

Statistiques direction-multipôle pour la séparation de composantes dans le fonds de rayonnement cosmologique

Jean-François CARDOSO^{1,3} Pierrick ABRIAL² Yassir MOUDDEN² Jean-Luc STARCK² Jacques DELABROUILLE³

¹LTCI ENST/CNRS

²CEA DAPNIA

³Équipe ADAMIS APC / PCC

cardoso@enst.fr, {pierrick.abrial,yassir.moudden,jstarck}@cea.fr, delabrou@cdf.in2p3.fr

Résumé – Cet article décrit des statistiques de corrélation localisées en fréquence et position sur la sphère et leur application pour la séparation de composantes dans les observations multi-spectrales du fonds de rayonnement cosmologique

Abstract – We introduce correlation statistics which are localized both in frequency and position on the sphere and their use for component separation in multi-spectral observations of the cosmological microwave background.

1 Le rayonnement cosmologique

Le fonds de rayonnement cosmologique ou CMB (Cosmic microwave background) est un des piliers de la théorie cosmologique moderne. Le modèle cosmologique standard (dit de Big Bang) prédit que l’Univers observable est baigné d’un rayonnement de corps noir à une température proche de 3 degrés Kelvin. Son observation par Penzias et Wilson en 1965 fût que la première étape d’une démarche à la fois théorique et observationnelle qui a placé les observations du CMB au coeur de la cosmologie.

Le CMB apparaît extrêmement homogène : sa température apparente ne varie que de quelques centaines de micro-Kelvin sur la voûte céleste. Les instruments modernes sont capables, avec une résolution et une sensibilité croissantes de mesurer les “anisotropies du CMB”, c’est-à-dire ses variations de température $\delta T(\theta, \phi)$ autour de la valeur moyenne (meilleure mesure de cette moyenne : $2.725 \pm 0.001 K$ [4]) en fonction de la direction de visée (θ, ϕ) . Par ailleurs, la théorie standard prédit que cette carte de fluctuations peut être modélisée comme une réalisation d’un champ gaussien aléatoire, stationnaire sur la sphère. Dans ce modèle, toute l’information scientifique portée par le CMB est donc encodée par la densité spectrale (il s’agit du spectre des fréquences *spatiales*) de puissance de ce champ. Les cosmologues sont capables de proposer des modèles fins de ce spectre, paramétrés par la constante de Hubble, la densité totale d’énergie cosmique, la fraction de matière noire, etc. . . Ainsi *l’estimation spectrale du CMB* offre une voie d’accès unique à la mesure des paramètres fondamentaux de notre Univers.

On dispose aujourd’hui de plusieurs observations du CMB, desquels il faut “extraire la science”. Un objectif majeur est la détermination non-paramétrique, puis paramétrique du spectre (spatial) harmonique du CMB. Mais la tâche est ardue pour de nombreuses raisons ; nous n’en

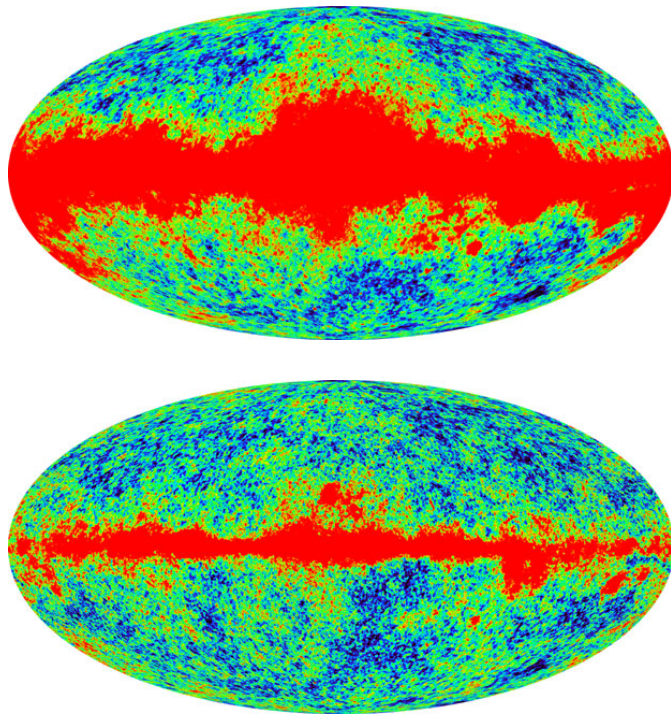


FIG. 1 – Anisotropies du CMB vues à 33 GHz et 40 GHz par la mission W-MAP.

