

# Propriété CFAR-Matrice du Détecteur BORD - Application Radar sur Signaux Expérimentaux non-Gaussiens

Frédéric PASCAL<sup>1,2,3</sup>, Jean-Philippe OVARLEZ<sup>1</sup>, Philippe FORSTER<sup>2</sup>, Pascal LARZABAL<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ONERA DEMR/TSI  
Chemin de la Humière, F-91761 Palaiseau Cedex, France

<sup>2</sup>GEA  
1 Chemin Desvallières, F-92410 Ville d'Avray, France

<sup>3</sup>ENS Cachan/SATIE  
61 Avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan Cedex, France  
pascal@onera.fr, ovarlez@onera.fr, philippe.forster@cva.u-paris10.fr,  
pascal.larzabal@satie.ens-cachan.fr

**Résumé** – Cet article propose d'étudier, dans une première partie, la propriété "CFAR-Matrice" du détecteur BORD de manière théorique, et par la suite, d'utiliser ce résultat sur signaux expérimentaux. Son application sur données expérimentales ouvre une nouvelle voie pour l'ajustement du seuil de détection dans la communauté radar (problème de la régulation de fausse alarme sur données hétérogènes). L'analyse expérimentale de signaux valide plusieurs résultats théoriques importants.

**Abstract** – This paper is devoted, in a first section, to the BORD theoretical analysis. The "CFAR-Matrix" property is derived in a first time, and in a second section, this property is used on experimental radar signals. This application allows to adjust the detection threshold for a given probability of False Alarm when the clutter is non-Gaussian and modelled by a SIRP. Moreover, experimental analysis confirms several theoretical results, developed in other papers.

## 1 Introduction

Depuis plusieurs années, la caractérisation de l'environnement non-Gaussien (fouillis de sol ou de mer) dans la communauté radar connaît un intérêt grandissant [1, 2, 3], notamment depuis que des mesures expérimentales [4] ont montré que celles-ci pouvaient être correctement décrites par des processus sphériques aléatoires invariants (SIRP), englobant de nombreuses lois classiques (Gauss, K-distribution, Weibull,...).

En détection radar, le problème fondamental consiste à détecter, dans un vecteur d'observation  $\mathbf{y}$  de dimension  $m$ , un signal complexe  $\mathbf{s}$  connu, caractérisant une cible, corrompu par un bruit de fouillis  $\mathbf{c}$  additif non-Gaussien. Ce problème se formalise généralement par un test d'hypothèses :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{y} = \mathbf{c} & \mathbf{y}_i = \mathbf{c}_i \quad i = 1, \dots, N \\ H_1 : \mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{c} & \mathbf{y}_i = \mathbf{c}_i \quad i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (1)$$

où les  $\mathbf{y}_i$  sont des vecteurs d'observations indépendants appelés "données secondaires", contenant uniquement le bruit de fouillis et permettant d'estimer les paramètres du fouillis (Matrice de covariance, puissance, densité, ...).

La résolution de ce problème dans le cadre d'un bruit additif non-Gaussien SIRP a permis de construire plusieurs tests de rapports de vraisemblance généralisés (GLRT), comme le GLRT-Linear Quadratic (GLRT-LQ) [1, 2] ou le BORD (Bayesian Optimum Radar Detector) Asymp-

totique [3]. Un des problèmes majeurs de ces détecteurs est que la matrice de covariance des données est inconnue. Il faut par conséquent l'estimer puis la substituer dans le détecteur qui sera qualifié dès lors de détecteur adaptatif.

Dans cet article nous nous proposons d'étudier les performances de deux estimateurs de la matrice de covariance des données. La première partie fait un rapide état de l'art dans le domaine de la détection radar, en présentant la modélisation du fouillis et les estimateurs utilisés. Dans la deuxième partie, une étude théorique originale va permettre d'établir la propriété de "CFAR-Matrice" du détecteur adaptatif selon l'estimateur utilisé, c'est un des apports de ce papier. Enfin, dans la troisième partie, une application réalisée sur des données expérimentales, va être présentée, avec les deux estimateurs de la matrice étudiés, elle permet de valider certains résultats théoriques déjà établis.

