

Analyse multirésolution L_2 –optimale : estimation par quasi-projections

Laurent CONDAT, Annick MONTANVERT

Laboratoire LIS – Fédération ELESA
961 rue de la Houille Blanche, BP 46, 38402 Saint Martin d’Hères Cedex, France
laurent.condat@lis.inpg.fr

Résumé – On s’intéresse à la représentation, à l’aide d’une fonction reconstruite de résolution souhaitée, d’un signal discret, interprété comme un ensemble de mesures sur une fonction inconnue. Cette dernière est approchée du mieux possible par la fonction reconstruite, et ce à partir du signal discret. L’approche présentée est originale, et s’appuie sur la théorie de l’approximation pour réaliser une quasi-projection de la fonction inconnue dans l’espace de reconstruction choisi. Nous présentons les filtres obtenus dans des cas concrets d’approximation spline, et nous validons notre approche par la mise en œuvre de rotations sur des images.

Abstract – We are interested in reconstructing, at a given resolution, a function modeling a discrete signal, which is considered as a set of measures on a unknown function. To this end, this unknown function is approximated from the discrete signal, by performing a quasi-projection of it in the chosen reconstruction space. We design filters for spline approximation and we validate our approach by image rotation experiments.

1 Introduction

En traitement du signal et des images, de nombreux problèmes nécessitent de faire le lien entre les domaines discret et continu. Si un signal, défini sur une grille discrète, doit être ré-échantillonné, il est utile de le modéliser par une fonction définie continuellement, que l’on rediscrétise ensuite en de nouveaux points. Par exemple, un tel traitement peut être mis en œuvre pour effectuer une translation de pas non-entier ou une rotation sur une image, ou pour modifier la fréquence d’échantillonnage d’un signal audio. De plus, de nombreux problèmes, comme la détection de contours, se traitent plus aisément à l’aide d’un formalisme continu, qui autorise par ex. le calcul de dérivées.

Lorsque le signal $s = (s[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ résulte de l’échantillonnage ponctuel d’une fonction $f(x)$ à bande limitée, c’est-à-dire que $s[k] = f(k)$ avec $\hat{f}(\omega) \triangleq \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-j\omega x} dx$ à support dans $]-\pi, \pi[$, la théorie de Shannon [1] nous dit que f peut être parfaitement reconstruite à partir du signal s . Plus généralement, si f appartient à un espace $V_T(\varphi)$ de résolution $1/T \leq 1$ engendré par une fonction *noyau* $\varphi(x)$ et ses translats :

$$V_T(\varphi) = \left\{ f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c[k] \varphi\left(\frac{x}{T} - k\right) \mid c \in \ell_2(\mathbb{Z}) \right\}, \quad (1)$$

alors on peut reconstruire f à partir des échantillons idéaux $s[k] = f(k)$, mais aussi à partir d’échantillons généralisés (ou non-idéaux) de la forme :

$$s[k] = f * \bar{\varphi}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x - k) dx \quad (2)$$

où $\bar{\varphi}(x)$ est un noyau d’analyse (qui peut être une distribution), et $\bar{g}(x) = g(-x)$ [2][3][4]. On retrouve des échantillons idéaux lorsque $\bar{\varphi}(x) = \delta(x)$ est une *masse de Dirac* ($\hat{\delta}(\omega) = 1$). Le modèle d’échantillonnage non-idéal est représentatif de la formation des signaux discrets : la fonction $\bar{\varphi}(x)$ représente la réponse impulsionnelle du capteur ayant servi à l’acquisition du signal. Par conséquent, un signal discret s est interprété comme

une suite de *mesures* sur une fonction inconnue $f(x)$.

Dans les applications réelles, la fonction f peut être quelconque, et sa reconstruction exacte n’est généralement pas possible. L’objectif fixé est donc le suivant : étant donné un signal s constituant une série de mesures sur une fonction inconnue $f \in L_2(\mathbb{R})$, i.e $s[k] = f * \bar{\varphi}(k)$, on cherche à reconstruire une fonction $f_T(x) \in V_T(\varphi)$ (pour un certain noyau $\varphi(x)$ à choisir) de résolution $1/T \geq 1$ souhaitée (avec $T \in \mathbb{N}^*$), approchant au mieux f au sens L_2 , c.-à-d. minimisant $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_T(x)|^2 dx$ parmi toutes les fonctions de $V_T(\varphi)$. Pour une résolution fixée, on cherche donc à ce que la fonction $f_T(x)$ retienne au mieux l’information sur f disponible dans le signal s . On cherche une fonction reconstruite de la forme :