évoquerons que quelques unes, pour lesquelles ce travail apporte une contribution. 1) Les observations sont entachées d’un bruit inhomogène, le rapport signal-sur-bruit se dégradant avec la fréquence ; les propriétés statistiques du bruit sont imparfaitement connues 2) le CMB n’est pas le seul rayonnement observé : des émissions dites d’avant-plan (foregrounds) viennent s’y superposer ; celles provenant de notre Galaxie sont fortement inhomogènes : la figure 1 montre deux des cartes des “anisotropies” du rayonnement micro-ondes obtenues par le satellite W-MAP de la NASA dans des bandes centrées autour de 33 GHz et

40 GHz. 3) ces avant-plans sont plus ou moins bien caractérisés. Les plus contaminants doivent être masqués : la figure 2 montrent les masques utilisés par l'équipe WMAP à différents niveaux de paranoïa pour censurer le rayonnement de la Voie Lactée et d'autres sources extragalactiques plus localisées. 4) un bon rendement scienti-

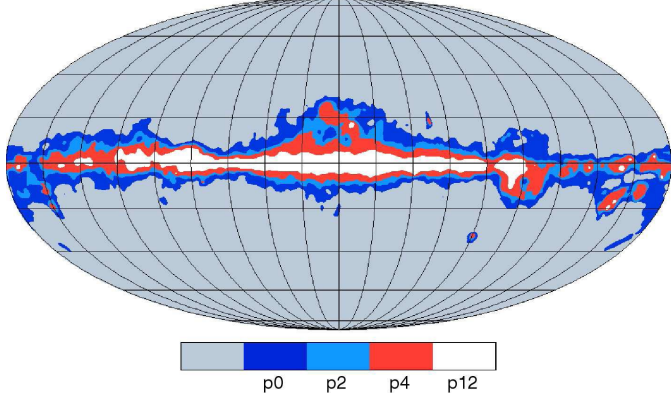


FIG. 2 – Les masques employés pour censurer les émissions les plus contaminantes.

fique exige d'exploiter conjointement les observations de chaque bande.

Plan La section 2 donne quelques éléments d'analyse spectrale sur la sphère et décrit brièvement notre méthode pour l'estimation directe des spectres de composantes dont on observe des mélanges multi-spectraux. La section 3 décrit les statistiques utilisées pour localiser l'information de corrélation à la fois en fréquence et en position. Ces statistiques donnent une grande souplesse d'utilisation à notre méthode d'estimation spectrale et répondent, au moins partiellement, aux difficultés évoquées plus haut.

2 Estimation spectrale sur la sphère

Nous donnons ici quelques éléments d'estimation spectrale sur la sphère. Une direction ξ du ciel ou un point de la sphère sont repérés en co-latitude et longitude par (θ, ϕ) . On notera $\xi = (\theta, \phi)$.

Sphère univariée Une fonction sur la sphère $x(\xi) = x(\theta, \phi)$ se décompose sur une base doublement indexée d'harmoniques sphériques :

$$x(\xi) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{m=+\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\xi) \quad (1)$$

formant un système orthonormé : $\int_{S^2} Y_{\ell m}(\xi) Y_{\ell' m'}(\xi) d\Omega(\xi) = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}$ pour $d\Omega(\xi) = \sin \theta d\theta d\phi$ la mesure de Lebesgue sur la sphère. La variable ℓ correspond à la fréquence (mais on emploie souvent le terme de 'multipôle') car toute combinaison linéaire des $(2\ell + 1)$ harmoniques sphériques d'un ℓ donné est une fonction propre du Laplacien sphérique, associée à la valeur propre $-\ell(\ell + 1)$.