## 2 Formulation du problème et Environnement

Rappelons qu'un SIRP [5] est le produit d'une variable aléatoire positive  $\tau$  (*texture*) de densité de probabilité  $p(\tau)$  et d'un vecteur Gaussien  $\mathbf{x}$  de dimension  $m$  (*speckle*), indépendant de  $\tau$ , de moyenne nulle et de covariance  $\mathbf{M} = \mathbb{E}(\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger)$  vérifiant la normalisation  $\text{Tr}(\mathbf{M}) = m$ , où  $\dagger$  désigne l'opérateur "transposé-conjugué" :

$$\mathbf{c} = \sqrt{\tau} \mathbf{x}.$$

La densité de probabilité de  $\mathbf{c}$  est alors définie par :

$$p_m(\mathbf{c}) = \frac{1}{(\pi \tau)^m |\mathbf{M}|} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^\dagger \mathbf{M}^{-1} \mathbf{c}}{\tau}\right) p(\tau) d\tau, \quad (2)$$

Le problème majeur des détecteurs évoqués présentés dans l'introduction est la non connaissance de la matrice de covariance  $\mathbf{M}$ . En pratique,  $\mathbf{M}$  est inconnue et une estimée est nécessaire. Cette dernière doit évidemment vérifier la condition de normalisation  $\text{Tr}(\widehat{\mathbf{M}}) = m$ . Plusieurs estimateurs ont été proposés dans la littérature comme la "Normalized Sample Covariance Matrix Estimate" (NSCME) [6, 7], définie comme :

$$\widehat{\mathbf{M}}_{NSCME} = \frac{m}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^\dagger}{\mathbf{c}_i^\dagger \mathbf{c}_i} = \frac{m}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\dagger}{\mathbf{x}_i^\dagger \mathbf{x}_i}, \quad (3)$$

où pour  $1 \leq i \leq N$ ,  $\mathbf{c}_i = \sqrt{\tau_i} \mathbf{x}_i$ .

Par ailleurs, dans [8], nous avons étudié certaines propriétés de l'estimateur  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$  du Point Fixe, issu de la théorie du maximum de vraisemblance et défini comme étant l'unique solution de l'équation suivante [9] :

$$\widehat{\mathbf{M}}_{FP} = \frac{m}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^\dagger}{\mathbf{c}_i^\dagger \widehat{\mathbf{M}}_{FP}^{-1} \mathbf{c}_i}. \quad (4)$$

Dans cet article, nous nous proposons d'étudier les propriétés de la version adaptative du BORD asymptotique. Ce détecteur est défini dans [3] de la façon suivante :

$$\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}) = \frac{|\mathbf{p}^\dagger \widehat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{y}|^2}{(\mathbf{p}^\dagger \widehat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{p})(\mathbf{y}^\dagger \widehat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{y})} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} \lambda, \quad (5)$$

où  $\mathbf{p}$  est le "steering vector" caractérisant la vitesse de la cible (Doppler). Ce détecteur, construit avec l'estimateur du point fixe ou la NSCME, ne dépend pas de la loi statistique de la texture, c'est la propriété de Taux de Fausse Alarme Constant (CFAR) quelle que soit la texture ("CFAR-texture") établie à plusieurs reprises.

### 3 Résultats Théoriques

Dans cette partie, nous allons établir la propriété "CFAR-Matrice" de  $\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{FP})$ . Avant tout, définissons la propriété "CFAR-Matrice" d'un détecteur adaptatif.

**Définition 1** Un détecteur adaptatif  $\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}})$  vérifie la propriété "CFAR-Matrice" si sa distribution statistique est indépendante de la matrice  $\mathbf{M}$  de covariance estimée par  $\widehat{\mathbf{M}}$ .

