

# Méthodes séquentielles de séparation aveugle de sources en présence de bruit

Marc CASTELLA<sup>1</sup>, Jean-Christophe PESQUET<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institut National des Télécommunications (INT)  
Département CITI (Communications, Images et Traitement de l'Information)  
9 rue Charles Fourier 91011 Évry Cedex, France

<sup>2</sup>Institut Gaspard Monge, CNRS - UMR 8049 et Université de Marne-la-Vallée  
Equipe Signal et Communications  
5, Boulevard Descartes, Champs sur Marne 77454 Marne la Vallée CEDEX 2, France  
marc.castella@int-evry.fr, jean-christophe.pesquet@univ-mlv.fr

**Résumé** – Le problème traité est celui de la séparation aveugle d'un mélange convolutif multi-entrées/multi-sorties de sources mutuellement indépendantes. Le cadre général considéré est celui de sources non nécessairement i.i.d., l'accent étant mis sur les méthodes séquentielles de séparation.

Plus précisément, ce travail s'intéresse à la prise en compte, dans le modèle de mélange et dans les critères de séparation, de la présence d'un bruit additif sur les capteurs. L'étude que nous réalisons justifie et illustre le fait qu'une simple soustraction des cumulants du bruit, ici supposés connus, permet d'améliorer la qualité d'estimation du système séparent.

**Abstract** – The topic which is addressed here concerns the blind separation of a multi-input/multi-output convolutive mixture of mutually independent sources. The considered framework includes the case of non necessarily i.i.d. sources, emphasis being put on iterative source separation methods (i.e. the sources are extracted one by one).

More precisely, this work shows how to take into account the presence of an additive noise, both in the model and in the design of separation criteria. Our study justifies and illustrates that the estimation of the inverse of the mixing system can be improved by simply subtracting the cumulants of the noise.

## 1 Introduction

Depuis plusieurs années, la séparation de sources est un sujet de recherche particulièrement actif. Cet engouement peut s'expliquer par le large spectre d'applications envisageables ; on peut notamment citer les télécommunications, l'acoustique, la sismique, le domaine biomédical, ... Le cadre aveugle est ici considéré, lequel offre l'avantage de ne requérir que des hypothèses faibles sur le mélange : en dehors de sa structure générale, souvent supposée linéaire, aucun paramètre de ce dernier n'est supposé connu.

Compte tenu de l'intérêt applicatif, on peut s'étonner que le cas de données bruitées n'ait donné lieu qu'à des contributions peu nombreuses mais récentes [3, 10], témoignant d'une attention nouvelle et accrue dédiée à ce cas. Nous souhaitons ici faire le point sur la situation en mettant l'accent sur les mélanges convolutifs multi-entrées / multi-sorties altérés par un bruit additif sur les capteurs.

Depuis plusieurs années, des méthodes efficaces existent pour la séparation des mélanges linéaires instantanés de sources [5, 2]. Le cas des mélanges convolutifs demeure en revanche plus difficile. Les directions principalement explorées ont été les suivantes. Généralisant les contrastes introduits pour les mélanges instantanés, des méthodes de séparation conjointes ont été proposées [6, 9]. Leur inconvénient réside à la fois dans l'existence de maxima locaux parasites et dans la nécessité d'un préblanchiment temporel qui est délicat. D'autre part,

des approches fréquentielles ont également prouvé leur validité dans le cas des sources i.i.d. [1], malgré certaines difficultés d'estimation statistique. Enfin, des approches séquentielles de reconstruction des sources ont été proposées. La plus populaire d'entre elles, la déflation [11, 13], consiste à extraire les sources une par une ; après chaque reconstruction, la contribution sur les observations de la source récupérée est soustraite par une méthode de moindres carrés. Le procédé est répété jusqu'à l'extraction de la dernière source. Il existe par ailleurs des méthodes séquentielles qu'on peut qualifier de hiérarchiques [12] où les sources précédemment extraites sont utilisées afin de contraindre l'espace de recherche des sources suivantes [8, 4].

Nous souhaitons, dans le cas bruité, étudier plus particulièrement les méthodes séquentielles de séparation, dont l'efficacité est reconnue quand le bruit est négligé. En contrepartie, ces techniques présentent des phénomènes d'accumulation d'erreurs au fur et à mesure des extractions, ce qui fournit une motivation supplémentaire à l'étude de l'influence du bruit.

