

Solution analytique et généralisation d'un contraste à référence

Atman JBARI¹, Abdellah ADIB^{1,2}, Driss ABOUTAJDINE¹

¹GSCM-Faculté des Sciences de Rabat, Rabat, Maroc

²Institut Scientifique, av. Ibn Battouta, B.P. 703, Rabat, Maroc
ajbari2@yahoo.fr, adib@israbat.ac.ma, aboutaj@fsr.ac.ma

Résumé – Cet article traite du problème de la séparation aveugle de sources par la considération d'un système à référence. À partir d'un contraste à référence, on construit une famille de contrastes puis on développe une solution analytique. Les résultats de simulation présentent une comparaison de notre proposition avec le contraste de base et en tenant compte de plusieurs valeurs du paramètre de généralisation.

Abstract – This paper deals with the problem of blind source separation by consideration of a reference system. From a referenced contrast, we construct a family of contrasts then we propose an analytical solution to optimize it. The simulation results present a comparison study between our proposal and the basic contrast in considering several values of the generalization parameter.

1 Introduction

La séparation de sources vise à maximiser l'indépendance statistique des signaux à partir d'un mélange. Les méthodes classiques reposent sur l'utilisation directe des statistiques des signaux. Dans notre article on propose de résoudre le problème à l'aide d'un système à référence [1] [2]. La figure 1 montre la problématique étudiée.

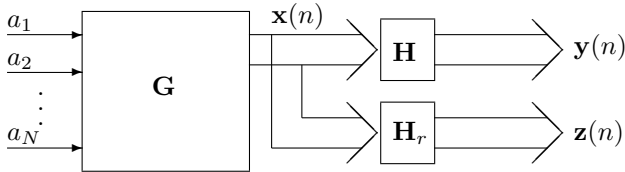


FIG. 1: Système mélange/séparation.

Avec : \mathbf{a} : le vecteur source; \mathbf{x} : vecteur observaion; \mathbf{y} : vecteur estimation; \mathbf{z} : vecteur référence; G : matrice de mélange; H : matrice de séparation et H_r : matrice du système à référence ($H_r G$ est unitaire).

La séparation consiste donc à estimer la matrice H tel que : $HG = DP$ avec : D matrice diagonale et P matrice de permutation. Dans [2], un contraste à référence, sous contrainte de blanchiment préalable des observations, est proposé:

$$\mathcal{I}_{R,z}(y) = \sum_{i,j=1}^N \left| \text{cum}\{y_i, y_i^*, \underbrace{z_j, z_j^* \dots, z_j^*}_{R \times}\} \right|^2 \quad (1)$$

Ce contraste peut être exprimé sous la forme d'un critère de diagonalisation conjointe [3]. Notre but est de généraliser ce contraste et de lui proposer une solution analytique.

2 Contraste généralisé

On propose une nouvelle famille de contraste comme combinaison linéaire de celui défini en (1) et des cumulants croisés des observations. On pose:

$$\mathcal{C}_{R,z}^1(\mathbf{y}) = \sum_{i1>i2,j=1}^N \left| \text{cum}\{y_{i1}, y_{i2}^*, \underbrace{z_j, z_j^* \dots, z_j^*}_{R \times}\} \right|^2 \quad (2)$$

$$\mathcal{C}_{R,z}^2(\mathbf{y}) = \sum_{i1<i2,j=1}^N \left| \text{cum}\{y_{i1}, y_{i2}^*, \underbrace{z_j, z_j^* \dots, z_j^*}_{R \times}\} \right|^2 \quad (3)$$

Proposition : 1 La fonction

$$\mathcal{J}_{R,z}(\mathbf{y}) = \mathcal{I}_{R,z}(\mathbf{y}) + \alpha_1 \mathcal{C}_{R,z}^1(\mathbf{y}) + \alpha_2 \mathcal{C}_{R,z}^2(\mathbf{y}) \quad (4)$$

avec : $\alpha_1 \leq 0$ et $\alpha_2 \leq 0$ est un contraste pour les signaux normalisés.