Cette propriété est, comme nous allons le voir par la suite, d'un intérêt pratique majeur, elle fait l'objet du théorème suivant :

**Théorème 1** Soient  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  deux matrices de covariance distinctes ( $\mathbf{M}_1 \neq \mathbf{M}_2$ ), soit  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP,1}$  (respectivement  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP,2}$ ) l'estimateur du point fixe de  $\mathbf{M}_1$  (respectivement

de  $\mathbf{M}_2$ ),

alors, sous l'hypothèse  $H_0$  (pas de cible),

$$\mathcal{L}\left(\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{FP,1})\right) = \mathcal{L}\left(\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{FP,2})\right) \quad (6)$$

où  $\mathcal{L}(X)$  représente la loi de la variable aléatoire  $X$ .

Ainsi, le théorème 1 établit la propriété "CFAR-Matrice" du détecteur BORD adaptatif construit avec l'estimateur du point fixe  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$ . Voici la démonstration de ce théorème.

**Preuve 1** Nous devons montrer que la distribution de  $\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{FP,1})$  ne dépend pas de la matrice de covariance  $\mathbf{M}_1$ .

Considérons tout d'abord  $N$  données secondaires ayant pour matrice de covariance  $\mathbf{M}_1$ , i.e. pour  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\mathbf{x}_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{M}_1).$$

Dans cette démonstration, des données secondaires Gaussiennes vont être utilisées car l'estimateur du point fixe ainsi que le détecteur sont indépendants de la texture : on peut donc prendre  $\tau_i = 1, \forall i$ .

L'estimateur du point fixe de  $\mathbf{M}_1$  est défini par

$$\widehat{\mathbf{M}}_{FP,1} = \frac{m}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\dagger}{\mathbf{x}_i^\dagger \widehat{\mathbf{M}}_{FP,1}^{-1} \mathbf{x}_i},$$

et le détecteur adaptatif BORD est défini par

$$\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{FP,1}) = \frac{|\mathbf{p}^\dagger \widehat{\mathbf{M}}_{FP,1}^{-1} \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{p}^\dagger \widehat{\mathbf{M}}_{FP,1}^{-1} \mathbf{p})(\mathbf{x}^\dagger \widehat{\mathbf{M}}_{FP,1}^{-1} \mathbf{x})} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} \lambda,$$

où  $\mathbf{x}$  représente le vecteur d'observation avec,  $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{M}_1)$ .

La première étape consiste à blanchir les données par le changement de variables  $\mathbf{y} = \mathbf{M}_1^{-1/2} \mathbf{x}$ . Alors,  $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . On effectue ce changement dans l'estimateur du point fixe,

$$\widehat{\mathbf{M}}_{FP,1} = \frac{m}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{M}_1^{1/2} \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^\dagger \mathbf{M}_1^{1/2}}{\mathbf{y}_i^\dagger \left(\mathbf{M}_1^{-1/2} \widehat{\mathbf{M}}_{FP,1} \mathbf{M}_1^{-1/2}\right)^{-1} \mathbf{y}_i}.$$

En posant maintenant

$$\widehat{\mathbf{T}} = \mathbf{M}_1^{-1/2} \widehat{\mathbf{M}}_{FP,1} \mathbf{M}_1^{-1/2},$$

on constate que  $\widehat{\mathbf{T}}$  est l'unique estimateur du point fixe (à une rotation près) dans le cas de données  $\mathbf{y}_i$  ayant comme matrice de covariance, l'identité  $\mathbf{I}$ .

On s'intéresse maintenant au détecteur, auquel on applique aussi le changement de variable

$$\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{FP,1}) = \frac{|\mathbf{p}_1^\dagger \widehat{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{y}|^2}{(\mathbf{p}_1^\dagger \widehat{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{p}_1)(\mathbf{y}^\dagger \widehat{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{y})} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} \lambda,$$

où  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{M}_1^{-1/2} \mathbf{p}$ . La distribution de  $\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}})$  ne dépend pas de  $\mathbf{p}$ , et ainsi, la loi de  $\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{FP,1})$  est la même que la loi de  $\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{T}})$ . Ceci conclut la démonstration du théorème 1.

**Remarque :**  $\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{NSCME})$  ne vérifie pas la propriété "CFAR-Matrice".