## 2 Formulation du problème

### 2.1 Modèle

Considérons un signal vectoriel à temps discret  $(\mathbf{s}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , dont les composantes  $(s_1(n))_{n \in \mathbb{Z}}, \dots, (s_N(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  sont appe-

lées signaux sources. Le modèle d'un mélange convolutif de ces  $N$  sources avec ajout d'un bruit additif sur un réseau de  $Q$  capteurs s'écrit :

$$\mathbf{x}(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{M}(k) \mathbf{s}(n-k) + \mathbf{b}(n) \triangleq \mathbf{M}[z] \mathbf{s}(n) + \mathbf{b}(n) \quad (1)$$

où  $(\mathbf{b}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \triangleq ((b_1(n))_{n \in \mathbb{Z}}, \dots, (b_Q(n))_{n \in \mathbb{Z}})^T$  correspond à un bruit additif et  $(\mathbf{M}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  est la réponse impulsionnelle d'un filtre multivarié appelé filtre de mélange. Conformément à l'équation (1), nous désignons par  $\mathbf{M}[z] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{M}(n) z^{-n}$  la transformée en  $z$  d'un filtre (ici, filtre multivarié de mélange) et par  $\mathbf{M}[z] \mathbf{s}(n)$  la sortie du filtre excité par le signal  $(\mathbf{s}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Le but de la séparation de source consiste en la détermination d'un filtre séparateur  $\mathbf{W}[z]$  dont la sortie

$$\mathbf{y}(n) \triangleq \mathbf{W}[z] \mathbf{x}(n) \triangleq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{W}(k) \mathbf{x}(n-k) \quad (2)$$

reconstitue au mieux les sources. Dans le cadre aveugle dans lequel nous nous plaçons, les sources sont *inobservables* et aucune connaissance supplémentaire n'est disponible sur le filtre de mélange. Les hypothèses suivantes sont supposées satisfaites :

- A.1 Stationnarité des sources et non nullité de leurs autocumulants d'ordre quatre. La fonction d'autocorrélation de chacune des sources est définie positive et notée respectivement  $(\gamma_i(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ .
- A.2 Indépendance mutuelle des sources  $(s_1(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $\dots$ ,  $(s_N(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ .
- A.3 Inversibilité à gauche du filtre  $\mathbf{M}[z]$  (ce qui implique en particulier  $Q \geq N$ ).

Dans le cas non bruité, les hypothèses A.1 à A.3 garantissent qu'il est possible de reconstituer les sources à une permutation et un filtrage scalaire près, c'est-à-dire qu'il est possible de déterminer  $\mathbf{W}[z]$  tel que le filtre global  $\mathbf{G}[z] \triangleq \mathbf{W}[z] \mathbf{M}[z]$  s'écrive  $\mathbf{P} \text{diag}(h_1[z], \dots, h_N[z])$ , où  $\mathbf{P}$  est une matrice de permutation et les  $h_i[z]$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$  sont des filtres scalaires. Ces derniers se réduisent à des retards dans le cas de sources temporellement indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.).

## 2.2 Hypothèses sur le bruit

Les méthodes de séparation que nous abordons sont basées sur des cumulants d'ordre supérieur et l'hypothèse gaussienne est souvent prétextée pour éliminer ou négliger l'influence du bruit : il convient cependant de ne pas oublier que, même dans ce cas favorable, les statistiques d'ordre deux interviennent sous forme de contraintes et peuvent être perturbées par le bruit. Nous supposons ici :

- A.4 Le bruit est stationnaire, centré et indépendant des sources. De plus, ses statistiques d'ordre 2 et 4 sont connues.

## 2.3 But et notations

Compte tenu de la présence de bruit, une reconstruction parfaite des sources est impossible malgré l'hypothèse A.3. Aussi, nous nous concentrons sur le problème de l'estimation d'une inverse  $\mathbf{W}[z]$  du système de mélange.