$$f_T(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_T[k] \varphi\left(\frac{x}{T} - k\right), \quad (3)$$

l’étude consistant à déterminer la séquence $c_T = (c_T[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ à partir de s . Ce travail généralise [5] dans lequel est étudiée la reconstruction par quasi-interpolation, correspondant au cas $\bar{\varphi} = \delta$ et $T = 1$. On se restreint au cadre 1D, la reconstruction dans le cadre multidimensionnel s’effectuant efficacement à l’aide de traitements séparables. Dans la suite, on définit la transformée en z d’un filtre discret $h = (h[k])$ par $H(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] z^{-k}$ et sa transformée de Fourier par $\hat{h}(\omega) = H(e^{j\omega})$.

2 Approximation par (quasi-)projection

2.1 Projections orthogonale et oblique

Etant donnée une fonction $f \in L_2$, sa meilleure approximation dans l’espace $V_T(\varphi)$ s’obtient en la projetant orthogonalement dans cet espace, ce qui fournit la fonction $f_T(x)$ ayant la forme de l’eqn. (3), où les coefficients $c_T[k]$ s’obtiennent par :

$$c_T[k] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi_d\left(\frac{x}{T} - k\right) dx. \quad (4)$$

φ_d est la fonction *duale* de φ , définie au moyen de a_φ , l'auto-corrélation discrète de φ : $a_\varphi[k] = \varphi * \tilde{\varphi}(k)$:

$$\hat{\varphi}_d(\omega) = \frac{\hat{\varphi}(\omega)}{\hat{a}_\varphi(\omega)}. \quad (5)$$

En pratique, $f(x)$ est inconnue, donc sa projection orthogonale n'est pas accessible. Si on impose la linéarité et l'invariance par translation du processus d'approximation, alors la séquence $c_T = (c_T[k])$ s'obtient par

$$c_T = [s * h_T] \downarrow T \quad (6)$$

où l'opérateur de décimation est défini par $[h] \downarrow T = (h[Tk])_{k \in \mathbb{Z}}$, et le préfiltre h_T est à déterminer. Définissons le filtre g_T par

$$g_T[k] = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{T}\right) \tilde{\varphi}(x - k) dx. \quad (7)$$

Dans le cas $T = 1$, l'approche usuelle consiste à effectuer une reconstruction *consistante* [3, 6] : $f_1(x)$ est définie comme l'unique fonction de $V_1(\varphi)$ fournissant les mêmes mesures que f . Le préfiltre correspondant à cette reconstruction est

$$h_1 = g_1^{-1} \quad (\Leftrightarrow H_1(z) = 1/G_1(z)). \quad (8)$$

Par exemple, dans le cas d'échantillons idéaux $s[k] = f(k)$, l'approximation consistante revient à effectuer l'*interpolation* des données : on cherche la fonction de $V_1(\varphi)$ qui passe par les échantillons. On a alors $g_1[k] = \varphi(k)$.

L'approximation consistante réalise une projection *oblique* de f dans $V_T(\varphi)$. Dans le cas général $T \geq 1$, le schéma d'approximation défini par les eqns. (3) et (6) est une projection oblique dès lors que

$$[g_T * h_T] \downarrow T[k] = \{1 \text{ si } k = 0, 0 \text{ sinon}\}. \quad (9)$$

Le fait d'être une projection est équivalent au fait d'avoir reconstruction parfaite (*i.e.* $f_T = f$) dans le cas où $f \in V_T(\varphi)$. Cela ne garantit pas que $f_T(x)$ soit proche de $f(x)$ dans le cas général. On va maintenant s'intéresser à quantifier cette erreur d'approximation entre f_T et f .

2.2 Evaluation de l'erreur d'approximation

Un résultat remarquable de théorie de l'approximation [7] est que l'erreur $\|f_T - f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f_T(x) - f(x)|^2 dx$ peut être prédite très précisément par la quantité

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 E_T(\omega) d\omega \quad (10)$$

où $E_T(\omega)$ est le *noyau d'erreur* qui caractérise la méthode d'approximation (l'étoile indique la conjugaison complexe) :

$$E_T(\omega) = \underbrace{1 - \frac{|\hat{\varphi}(T\omega)|^2}{\hat{a}_\varphi(T\omega)}}_{E_{\min}(\omega) \geq 0} + \underbrace{\hat{a}_\varphi(T\omega) \left| \hat{h}_T^*(\omega) \hat{\varphi}(\omega) - \hat{\varphi}_d(T\omega) \right|^2}_{E_{\text{res}}(\omega) \geq 0}. \quad (11)$$

Lorsque $f_T(x)$ est la projection orthogonale de $f(x)$ dans $V_T(\varphi)$, l'erreur d'approximation est minimale, et alors $E(\omega)$ est réduit à $E_{\min}(\omega)$.