Les propriétés du détecteur construit avec les deux estimateurs  $\widehat{\mathbf{M}}_{NSCME}$  et  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$  sont synthétisées dans le tableau suivant :

Propriétés de $\hat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}})$	$\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$	$\widehat{\mathbf{M}}_{NSCME}$
CFAR-texture	Oui	Oui
CFAR-Matrice	Oui	Non

Les résultats contenus dans le tableau montrent que, d'un point de vue opérationnel, l'estimateur du point fixe  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$  est plus intéressant. En effet, les deux propriétés concernant le détecteur construit avec  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$ , affirment l'indépendance de ce détecteur avec la texture et avec la matrice de covariance des données. Ceci signifie que, bien que prenant en compte l'impulsivité du fouillis dans sa modélisation non-Gaussienne,  $\hat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{FP})$  aura la même distribution quel que soit le SIRP utilisé, et cette distribution peut-être calculée analytiquement dans le cas où les données sont des variables aléatoires indépendantes Gaussiennes, centrées et de matrice de covariance l'identité, il s'agit là d'un cas "d'école". Il en est évidemment de même, pour la relation entre la probabilité de fausse alarme et le seuil de détection; cette relation n'étant rien d'autre que la fonction de répartition de  $\hat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{FP})$ .

## 4 Résultats Expérimentaux

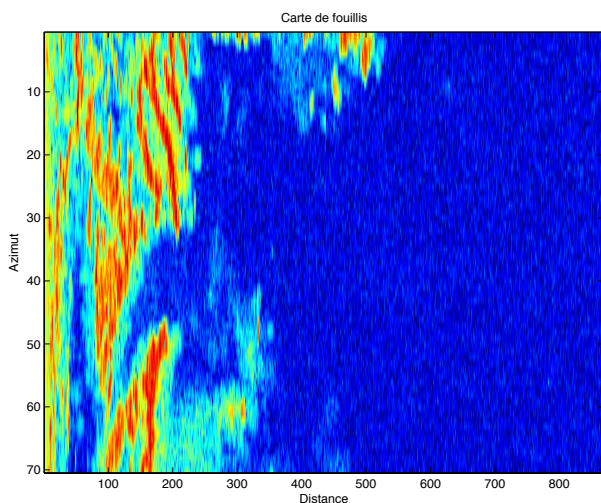


Fig. 1 : Carte distance-azimut

Cette partie présente des résultats expérimentaux obtenus à partir de l'analyse de données réelles de fouillis de sol. La figure 1 est une carte "distance-azimut" de données radar collectées par un radar de Thales Air Defence<sup>1</sup> pour  $m = 8$  impulsions. Elle présente des données hétérogènes non-Gaussiennes. La zone foncée, de niveau faible, représente le bruit thermique blanc et Gaussien (zones "distance" au delà de l'horizon radioélectrique du radar). Les zones plus claires, de niveau fort, représentent le fouillis de sol, de nature impulsive et très corrélé. Pour mettre en évidence les zones de bruit impulsif, la figure 2

<sup>1</sup>Les auteurs tiennent à remercier Thales Air Defence pour l'exploitation de leurs données

représente la carte distance-azimut de la figure 1 en 3 dimensions (la troisième dimension codant la puissance du bruit).

L'analyse de ces données radar par comptage permet l'ajustement du seuil de détection  $\lambda$  en fonction de la Probabilité de Fausse Alarme (PFA). Le réglage expérimental du seuil de détection  $\lambda$  a donc été déterminé par comptage en déplaçant, sur l'image de la figure 1, un masque CFAR rectangulaire de taille  $5 \times 5$ . Pour chaque case centrale du masque (case de test), la matrice  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$  a été estimée grâce aux  $N = 24$  vecteurs de taille  $m$  considérés comme données secondaires et entourant la case testée.

