9, pp. 2477–89, 2004.
- [15] P. Lanchantin and W. Pieczynski, "Unsupervised non stationary image segmentation using triplet Markov chains," in *Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems (ACVIS 04)*, Brussels, Belgium, Aug. 31 - Sept. 3 2004.
- [16] R. S. Lipster and A. N. Shiryaev, *Statistics of Random Processes, Vol. 2 : Applications*, chapter 13 : "Conditionally Gaussian Sequences : Filtering and Related Problems", Springer Verlag, Berlin, 2001.
- [17] A. C. Harvey, *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*, Cambridge University Press, 1989.