Si $x(\theta, \phi)$ est un champ stationnaire, les coefficients harmoniques $a_{\ell m}$ présentent une structure de corrélation très

simple :

$$E\{a_{\ell m} a_{\ell' m'}^*\} = C_{\ell} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \quad (2)$$

ce qui permet, dans l'hypothèse gaussienne, d'écrire la vraisemblance du modèle dans l'espace des coefficients harmoniques de façon très simple. En effet, l'expression (2) montre que, si un modèle prédit une forme $C_{\ell}(\eta)$ du spectre harmonique en fonction d'un vecteur η de paramètres, la vraisemblance de η devant des données $x(\theta, \phi)$ est proportionnelle à $\exp -L(\eta)$ avec

$$L(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{\ell \geq 0} (2\ell + 1) \left(\frac{\hat{C}_{\ell}}{C_{\ell}(\eta)} + \log C_{\ell}(\eta) \right) \quad (3)$$

où \hat{C}_{ℓ} est l'estimateur empirique du spectre harmonique :

$$\hat{C}_{\ell} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{|m| \leq \ell} a_{\ell m}^2 \quad (4)$$

La formule (3) a la même structure que l'approximation classique de Whittle pour la vraisemblance d'un processus stationnaire. Toutefois, dans le cas sphérique, ce n'est pas une approximation mais la vraisemblance gaussienne exacte. Puisque la fonction $b \rightarrow a/b + \log b$ est minimum pour $b = a$, l'expression (3) interprète la vraisemblance comme une mesure de l'écart entre le spectre harmonique empirique \hat{C}_{ℓ} et un modèle paramétrique $C_{\ell}(\eta)$ d'icelui.

La figure 3 montre le spectre harmonique empirique \hat{C}_{ℓ} (points gris), moyenné sur des bandes de fréquence (points noirs, avec barres d'erreurs) et le meilleur modèle théorique ajusté sur ces données, tels qu'ils ont été déterminés par l'équipe de traitement de données de la mission WMAP [1].

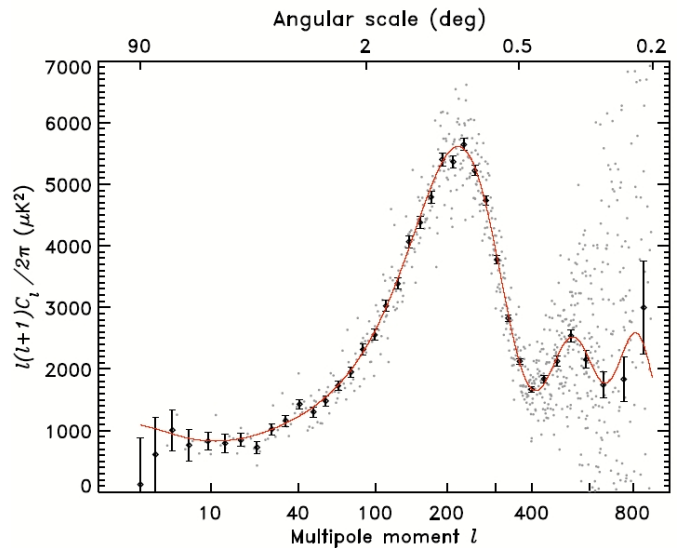


FIG. 3 – Spectre empiriques et meilleur fit du modèle cosmologique obtenu par WMAP (*c.f.* texte).