Les méthodes séquentielles de séparation que nous considérons extraient les sources une par une, c'est-à-dire qu'elles déterminent

successivement les sorties globales  $(y_i(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  pour  $i$  variant de 1 à  $N$ . Ceci revient à chercher successivement les lignes correspondantes du filtre séparateur, ou encore les lignes du filtre global. Pour alléger les notations, à l'étape  $i$ , nous notons simplement  $\mathbf{g}[z]$  et  $\mathbf{w}[z]$  les  $i^{\text{ème}}$  lignes en cours de recherche des filtres  $\mathbf{G}[z]$  et  $\mathbf{W}[z]$ . Le signal scalaire  $y(n)$  est également la  $i^{\text{ème}}$  sortie correspondante. Par ailleurs, nous aurons besoin, pour tout filtre ligne  $\mathbf{g}[z]$  de définir une norme par :

$$\|\mathbf{g}\| \triangleq \left( \sum_{j=1}^N \|g_j\|_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

où la norme  $j$  sur la  $j^{\text{ème}}$  composante est donnée par :

$$\|g_j\|_j \triangleq \left( \sum_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} g_j(k_1) g_j^*(k_2) \gamma_j(k_2 - k_1) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

## 3 Extraction d'une source

Nous considérons d'abord l'obtention de la sortie  $y(n)$  du séparateur, par exemple lors de la première étape d'extraction. Dans le cas non bruité, il a été démontré que le critère

$$\mathbf{g}[z] \mapsto \left| \frac{C^4\{y(n)\}}{E\{|y(n)|^2\}^2} \right|^2 \quad (5)$$

où  $C^4\{\cdot\}$  désigne l'auto-cumulant d'ordre quatre, est une fonction de contraste [11]. Plus précisément, sa maximisation mène à un filtre ligne global  $\mathbf{g}[z]$  n'ayant qu'une unique composante non identiquement nulle.

Des résultats théoriques similaires s'appliquent dans le cas bruité à condition d'introduire les termes correctifs nécessaires. En effet, sous les hypothèses A.1 à A.3, la maximisation du critère :

$$\mathbf{g}[z] \mapsto \left| \frac{C^4\{\mathbf{g}[z] \mathbf{s}(n)\}}{\|\mathbf{g}\|^4} \right|^2 \quad (6)$$

fournit un filtre n'ayant qu'une composante non nulle. Or, en utilisant l'hypothèse A.4, un calcul immédiat donne :

$$E\{|y(n)|^2\} = \|\mathbf{g}\|^2 + E\{|\mathbf{w}[z] \mathbf{b}(n)|^2\} \quad (7)$$

$$C^4\{y(n)\} = C^4\{\mathbf{g}[z] \mathbf{s}(n)\} + C^4\{\mathbf{w}[z] \mathbf{b}(n)\}. \quad (8)$$

D'autre part, en écrivant (7) et (8) sous la forme

$$\|\mathbf{g}\|^2 = \sum_{j_1, j_2=1}^Q \sum_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} w_{j_1}(k_1) w_{j_2}^*(k_2) \left( E\{x_{j_1}(n-k_1) x_{j_2}^*(n-k_2)\} - E\{b_{j_1}(n-k_1) b_{j_2}^*(n-k_2)\} \right) \quad (9)$$

$$C^4\{\mathbf{g}[z] \mathbf{s}(n)\} =$$

$$\sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=1}^Q \sum_{(k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathbb{Z}^4} w_{j_1}(k_1) w_{j_2}^*(k_2) w_{j_3}(k_3) w_{j_4}^*(k_4) \left( \text{Cum}\{x_{j_1}(n-k_1), x_{j_2}^*(n-k_2), x_{j_3}(n-k_3), x_{j_4}^*(n-k_4)\} - \text{Cum}\{b_{j_1}(n-k_1), b_{j_2}^*(n-k_2), b_{j_3}(n-k_3), b_{j_4}^*(n-k_4)\} \right) \quad (10)$$

on constate que la solution proposée revient à soustraire la covariance (resp. quadricovariance) du bruit de la matrice de covariance (resp. quadricovariance) du vecteur des observations  $(\mathbf{x}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Evidemment, pour un bruit gaussien, seule la correction (9) est nécessaire.

TAB. 1 – Valeur médiane sur 1000 réalisations du critère  $ISI_1$  (mélange de 3 sources sur 4 capteurs, filtre de longueur 3, 10000 échantillons).