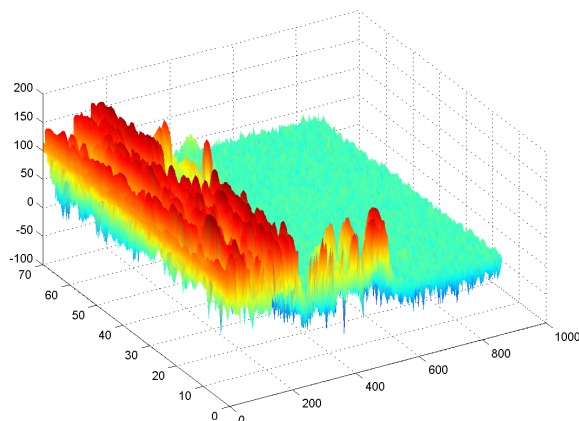


Fig. 2 : Carte distance-azimut en 3 dimensions

Une relation théorique liant  $\lambda$  à la PFA a été établie dans les deux cas suivants :  $\mathbf{M}$  connue [3] et  $\mathbf{M}$  inconnue [10]. L'analyse des données radar, par comptage, permet la validation de la relation théorique lorsque  $\mathbf{M}$  est estimée par  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$ . Cette validation expérimentale n'est possible que grâce à la propriété CFAR-Matrice du détecteur.

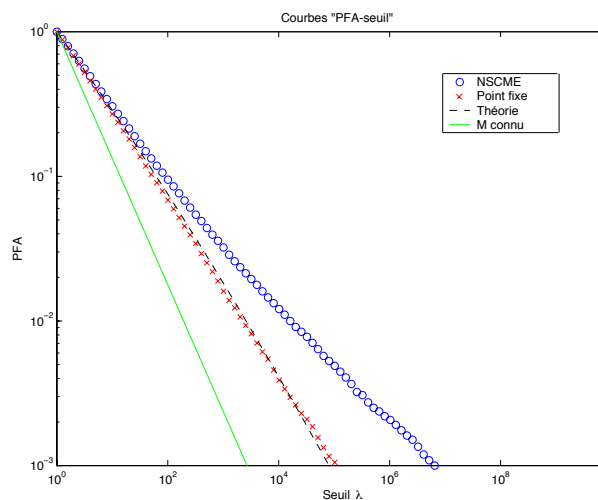


Fig. 3 : Réglage du seuil de détection

Sur la figure 3, la courbe pleine correspond à la relation théorique "PFA-seuil" dans le cas où  $\mathbf{M}$  est connue tandis que la courbe en pointillés correspond à la relation théorique "PFA-seuil" dans le cas où  $\mathbf{M}$  est inconnue et estimée par  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$ .

La courbe constituée de croix ( $\times$ ) représente la relation "PFA-seuil" expérimentale quand  $\mathbf{M}$  est estimée par  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$ . Elle est en parfait accord avec la relation théorique. On observe également, sur la courbe constituée de cercles ( $\circ$ ), que la relation "PFA-seuil" expérimentale calculée pour  $\widehat{\mathbf{M}} = \widehat{\mathbf{M}}_{NSCME}$  ne coïncide pas avec la courbe constituée de croix. Cette différence s'explique par le fait que  $\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{NSCME})$  ne vérifie pas la propriété CFAR-Matrice, indispensable pour du fouillis hétérogène.

Cette propriété "CFAR-Matrice" est très intéressante d'un point de vue opérationnel. Lorsque la matrice de covariance  $\mathbf{M}$  du processus SIRP est inconnue, le fait de construire le détecteur  $\widehat{\Lambda}$  avec l'estimée  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$  le rend totalement indépendant de  $\mathbf{M}$ . De ce fait, la relation "PFA-seuil" est elle-même indépendante de  $\mathbf{M}$ . Dans un environnement hétérogène de fouillis comme le montre la figure 1, cette propriété nous garantit une régulation constante de la fausse alarme quel que soit le point de la carte distance-azimut où l'on estime la matrice de covariance.

La figure 4 représente, pour tous les points de la carte distance-azimut, le rapport de vraisemblance, i.e. le BORD, calculé avec l'estimateur du point fixe  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$ . Malgré l'hétérogénéité du fouillis, l'utilisation de l'estimateur du point fixe a permis d'obtenir une carte de vraisemblance totalement uniforme assurant ainsi une régulation constante de la fausse alarme, même dans les zones de transitions.