Preuve:

Soit :

$$\begin{aligned} & \sum_{i1,i2,j=1}^N \left| \text{cum}\{y_{i1}, y_{i2}^*, \underbrace{z_j, z_j^* \dots, z_j^*}_{R \times}\} \right|^2 = \\ & \sum_{i,j=1}^N \left| \text{cum}\{y_i, y_i^*, \underbrace{z_j, z_j^* \dots, z_j^*}_{R \times}\} \right|^2 + \mathcal{C}_{R,z}^1(\mathbf{y}) \quad (5) \\ & + \mathcal{C}_{R,z}^2(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

En pondérant les cumulants croisés par des coefficients $\alpha_1 \leq 0$ et $\alpha_2 \leq 0$ on obtient la fonction $\mathcal{J}_{R,z}(\mathbf{y})$ qui vérifie :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{R,z}(\mathbf{y}) & \leq \mathcal{I}_{R,z}(\mathbf{y}), \quad \mathcal{C}_{R,z}^1(\mathbf{a}) = 0, \\ \mathcal{C}_{R,z}^2(\mathbf{a}) & = 0, \quad \mathcal{J}_{R,z}(\mathbf{a}) = \mathcal{I}_{R,z}(\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (6)$$

On en déduit alors que la fonction $\mathcal{J}_{R,z}(\mathbf{y})$ est un contraste [4].

3 Solution analytique

En vue d'une maximisation du contraste (1) on cherche une solution analytique. Pour simplifier, on considère des signaux réels. La matrice H est paramétrée ainsi :

$$H = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \quad (7)$$

Avec : $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$ On note :

$$Y_{s,t,u} = \text{cum}\{y_s, y_t, z_u, z_u\}, \quad (8)$$

$$X_{s,t,u} = \text{cum}\{x_s, x_t, z_u, z_u\} \quad (9)$$

Dans le cas de deux sources, le contraste (1) peut être développé ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{2,z}(y) &= Y_{1,1,1}^2 + Y_{1,1,2}^2 + Y_{2,2,1}^2 + Y_{2,2,2}^2 \\ &= (c^4 + s^4) F_1 + 2 c^2 s^2 F_2 \\ &\quad + 4 c^2 s^2 (c^2 - s^2) F_3 \end{aligned} \quad (10)$$

Avec :

$$F_1 = X_{1,1,1}^2 + X_{2,2,1}^2 + X_{1,1,2}^2 + X_{2,2,2}^2 \quad (11)$$

$$F_2 = X_{1,2,1}^2 + X_{1,2,2}^2 + \frac{1}{2}(X_{1,1,1}X_{2,2,1} + X_{1,1,2}X_{2,2,2}) \quad (12)$$

$$F_3 = X_{1,2,1}(X_{1,1,1} - X_{2,2,1}) + X_{1,2,2}(X_{1,1,2} - X_{2,2,2}) \quad (13)$$

Par un calcul trigonométrique, on obtient la forme suivante:

$$\mathcal{I}_{2,z}(y) = \Gamma + \Lambda \cos 4\theta + \Omega \sin 4\theta \quad (14)$$

Avec:

$$\Gamma = \frac{3F_1 + 4F_2}{4}, \quad \Lambda = \frac{F_1 - 4F_2}{4}, \quad \text{et } \Omega = F_3 \quad (15)$$

La valeur de θ est donc l'argument du nombre complexe $t = \Lambda + j\Omega$ avec ($j^2 = -1$).

Dans le cas réel, le contraste généralisé peut s'écrire :

$$\mathcal{J}_{2,z}(y) = \mathcal{I}_{2,z}(y) + (\alpha_1 + \alpha_2)(Y_{1,2,1}^2 + Y_{1,2,2}^2) \quad (16)$$

En posant : $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ et en suivant la même démarche de calcul, on obtient :

$$\mathcal{J}_{2,z}(y) = \frac{(c^4 + s^4)F_1' + 2c^2s^2F_2' + 4c^2s^2(c^2 - s^2)F_3' + 2sc(c^2 - s^2)F_4'}{F_3' + 2sc(c^2 - s^2)F_4'} \quad (17)$$

Avec :

$$F_1' = F_1 + \alpha(X_{1,2,1}^2 + X_{1,2,2}^2) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} F_2' &= F_2 + \frac{\alpha}{2}(X_{1,1,1}^2 + X_{1,1,2}^2 + X_{2,2,1}^2 + X_{2,2,2}^2 \\ &\quad - 2(X_{1,1,1}X_{2,2,1} + X_{1,2,1}^2 + X_{2,1,2}^2 \\ &\quad + X_{2,2,2}X_{1,1,2}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$F_3' = F_3 \quad (20)$$

$$F_4' = -\alpha F_3 \quad (21)$$

Puis après : $\mathcal{J}_{2,z}(y) = \Gamma' + \Lambda' \cos 4\theta + \Omega' \sin 4\theta$, avec

$$\Gamma' = \frac{3F_1' + 4F_2'}{4},$$

$$\Lambda' = \frac{F_1' - 4F_2'}{4}$$

et

$$\Omega' = \frac{2F_3' + F_4'}{2}.$$

La valeur de θ est donc l'argument du nombre complexe $t' = \Lambda' + j\Omega'$ avec ($j^2 = -1$).