$\sigma_b$	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
$ISI_1$ , bruit «soustrait»	0.0088	0.0074	0.0057	0.0050	0.0050	0.0047
$ISI_1$ , bruit ignoré	0.0242	0.0193	0.0144	0.0105	0.0076	0.0051

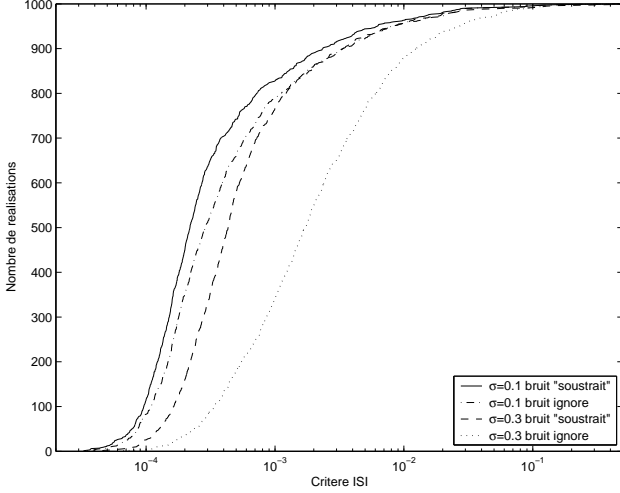


FIG. 1 – Répartition des valeurs du critère  $ISI_1$  obtenues sur 1000 réalisations (mélange de 2 sources sur 4 capteurs, filtre de longueur 3, 10000 échantillons).

## 4 Extraction séquentielle des sources

### 4.1 Déflation

L'extraction séquentielle des sources se fonde explicitement sur l'exploitation de statistiques d'ordre deux. Ainsi, l'approche par déflation utilise la sortie  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  du séparateur obtenue à l'étape précédente pour soustraire la contribution de la source correspondante dans le mélange. Plus précisément, il s'agit de déterminer par moindres carrés un filtre ajusté  $\mathbf{t}[z] = (t_1[z], \dots, t_Q[z])^T$  de taille  $Q \times 1$ . Sous réserve que l'étape précédente ait permis la détermination d'un filtre ligne  $\mathbf{w}[z]$  extrayant exactement une source, par exemple la première, on a  $\mathbf{w}[z]\mathbf{M}[z] = (h_1[z], 0, \dots, 0)$ . Il est alors possible d'écrire, en utilisant (1) ainsi que l'indépendance mutuelle des sources et celle du bruit :

$$\begin{aligned} & E\{|(x_i(n) - b_i(n)) - t_i[z]\mathbf{w}[z](\mathbf{x}(n) - \mathbf{b}(n))|^2\} \\ &= E\{|(M_{i1}[z] - t_i[z]h_1[z])s_1(n)|^2\} + \sum_{j=2}^N E\{|M_{ij}[z]s_j(n)|^2\}. \end{aligned} \quad (11)$$

L'annulation de la contribution de la première source sur les capteurs est obtenue à condition que, pour tout  $i \in \{1, \dots, Q\}$ , le filtre  $M_{i1}[z] - t_i[z]h_1[z]$  soit identiquement nul. Par conséquent, le filtre ajusté  $\mathbf{t}[z]$  peut être obtenu comme résultant de la minimisation du membre de droite de l'équation (11). Dans le cas non bruité, ceci se réduit à la minimisation de  $E\{|x_i(n) - t_i[z]y(n)|^2\}$ . En présence de bruit, le critère d'optimisation reste du même type, mais où la corrélation du bruit doit être soustraite de celle des observations. Ceci revient à mi-

nimiser, pour tout  $i \in \{1, \dots, Q\}$ , le critère quadratique :

$$E\{|x_i(n) - t_i[z]y(n)|^2\} - E\{|t_i[z]\mathbf{w}[z]\mathbf{b}(n)|^2\} + 2\Re\{E\{b_i^*(n)t_i[z]\mathbf{w}[z]\mathbf{b}(n)\}\}. \quad (12)$$

Enfin, il est important de noter que le retour de prédiction de l'étape de déflation introduit un filtrage du bruit sur les capteurs par le filtre  $\mathbf{I} - \mathbf{t}[z]\mathbf{w}[z]$ . Dans la pratique, il convient, à chaque étape, de prendre en compte les modifications des caractéristiques statistiques du bruit que cela entraîne.