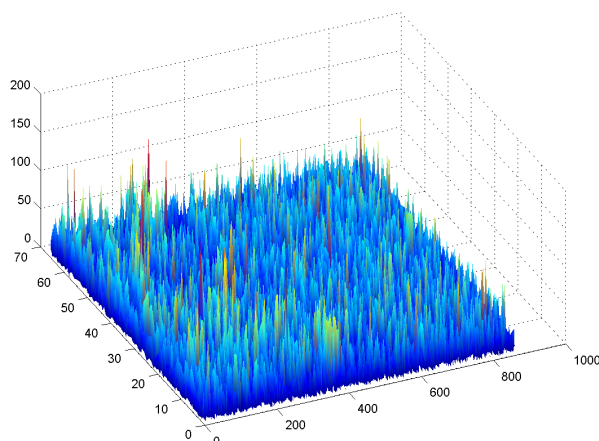


Fig. 4 : Homogénéisation du fouillis

## 5 Conclusion

Dans cet article, une nouvelle propriété du détecteur adaptatif BORD construit avec l'estimateur de matrice de covariance du point fixe a été établie. Cette propriété CFAR-Matrice rend la statistique du détecteur invariante

de la véritable matrice de covariance des données. Une des conséquences majeures de cette propriété est de pouvoir construire un détecteur à partir de données secondaires n'ayant pas toutes la même matrice de covariance, ce qui est souvent le cas en pratique. De plus, l'analyse de signaux expérimentaux de fouillis de sol non-Gaussien a permis de valider la relation théorique liant la probabilité de fausse alarme et le seuil de détection, établie dans [10].

## Références

- [1] E. Conte, M. Lops and G. Ricci, Asymptotically Optimum Radar Detection in Compound-Gaussian Clutter, *IEEE Trans.-AES*, **31**(2) (April 1995), 617-625.
- [2] F. Gini, Sub-Optimum Coherent Radar Detection in a Mixture of K-Distributed and Gaussian Clutter, *IEE Proc.Radar, Sonar Navig*, **144**(1) (February 1997), 39-48.
- [3] E. Jay, J.P. Ovarlez, D. Declercq and P. Duvaut, BORD : Bayesian Optimum Radar Detector, *Signal Processing*, **83**(6) (June 2003), 1151-1162
- [4] J.B. Billingsley, Ground Clutter Measurements for Surface-Sited Radar, *Technical Report 780, MIT*, February 1993.
- [5] K. YAO "A Representation Theorem and its Applications to Spherically Invariant Random Processes", *IEEE Trans.-IT*, Vol.19, No.5, pp.600-608 Sept. 1973
- [6] E. CONTE, M. LOPS, G. RICCI, "Adaptive Radar Detection in Compound-Gaussian Clutter", Proc. of the European Signal processing Conf., September 1994, Edinburgh, Scotland.
- [7] F. GINI, M.V. GRECO, AND L. VERRAZZANI, "Detection Problem in Mixed Clutter Environment as a Gaussian Problem by Adaptive Pre-Processing, *Electronics Letters*, **31**(14)(July 1995), 1189-1190.
- [8] F. PASCAL, P. FORSTER, J.P. OVARLEZ AND P. LARZABAL, "Theoretical analysis of an improved covariance matrix estimator in non-Gaussian Noise", *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, March 2005, Philadelphia, PA, USA.
- [9] F. PASCAL, Y. CHITOUR, J.P. OVARLEZ P. FORSTER AND P. LARZABAL, "Existence and Characterization of the Covariance Matrix Maximum Likelihood Estimate in Spherically Invariant Random Processes", soumis à *IEEE-SP*, avril 2005
- [10] F. PASCAL, J.P. OVARLEZ, P. FORSTER AND P. LARZABAL, "Constant False Alarm Rate Detection in Spherically Invariant Random Processes", Proc. of the European Signal processing Conf., September 2004, 2143-2146, Vienna, Austria.