Avant toute chose, il faut donc choisir φ afin que $E_{\min}(\omega)$ soit minimal. En pratique, la plupart des signaux, et en particulier les images, ont leur énergie localisée dans les basses fréquences. $E_{\min}(\omega)$ doit donc s'annuler autant que possible au voisinage de $\omega = 0$. Ainsi on impose la contrainte

$$E_{\min}(\omega) = O(\omega^{2L}) \quad (12)$$

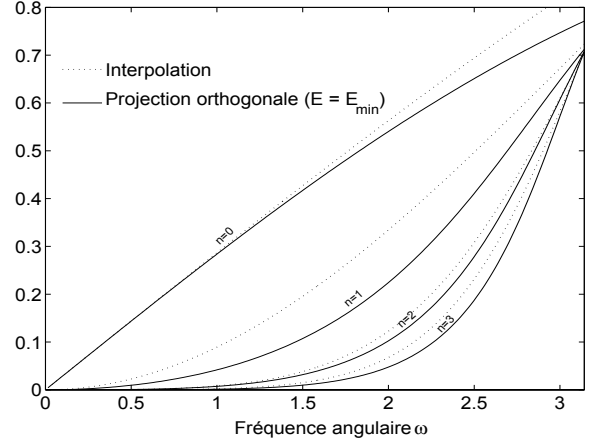


FIG. 1 – $\sqrt{E(\omega)}$ lorsque $\varphi = \beta^n$ est une B-spline, et $T = 1$.

où l'entier L , l'*ordre d'approximation* de φ , est choisi aussi grand que possible. Cette contrainte est équivalente aux conditions de Strang-Fix [8] :

$$\hat{\varphi}(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\varphi}^{(k)}(2n\pi) = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} k = 0 \dots L - 1 \\ n \neq 0 \end{cases} \quad (13)$$

En parallèle, on choisit φ à support compact, puisque le temps de calcul de la reconstruction, principalement requis pour les évaluations de φ dans l'eqn. (3), est proportionnel à la taille W de son support. Or il a été montré que nécessairement $W \geq L$, avec égalité si et seulement si φ est un noyau MOMS [9]. L sera donc choisi suffisamment petit pour conserver un coût algorithmique faible, typiquement $L \leq 4$.

Dans ce contexte, l'utilisation de modèles *splines* [10], revenant à choisir comme noyau MOMS $\varphi = \beta^n(x)$, la B-spline centrée de degré n , apparaît judicieuse. Les avantages théoriques des splines ont été validés expérimentalement en imagerie [11][12]. $\beta^n(x)$, d'ordre d'approximation $L = n + 1$, est définie comme suit, et vérifie $a_{\beta^n}[k] = \beta^{2n+1}(k)$:

$$\hat{\beta}^n(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^{n+1}. \quad (14)$$

La fig. 1 montre $\sqrt{E_{\min}(\omega)}$ et $\sqrt{E(\omega)}$ associés respectivement à l'approximation spline par projection orthogonale et par interpolation ($T = 1$, $\tilde{\varphi} = \delta$, $h_1 = g_1^{-1}$). On voit que l'ordre L est déterminant pour la qualité d'approximation et que la différence entre l'interpolation (projection oblique) et la projection orthogonale est significative. Dans la suite, on va chercher des préfiltres h_T minimisant cette différence.

2.3 Quasi-projections

Lorsque $E(\omega) = O(\omega^{2L})$, ou de manière équivalente

$$\hat{h}_T^*(\omega) \hat{\varphi}(\omega) = \hat{\varphi}_d(T\omega) + O(\omega^L), \quad (15)$$

le schéma d'approximation réalise une *quasi-projection* d'ordre L [13][7], c.-à-d. que l'on n'a reconstruction parfaite de $f \in V_T(\varphi)$ que si f est un polynôme de degré au plus $L - 1$. On parle de *quasi-interpolation* dans le cas $\tilde{\varphi} = \delta$ [5]. La condition de quasi-projection est plus faible que d'imposer au schéma d'être une projection oblique (eqn. (9)), et ce gain de liberté dans le choix de h_T va être mis à profit pour diminuer l'erreur d'approximation.