TAB. 2 – Valeur médiane sur 500 réalisations du critère ISI obtenu par une méthode de déflation (3 sources, 4 capteurs, 10000 échantillons,  $\sigma_b = 0.3$ ).

	$\mathbf{b}(n)$ «soustrait»	$\mathbf{b}(n)$ ignoré
$ISI_1$	0.0058	0.0115
$ISI_2$	0.0120	0.0164
$ISI_3$	0.0196	0.0210

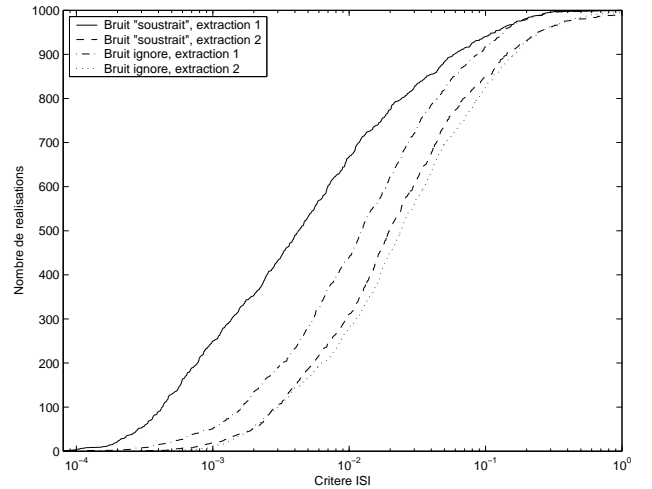


FIG. 2 – Répartition des valeurs des critères  $ISI$  ( $i = 1, 2$ ) obtenues sur 1000 réalisations (mélange de 2 sources sur 3 capteurs, filtre de longueur 3, 10000 échantillons,  $\sigma_b = 0.3$ ).

### 4.2 Méthode hiérarchique par décorrélation

Les résultats précédents s'adaptent aux approches hiérarchiques qui visent la décorrélation spatiale des sorties du séparateur. Il a été démontré [4] qu'il est possible, au lieu d'effectuer une soustraction de déflation, de contraindre la recherche des lignes successives du séparateur de sorte que les sorties soient mutuellement décorrélées. Cette décorrélation se traduit sur la ligne du filtre séparateur que l'on cherche en une contrainte quadratique dans laquelle intervient l'autocorrélation du vecteur d'observation  $(\mathbf{x}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . L'insertion du bruit dans le mo-

dèle permet, au travers de calculs analogues au cas précédent, de constater que la contrainte idéale souhaitée est obtenue en soustrayant la corrélation du bruit à celle du vecteur d'observation.

## 5 Résultats

Les performances de l'estimation du système inverse ont été évaluées sur la base d'un critère d'interférences entre symboles, qui s'écrit pour la  $i^{\text{ème}}$  ( $1 \leq i \leq N$ ) ligne du filtre global :

$$\text{ISI}_i \triangleq \frac{\sum_{j,k} |G_{ij}(k)|^2 - \max_{j,k} |G_{ij}(k)|^2}{\max_{j,k} |G_{ij}(k)|^2} \quad (13)$$

Les sources considérées étaient réelles du type PAM4 et le bruit additif était gaussien, décorrélé, de variance  $\sigma_b^2$  sur chaque capteur. Le tableau 1 compare les résultats obtenus pour l'extraction de la première source lorsque le bruit est pris en compte ou ignoré. La répartition des valeurs du critère  $\text{ISI}_1$  obtenues au cours des réalisations est donnée pour deux niveaux de bruit différents sur la figure 1. On constate que la méthode proposée permet d'améliorer l'estimation de l'inverse du filtre de mélange, ce qui s'avère d'autant plus utile que la puissance de bruit est importante.

Enfin, l'extraction successive des sources avec prise en compte du bruit est illustrée dans le cadre de la déflation. Le tableau 2 fournit les valeurs du critère de séparation lors de l'extraction successive de trois sources. La figure 2 indique la répartition sur l'ensemble des réalisations des valeurs des critères de séparation dans le cas d'un mélange de deux sources sur trois capteurs. Nous constatons à nouveau l'intérêt de la prise en compte du bruit. En parallèle, nous pouvons noter une dégradation des résultats au fur et à mesure des extractions, due à l'accumulation d'erreurs propre aux méthodes séquentielles.