Dans le cas d'un nombre quelconque de sources, la matrice H est un produit de $\frac{N(N-1)}{2}$ rotations de Givens.

4 Résultats de simulation

Pour évaluer la qualité de séparation on utilise l'indice suivant défini dans [5] appliqué sur la matrice globale $S = HG$:

$$\begin{aligned} PI &= \frac{1}{2(N-1)} \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\sum_{j=1}^N |S_{ij}|^2}{\max_k |S_{ik}|^2} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\sum_{i=1}^N |S_{ij}|^2}{\max_k |S_{kj}|^2} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Cet indice mesure la somme des contributions des éléments de S par rapport au maximum en lignes et en colonnes. Dans le cas d'une séparation parfaite, PI est voisin de 0.

Le vecteur de référence \mathbf{z} est construit à partir des données blanchies des observations. La validation de la solution analytique du contraste de base et de la nouvelle famille de contrastes est effectuée par les simulations suivantes :

1. Influence de la gaussianité (fig 2) : On utilise des sources paramétrées [6] par τ pour avoir un kurtosis négatif, nul ou positif. Chaque signal peut prendre les trois valeurs suivantes $[-1, 0, \tau]$ avec les probabilités respectives suivantes : $\frac{1}{\tau+1}, \frac{\tau-1}{\tau}, \frac{1}{\tau(\tau+1)}$. Pour chaque valeur de τ , On calcule la moyenne de l'indice PI en dB sur 100 réalisations Monte-Carlo de la matrice de mélange. La séparation est assurée dans le cas sur-gaussien et sous-gaussien.
2. Signaux de communications : signal à module constant et signal QAM-4 (fig 3) : On restitue les signaux sources avec $PI = 0.0023$.
3. Signaux sonores (fig 4) : Les signaux représentent des sons échantillonnés avec une fréquence de 22.05Khz. La séparation est effectuée par le contraste généralisé avec $\alpha = -1$, et on trouve un $PI = 0.0054$.
4. Influence du rapport S/B (fig 5) : La puissance des sources reste constante. On fait varier la puissance du bruit et on évalue la moyenne de PI sur 100 réalisations Monte-Carlo.

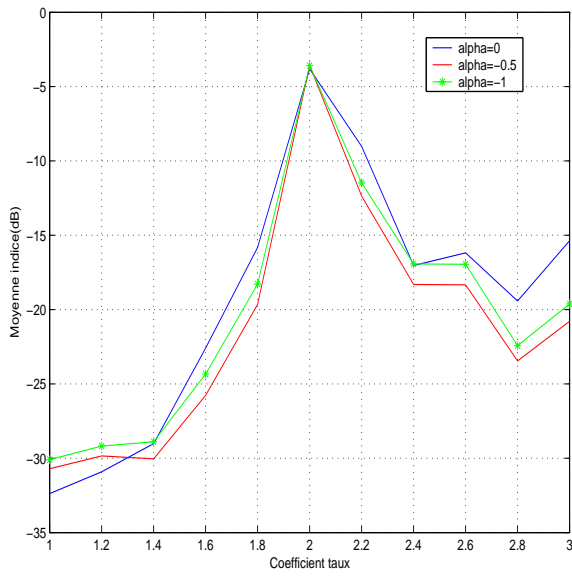


FIG. 2: Influence de la gaussianité.

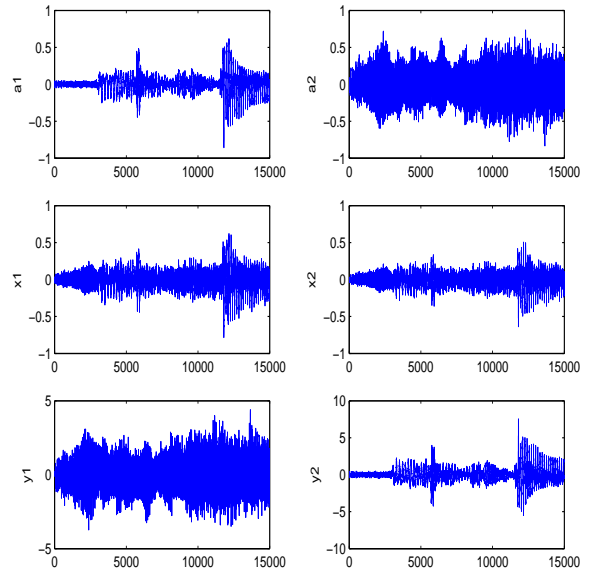


FIG. 4: Cas de mélange sonore.