3 Conception de filtres minimisant l'erreur d'approximation

Afin que la fonction reconstruite $f_T(x)$ approche au mieux la projection orthogonale de f dans $V_T(\varphi)$, qui est la meilleure, bien qu'inaccessible, reconstruction possible, on va chercher à annuler au maximum le noyau $E_{\text{res}}(\omega)$ dans la bande fréquentielle $\omega \in [-\pi, \pi]$, et plus particulièrement autour de $\omega = 0$. On impose donc

$$E(\omega) \sim E_{\text{min}}(\omega), \quad (16)$$

qui n'est généralement pas vérifié pour l'approximation par projection oblique. On cherche donc un filtre réalisable h_T tel que

$$h_T(\omega) = \frac{\hat{\varphi}_d(T\omega)^*}{\hat{\varphi}(\omega)^*} + O(\omega^N). \quad (17)$$

avec $N \geq L + 1$. Plus N est grand, meilleure est la qualité de reconstruction. L'éqn. (13) implique que $\hat{a}_\varphi(\omega) = |\hat{\varphi}(\omega)|^2 + O(\omega^{2L})$. Donc si $N \leq 2L$, l'éqn. (17) se réécrit :

$$\hat{h}_T(\omega) = \frac{1}{\hat{\varphi}(T\omega)\hat{\varphi}(\omega)^*} + O(\omega^N). \quad (18)$$

3.1 Exemples de quasi-interpolation

Intéressons-nous à l'approximation par quasi-interpolation spline, c.-à-d. $T = 1$, $\tilde{\varphi} = \delta$ et $\varphi = \beta^n$. L'éqn. (17) n'est pas suffisante pour déterminer le filtre h_1 , il nous faut d'abord choisir sa forme. Il est possible de chercher un filtre de taille finie (RIF), comme dans [7]. Nous avons montré dans [5] que l'on obtient de meilleurs résultats avec un filtre inverse, c.-à-d. que l'on pose $H_1(z) = 1/Q_1(z)$ avec q_1 un filtre RIF tel que $\hat{q}_1(\omega) \neq 0$. D'autre part, comme φ est symétrique, on cherche un préfiltre symétrique afin que l'ensemble du processus soit à phase linéaire. Le tab. 1-1 présente les filtres de taille minimale ($N = L + 1$) vérifiant l'éqn. (18), qui se réécrit dans le cas présent $p_1(\omega) = \varphi(\omega) + O(\omega^{L+1})$. Ces filtres coïncident avec les filtres d'interpolation (eqn. (8)) dans le cas où n est pair. Soulignons que le filtrage inverse $s * p^{-1}$ s'effectue à l'aide d'un algorithme rapide [10] avec un temps de calcul équivalent à celui de $s * p$.

TAB. 1 – Préfiltres proposés pour l'approximation spline.

$\varphi(x)$	$Q_1(z)$ tel que $H_1(z) = 1/Q_1(z)$
$\beta^0(x)$	1
$\beta^1(x)$	$\frac{1}{12}z^{-1} + \frac{5}{6} + \frac{1}{12}z$
$\beta^2(x)$	$\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}z$
$\beta^3(x)$	$-\frac{1}{720}z^{-2} + \frac{31}{180}z^{-1} + \frac{79}{120} + \frac{31}{180}z - \frac{1}{720}z^2$
$\varphi(x)$	$Q_2(z)$ tel que $H_2(z) = P_2(z)/Q_2(z^2)$
$\beta^0(x)$	1
$\beta^1(x)$	$\frac{17}{48}z^{-1} + \frac{7}{24} + \frac{17}{48}z$
$\beta^2(x)$	$\frac{3}{16}z^{-1} + \frac{5}{8} + \frac{3}{16}z$
$\beta^3(x)$	$\frac{59}{11520}z^{-2} + \frac{601}{2880}z^{-1} + \frac{1099}{1920} + \frac{601}{2880}z + \frac{59}{11520}z^2$