Sphère multi-variée Si le CMB est observé dans M bandes de fréquence centrées autour de ν_1, \dots, ν_M , on disposera pour l'inférence d'un ensemble de M champs $x_1(\theta, \phi), \dots, x_M(\theta, \phi)$ que l'on collecte dans un $M \times 1$ vecteur $X(\theta, \phi)$. On note alors $a_{\ell m}$ le $M \times 1$ vecteur qui collecte leurs coefficients harmoniques. Les considérations

précédentes s'adaptent à ce cas multi-varié en définissant la matrice spectrale empirique au multipôle ℓ :

$$\hat{R}_\ell = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{m=+\ell} a_{\ell m} a_{\ell m}^\dagger$$

de taille $M \times M$ pour chaque ℓ . Un modèle cosmologique statistique prédit la valeur moyenne $R_\ell(\eta) = E(\hat{R}_\ell)$ de ces matrices qui contiennent les auto- et inter-spectres des composantes du champ. A nouveau, pour un modèle gaussien stationnaire, la probabilité d'un ciel multi-spectral est proportionnelle à $\exp -L(\eta)$,

$$L(\eta) = \sum_{\ell \geq 0} (2\ell+1) K[\hat{R}_\ell, R_\ell(\eta)], \quad (5)$$

où $K[\cdot, \cdot]$ est une mesure de l'écart entre deux matrices positives de taille $M \times M$ défini par :

$$K[R_1, R_2] = \frac{1}{2} [\text{trace}(R_1 R_2^{-1}) - \log \det(R_1 R_2^{-1}) - M]$$

Ainsi, maximiser la vraisemblance d'un modèle paramétré par η revient à minimiser le désajustement spectral moyen entre matrices empiriques \hat{R}_ℓ et matrices théoriques $R_\ell(\eta)$ tel qu'il est mesuré par $L(\eta)$.

Estimation spectrale de composantes Cette section indique notre approche pour estimer le spectre harmonique du CMB quand d'autres émissions s'y superposent et que les données sont bruitées. Un modèle très simple des observations est alors

$$x_i(\theta, \phi) = \sum_{j=1}^N a_{ij} s_j(\theta, \phi) + n_i(\theta, \phi)$$

où $N_i(\theta, \phi)$ représente la contribution du bruit dans la i -ème bande de fréquence. Les coefficients a_{ij} expriment la variation d'émissivité d'une composante j en fonction de la fréquence d'observation ν_i . Il s'agit donc ici du modèle classique de séparation de sources dans le cas d'un mélange 'instantané' bruité que l'on écrira vectoriellement $X(\theta, \phi) = AS(\theta, \phi) + N(\theta, \phi)$ avec une matrice de mélange A de taille $M \times N$. Les matrices spectrales prennent la forme

$$R_\ell(\eta) = A \text{diag}(C_\ell^i) A^\dagger + \text{diag}(\tilde{C}_\ell^j) \quad (6)$$

où C_ℓ^i est le spectre harmonique de la i -ème composante et \tilde{C}_ℓ^j est le spectre harmonique du bruit dans le j -ème canal. La diagonalité est une conséquence de l'hypothèse d'indépendance entre composantes et entre bruits.

Notre estimateur du spectre harmonique des différentes composantes s'obtient en minimisant la fonctionnelle (5) par rapport à tout ou partie des paramètres du modèle (6). Cet estimateur est celui du maximum de vraisemblance pour un modèle gaussien stationnaire plein-ciel (*i.e.* les observations sont disponibles sur toute la voûte céleste). Après estimation des paramètres ($\hat{\eta} = \arg \min L(\eta)$), on estime éventuellement les composantes par application du filtre de Wiener construit avec ces paramètres.

Compression Dans la pratique, il est intéressant de compresser les statistiques en moyennant les matrices spectrales empiriques sur des bandes de fréquence $B_j = \{\ell_{\min}^{(j)} \leq \ell \leq \ell_{\max}^{(j)}\}$. On définit pour chaque bande j

$$\hat{R}^{(j)} = \frac{1}{n_j} \sum_{\ell \in B_j} (2\ell+1) \hat{R}_\ell, \quad R^{(j)}(\eta) = \frac{1}{n_j} \sum_{\ell \in B_j} (2\ell+1) R_\ell(\eta), \quad (7)$$

où $n_j = \sum_{\ell \in B_j} (2\ell+1)$ est le nombre de modes de Fourier dans la bande j . Si $R_\ell(\eta)$ est constant sur chaque bande, alors le mismatch (5) s'écrit aussi

$$L(\eta) = \sum_j n_j K[\hat{R}^{(j)}, R^{(j)}(\eta)] \quad (8)$$

montrant que le moyennage par bandes se fait sans perte d'information. Si $R_\ell(\eta)$ varie peu, la perte d'information de Fisher reste faible. Même dans le cas contraire, la méthode reste 'consistante' car le moyennage par bandes ne détruit pas la structure (6). La forme (8) est celle adoptée dans nos premières études [3].