## 6 Conclusion

Nous avons dans cet article illustré l'effet du bruit dans les méthodes aveugles de séparation de sources basées sur l'emploi du kurtosis. La plupart du temps négligé, l'influence du bruit dans les statistiques d'ordre 2 et 4 a ici été prise en compte dans le but d'une amélioration de l'estimation de l'inverse du système de mélange.

Un autre problème serait de minimiser l'erreur quadratique moyenne entre chaque source et son estimée respective. Il est intéressant, à ce propos, de noter que l'utilisation du filtre inverse obtenu par la méthode présentée n'est *a priori* pas la solution la plus efficace. En effet, le bruit se répercute sur chacune des estimées avec une variance  $E\{|\mathbf{W}_{i,:}[z]\mathbf{b}(n)|^2\}$  qui n'est pas explicitement contrôlée. Néanmoins, il a été observé que l'égalisation par des critères de module constant présente de bonnes performances en terme d'estimation linéaire en moyenne quadratique. Des résultats théoriques [15, 14, 7] concernant le comportement des algorithmes de ce type invitent à penser qu'il conviendrait d'utiliser des méthodes d'estimation non-linéaire afin d'obtenir de meilleurs résultats.

## Références

- [1] V. Capdevielle, C. Servière, and J.-L. Lacoume. Blind separation of wide-band sources in the frequency domain. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 2080–2083, Detroit, 1995.
- [2] J.-F. Cardoso. Blind signal separation : statistical principles. *Proceedings of the IEEE. Special issue on blind identification and estimation*, 9(10) :2009–2026, October 1998.
- [3] J.-F. Cardoso and D.-T. Pham. Optimization issues in noisy gaussian ICA. In *Proc. of ICA'04*, pages 41–48, Granada, Spain, 2004.
- [4] M. Castella, A. Chevreuril, and J.-C. Pesquet. Séparation aveugle d'un mélange convolutif de sources non linéaires par une approche hiérarchique. In *GRETSI*, Paris, France, September 2003.
- [5] P. Comon. Independent component analysis, a new concept. *Signal Processing*, 36(3) :287–314, April 1994.
- [6] P. Comon. Contrasts for multichannel blind deconvolution. *IEEE Signal Processing Letters*, 3(7) :209–211, July 1996.
- [7] I. Fijalkow, A. Touzni, and J. R. Treichler. Fractionally spaced equalization using CMA : Robustness to channel noise and lack of disparity. *IEEE Trans. Signal Processing*, 45(1) :56–66, January 1997.
- [8] Y. Inouye and T. Sato. Iterative algorithms based on multistage criteria for multichannel blind deconvolution. *IEEE Trans. Signal Processing*, 47(6) :1759–1764, June 1999.
- [9] E. Moreau and J.-C. Pesquet. Generalized contrasts for multichannel blind deconvolution of linear systems. *IEEE Signal Processing Letters*, 4(6) :182–183, June 1997.
- [10] P. A. Regalia and M. Mboup. Properties of some blind equalization criteria in noisy multiuser environments. *IEEE Trans. Signal Processing*, 49(12) :3112–3122, December 2001.
- [11] C. Simon, P. Loubaton, and C. Jutten. Separation of a class of convolutive mixtures : a contrast function approach. *Signal Processing*, (81) :883–887, 2001.
- [12] A. Touzni, I. Fijalkow, M. G. Larimore, and J. R. Treichler. A globally convergent approach for blind MIMO adaptive deconvolution. *IEEE Trans. Signal Processing*, 49(6) :1166–1178, June 2001.
- [13] J. K. Tugnait. Identification and deconvolution of multichannel linear non-gaussian processes using higher order statistics and inverse filter criteria. *IEEE Trans. Signal Processing*, 45(3) :658–672, March 1997.
- [14] H. H. Zeng, L. Tong, and C. R. Johnson, Jr. Relationships between the constant modulus and wiener receivers. *IEEE Trans. on Information Theory*, 44(4) :1523–1538, July 1998.
- [15] H. H. Zeng, L. Tong, and C. R. Johnson, Jr. An analysis of constant modulus receivers. *IEEE Trans. Signal Processing*, 47(11) :2990–2999, November 1999.