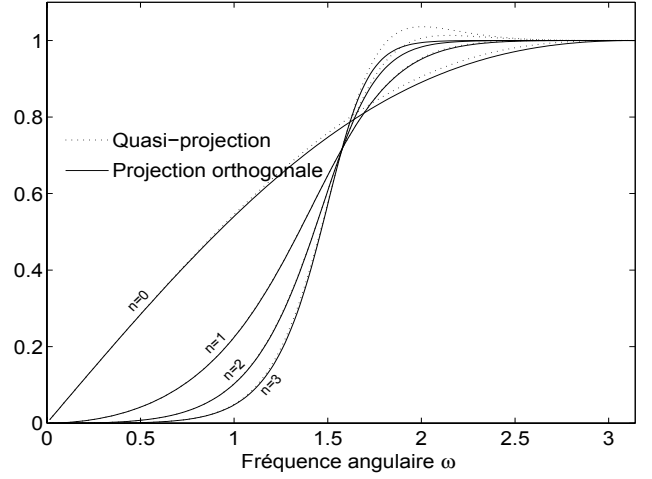


FIG. 2 – $\sqrt{E(\omega)}$ lorsque $\varphi = \beta^n$, $\tilde{\varphi} = \delta$, et $T = 2$.

3.2 Exemple d'approximation avec T=2

Illustrons maintenant l'approximation spline dans le cas $T > 1$. On généralise la forme inverse $H_1(z) = 1/Q_1(z)$ en choisissant des filtres rationnels symétriques de la forme $H_T(z) = P_T(z)/Q_T(z^T)$ avec $P_T(z) = z^{-T-1}(z + \dots + z^T)^2/T^2$. L'implémentation efficace du préfiltrage se fait alors par $c_T = [s * p_T] \downarrow T * q_T^{-1}$. Le facteur de régularité $P_T(z)$ est nécessaire pour éviter l'aliasing dans la bande $\omega \in [\pi/T, \pi]$.

Le tab. 1-2 donne les filtres de taille minimale vérifiant l'éqn. (18) dans le cas $T = 2$ et $\tilde{\varphi} = \delta$. Les noyaux d'erreurs $E(\omega)$ associés, représentés dans la fig. 2, sont très proches des noyaux $E_{\text{min}}(\omega)$, signe d'une reconstruction de qualité.

4 Applications

La modélisation d'un signal discret s à l'aide d'une collection de représentations continues $\{f_T(x)\}$ paramétrée par la résolution $1/T$ offre de multiples avantages par rapport à la seule modélisation par $f_1(x)$. Une telle collection de fonctions forme une *pyramide multirésolution*, dont les propriétés ont été largement étudiées, en particulier dans une perspective de codage. Chaque fonction $f_T(x)$ est décrite entièrement par la séquence $(c_T[k])$ correspondante, ce qui permet d'effectuer la plupart des traitements, par exemple le calcul de dérivées, par des opérations discrètes portant sur les $c_T[k]$.

Afin d'illustrer la pertinence de notre approche pour des opé-

TAB. 2 – PSNR après 17 rotations d'angle $2\pi/17$ sur différentes images, par interpolation et quasi-interpolation spline linéaire (Sp1) et spline cubique (Sp3).

	Sp1 int.	Sp1 quasi.	Sp3 int.	Sp3 quasi.
Lena	29.40	36.81	38.69	39.81
Barbara	23.84	27.32	28.99	30.55
Baboon	21.98	26.23	27.63	28.64
Boat	26.33	32.52	34.07	35.00
Camera	23.29	28.64	30.18	31.23
Peppers	28.89	35.41	36.83	37.64
time	1 U	1.1 U	2.6 U	2.7 U

rations comme la rotation ou la translation d'images, qui se situent dans le contexte $T = 1$ et $\tilde{\varphi} = \delta$, nous avons effectué une succession de 17 rotations d'angles $2\pi/17$ sur des images connues. Lors de chacune, la fonction $f_1(x, y)$ est reconstruite de manière séparable par interpolation spline (filtres donnés par l'éqn. (8)) et quasi-interpolation spline (filtres du tab. 1-1), puis rééchantillonnée. Le tab. 2 montre que la quasi-interpolation donne des résultats nettement meilleurs que l'interpolation correspondante, pour un temps de calcul (en unité arbitraire U) similaire. La quasi-interpolation bilinéaire ($\varphi = \beta^1$) apparaît comme une méthode de choix pour la rotation rapide et efficace d'images. La fig. 3 le confirme : le flou introduit lors d'un enchaînement de rotations est bien moindre qu'avec l'interpolation bilinéaire.