3 Statistiques spectrales localisées

Des statistiques spectrales localisées permettent de faire face à deux des difficultés mentionnées plus haut qui sont toutes deux liées à la perte de stationnarité.

Tout d'abord, l'émission galactique est extrêmement forte par rapport à celle du CMB : dans la pratique, l'approche la plus prudente est de censurer le voisinage de la zone équatoriale où elle est concentrée. Il en est de même de l'émission de certaines sources quasi-ponctuelles connues, situées en dehors du plan galactique. On a donc à faire en pratique à une sphère incomplète. Les masques utilisés pour censurer les zones contaminées (fig. 2) empêchent cependant d'exploiter simplement la stationnarité du champ telle qu'elle s'exprime dans la transformée en harmoniques sphériques et par l'équation (2).

En second lieu, l'émission galactique reste significative même en dehors d'un masque équatorial. On doit alors prendre en compte le fait que son émissivité varie (lentement) en fonction de la latitude. Une autre source de non stationnarité est celle du bruit : les cartes du ciel sont construites à partir d'un balayage du ciel selon une stratégie savante mais qui ne peut garantir l'uniformité de la couverture du ciel. Les zones les mieux couvertes sont affectées d'un bruit plus faible.

Ces difficultés peuvent être contournées en définissant un outil d'analyse direction-multipôle, équivalent sphérique du temps-fréquence ou temps-échelle utilisé pour les séries chronologiques. Nous avons déjà considéré une telle approche en utilisant des ondelettes cartésiennes dans une approximation de la sphère par des plans tangents [6] et par des ondelettes sphériques dyadiques [5]. Nous présentons ici une approche très simple permettant un découpage arbitraire du domaine des fréquences. Ce dernier point est très important pour adapter les statistiques aux spectres sous-jacents.

Nous définissons une famille $\{w_j(\ell)\}_{j \geq 0}$ de fenêtres spectrales, avec $w_j(\ell) \geq 0$ pour $\ell \in [\ell_{\min}^{(j)}, \ell_{\max}^{(j)}]$ et nulle ailleurs. Ces intervalles couvrent l'espace des fréquences sans être nécessairement disjoints. On requiert

$$\sum_j w_j(\ell) = 1 \quad (9)$$

et l'on définit, pour un champ sphérique $X(\xi)$ se décomposant selon (1), un champ lissé $X^{(j)}$ à l'échelle j par

$$X^{(j)}(\xi) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{|m| \leq \ell} w_j(\ell) a_{\ell m} Y_{\ell m}(\xi) \quad (10)$$

La propriété de reconstruction $X(\xi) = \sum_j X^{(j)}(\xi)$ est garantie par la condition (9). La localisation spectrale des sphères lissées est obtenue en localisant les fenêtres $w_j(\ell)$ dans l'espace harmonique. La sphère lissée $X^{(j)}$ est aussi la convolution de $X(\xi)$ avec une fonction zonale (axi-symétrique) dont la décomposition harmonique est $\sum_{\ell \geq 0} w_j(\ell) Y_{\ell 0}(\xi)$. Le support (ou l'ouverture angulaire) de cette fonction est contrôlée par la largeur et la douceur des fenêtres spectrales.