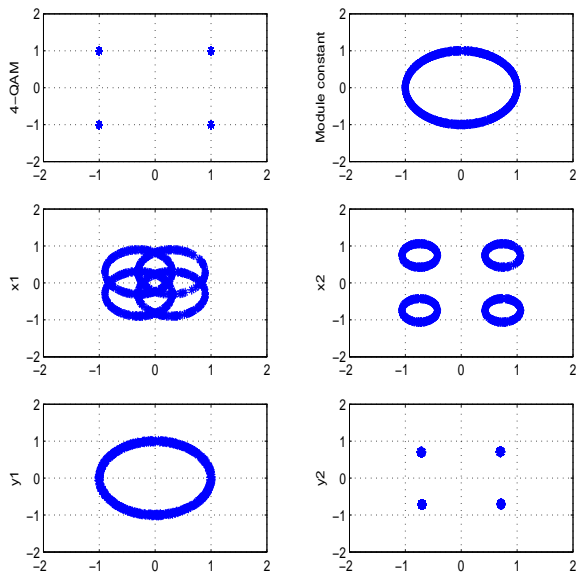


FIG. 3: Cas d'un signal à module constant et signal QAM-4.

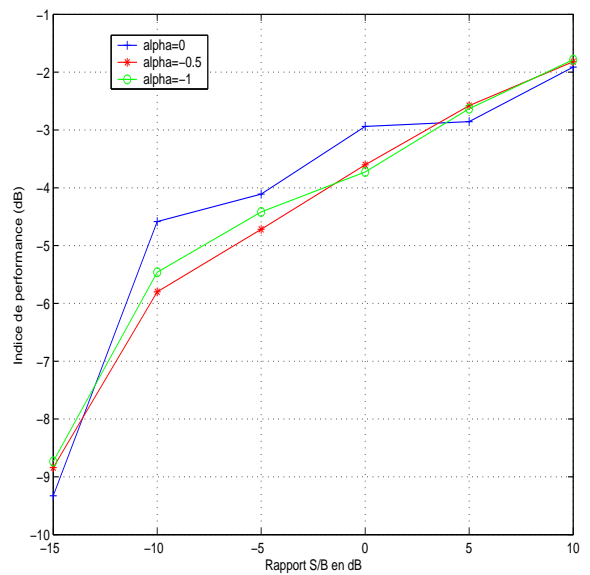


FIG. 5: Influence de la puissance du bruit.

5 Conclusion

Nous avons développé la solution analytique d'un contraste à référence. Ce dernier a été généralisé pour donner une nouvelle famille à deux paramètres dans le cas complexe, ce qui constitue deux degrés de liberté pour améliorer la qualité de séparation. Enfin nous avons testé notre solution par des simulations sur des signaux de natures différentes. L'influence de la puissance du bruit sur les performances a été également étudiée.

References

- [1] M. Feng and K. D. Kammeyer. "*Blind source separation for communication signals using antenna arrays*". in Proc. ICUPC'98, pp. 665–669, Florence, Oct 1998.
- [2] A. Adib, E. Moreau and D. Aboutajdine. "*Blind sources separation by simultaneous generalized referenced contrasts diagonalization*". Proc. of the Fourth Int. Conf. on Independent Component Analysis (ICA'03), pp. 657–661, Nara, Japan, April, 2003.
- [3] A. Adib, "*Séparation aveugle de sources. Fonctions de contrastes et systèmes à référence*", Université Mohammed V-Agdal. Maroc Thèse d'état. 24 Juillet 2004.
- [4] E. Moreau, J.-C. Pesquet, and N. Thirion-Moreau, "*An equivalence between non symmetrical contrasts and cumulant matching for blind signal separation*", ICA'99, Ausois, France, pp. 301-306, January 1999.
- [5] S. Choi and A. Cichocki "*Blind Separation of non stationary sources in noisy mixture*", Electronics Letters, vol. 36, no. 9, pp. 848–849, April 2000.
- [6] E. Moreau "*A generalization of joint diagonalization criteria for source separation*", IEEE Trans. Signal Processing, March 1999.