5 Conclusion

Nous avons présenté la reconstruction à partir d'un signal discret comme un problème d'estimation d'une fonction inconnue à partir de mesures sur celle-ci. La reconstruction est mise en œuvre efficacement à l'aide de filtres dont la conception est aisée. Cette étude, basée sur la notion de quasi-projection, peut être bénéfique pour tous les problèmes nécessitant un rééchantillonnage, ou une représentation multirésolution d'un signal. Les expériences de rotations mises en avant montrent la pertinence de l'approche théorique visant à minimiser le noyau d'erreur $E(\omega)$. Nous poursuivons notre travail afin de l'étendre aux facteurs T quelconques et aux données bruitées.

Références

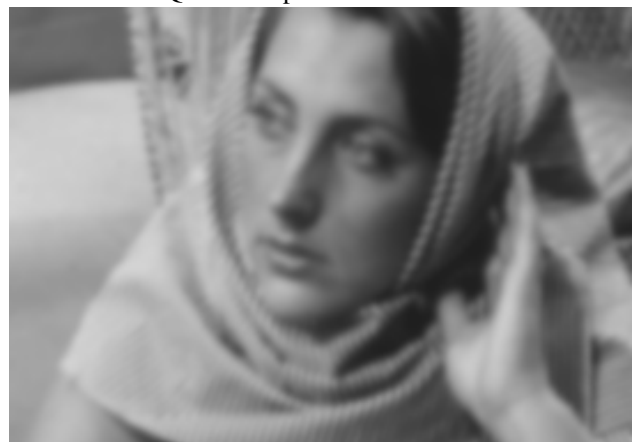
- [1] C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise", *Proc. of the Inst. of Radio Eng.*, vol. 37, n° 1, p. 10–21, 1949.
- [2] M. Unser et J. Zérubia, "Generalized sampling : stability and performance analysis", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 45, n° 12, p. 2941–2950, Déc. 1997.
- [3] M. Unser et A. Aldroubi, "A general sampling theory for non-ideal acquisition devices", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 42, n° 11, p. 1915–2925, Nov. 1994.
- [4] I. Djokovic et P. P. Vaidyanathan, "Generalized sampling theorems in multiresolution subspaces", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 45, p. 583–599, 1997.
- [5] L. Condat, T. Blu, et M. Unser, "Beyond interpolation : optimal reconstruction by quasi-interpolation", accepté à l'ICIP, Gênes, Italie, Sept. 2005.
- [6] M. Unser et J. Zerubia, "A generalized sampling theory without band-limiting constraints", *IEEE Trans. Circuits and Systems II : Analog and Digital Sig. Proc.*, vol. 45, n° 8, p. 959–969, 1998.
- [7] T. Blu et M. Unser, "Quantitative Fourier analysis of approximation techniques : Part I-interpolators and projectors – and part II-wavelets", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 47, n° 10, p. 2783–2806, 1999.
- [8] G. Strang et G. Fix, "A Fourier analysis of the finite element variational method", *Constructive Aspect of Functional Analysis*, Rome, Italie : Cremonese, 1971, p. 796–830.
- [9] T. Blu, P. Thévenaz, et M. Unser, "Moms : Maximal-order interpolation of minimal support", *IEEE Trans. Image Proc.*, vol. 10, n° 7, p. 1069–1080, Juil. 2001.
- [10] M. Unser, "Splines : A perfect fit for signal and image processing", *IEEE Signal Proc. Mag.*, vol. 16, n° 6, Nov. 1999.
- [11] T. M. Lehmann, C. Gönner, et K. Spitzer, "Survey : Interpolation methods in medical image processing", *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol. 18, n° 11, p. 1049–1075, Nov. 1999.
- [12] E. Meijering, W. Niessen, et M. Viergever, "Quantitative evaluation of convolution-based methods for medical image interpolation", *Medical Image Anal.*, vol. 5, n° 2, p. 111–126, 2001.
- [13] M. Unser, "Quasi-orthogonality and quasi-projections", *Applied and Computational Harmonic Anal.*, vol. 3, p. 201–214, 1996.



Extrait de l'image initiale *Barbara*



Quasi-interpolation bilinéaire



Interpolation bilinéaire

FIG. 3 – Extrait de l'image obtenue après 13 rotations d'angle $2\pi/13$ par interpolation et quasi-interpolation bilinéaire.