Nos statistiques de corrélation direction-multipôle s'obtiennent en définissant —en sus des fenêtres spectrales $w_j(\ell)$ — des fenêtres spatiales $v_k(\xi)$ centrées autour de directions ξ_k . On forme alors des matrices de corrélation par

$$\hat{R}_{j,k} = \frac{1}{m_k} \int_{\xi \in S^2} v_k(\xi) X^{(j)}(\xi) X^{(j)}(\xi)^\dagger d\Omega(\xi) \quad (11)$$

où $m_k = \int v_k(\xi) d\Omega(\xi)$. Le modèle est moyenné de la même façon : $R_{j,k}(\eta) = \frac{1}{m_k} \int v_k(\xi) R^{(j)}(\eta) d\Omega(\xi)$. Cette dernière opération donne $R_{j,k}(\eta) = R^{(j)}(\eta)$ (soit une opération vide) pour des modèles stationnaires, comme nous l'avons supposé jusqu'ici. Mais une des possibilités offertes par les matrices spectrales direction-multi-pôles est précisément de permettre d'intégrer une part de non-stationnarité : on peut, par exemple, imaginer un modèle dans lequel une colonne de A change avec la latitude pour représenter la variation d'émissivité d'une composante particulière en fonction de son écart au plan galactique.

Les paramètres du modèle (c'est-à-dire, l'ensemble des quantités η qui déterminent les matrices de covariance spectrales localisées à la fois en direction et en fréquence seront estimés par la minimisation du désajustement spectral moyen défini par

$$L(\eta) = \sum_k \sum_j m_k n_j K[\hat{R}_{j,k}, R_{j,k}(\eta)]. \quad (12)$$

Bien entendu, les différentes matrices spectrales empiriques localisées ne sont, en général pas statistiquement indépendantes à la différence du cas stationnaire plein ciel. Par conséquent, l'expression (12) ne peut être celle de la log-vraisemblance. Elle fournit cependant une approximation plausible. La "consistance" de l'estimateur associé repose à nouveau sur le fait que les opérations de localisation en fréquence comme en direction ne détruisent pas la structure algébrique (6).

4 Conclusion

Nous avons introduit des matrices de corrélation direction-multi-pôle fournissant un critère de vraisemblance approchée pour la séparation de composantes dans des observations sphériques multi-variées. Ces statistiques permettent de travailler avec une grande souplesse dans un contexte non-stationnaire.

Nous n'avons pas abordé la question de l'implantation de notre estimateur. Elle se décompose en deux parties : le calcul des matrices spectrales localisées (11) et la minimisation du critère (12). Cette dernière n'est pas spécifique ; on pourra consulter [2]. Concernant le calcul des statistiques, seule la partie sphérique est non triviale et rend nécessaire l'emploi d'un logiciel de pixelisation de la sphère et de calcul de la transformée en harmoniques sphériques, tel que HEALPix¹ ou GLESP².

Références

- [1] C. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. Meyer, L. Page, D. Spergel, G. Tucker, E. Wollack, E. Wright, C. Barnes, M. Greason, R. Hill, E. Komatsu, M. Nolta, N. Odegard, H. Peiris, L. Verde, and J. Weiland. First-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations : Preliminary maps and basic results. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 148 :1–27, 2003.
- [2] J.-F. Cardoso and D.-T. Pham. Optimization issues in noisy gaussian ica. In *Proc. ICA 2004, Granada, Spain*, 2004.
- [3] J. Delabrouille, J.-F. Cardoso, and G. Patanchon. Multi-detector multi-component spectral matching and applications for CMB data analysis. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 346(4) :1089–1102, Dec. 2003. also available as <http://arXiv.org/abs/astro-ph/0211504>.
- [4] D. J. Fixsen and J. C. Mather. The spectral results of the far-infrared absolute spectrophotometer instrument on coBE. *Astrophys. J.*, 581 :817–822, Dec. 2002.
- [5] Y. Moudden, P. Abrial, P. Vielva, J.-B. Melin, J.-L. Starck, J.-F. Cardoso, J. Delabrouille, and M. K. Nguyen. Independent component separation from incomplete spherical data using wavelets. Application to CMB data analysis. In *Physics in Signal and Image Processing*, Toulouse, France, jan 2005.
- [6] Y. Moudden, J.-F. Cardoso, J.-L. Starck, and J. Delabrouille. Blind component separation in wavelet space. Application to CMB analysis. *Eurasip Journal on Applied Signal Processing*, 2005. To appear.

¹<http://www.eso.org/science/healpix>

²<http://www.glesp.nbi.dk/>