

# Calcul Rapide du Kurtogramme et Applications

Jérôme ANTONI

Université de Technologie de Compiègne

Centre de Recherche de Royallieu, BP 20529, 60205 Compiègne Cedex, France

jerome.antonio@utc.fr

## Résumé –

Le kurtogramme est un outil récent d'analyse spectrale à l'ordre quatre qui permet de détecter dans un signal la présence de structures non-stationnaires, de les localiser en fréquence et, d'une certaine manière, de les caractériser. Le paradigme se base sur l'observation qu'à chaque type de transitoire correspond une dyade {fréquence / résolution fréquentielle} qui maximise son kurtosis, et donc sa détection. L'exploration de toutes les dyades  $\{f, \Delta f\}$  est un travail considérable sur un signal donné, peu réaliste en pratique. Dans cette communication nous proposons un algorithme rapide qui échantillonne le plan  $(f, \Delta f)$  suffisamment finement pour trouver la dyade qui maximise le kurtosis, avec une complexité maximale de l'ordre de  $N \log N$ . Son efficacité est illustré sur deux exemples industriels.

## Abstract –

The kurtogram is a fourth-order spectral analysis tool recently introduced for detecting and characterising non-stationarities in a signal. The paradigm relies on the assertion that each type of transient is associated with an optimal (frequency/frequency resolution) dyad  $\{f, \Delta f\}$  which maximises its kurtosis, and hence its detection. However, the complete exploration of the whole plane  $(f, \Delta f)$  is a formidable task hardly amenable to on-line industrial applications. In this communication we describe a fast algorithm for computing the kurtogram over a grid that finely samples the  $(f, \Delta f)$  plane. Its complexity is on the order of  $N \log N$ , similarly to the FFT. Its efficiency is illustrated on two industrial cases.

## 1 Du KS au kurtogramme

### 1.1 Le KS des signaux non-stationnaires

Le kurtosis spectral (KS) est un descripteur fréquentiel initialement introduit par Dwyer pour pallier l'incapacité de la densité spectrale de puissance (DSP) à détecter et à caractériser des non-stationnarités dans un signal [1]. L'idée consiste à calculer le kurtosis du signal analysé à "chaque fréquence" afin de discerner les structures non-stationnaires et d'indiquer dans quelle(s) bande(s) de fréquences celles-ci se réalisent. Cette manière de faire s'avère relativement robuste par rapport au bruit additif stationnaire, contrairement au kurtosis global. Dans [2] nous avons donné une définition formelle du KS des signaux non-stationnaires partir de la décomposition de Wold-Cramér. Rappelons que cette décomposition stipule que, sous des conditions relativement faibles, tout processus non-stationnaire centré  $X(n)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  se décompose sous la forme :

$$X(n) = \int_{-1/2}^{+1/2} H(n, f) e^{j2\pi f n} dZ_x(f) \quad (1)$$

où  $dZ_x(f)$  est un incrément spectral orthogonal et où  $H(n, f)$  s'interprète comme l'enveloppe complexe de  $X(n)$  à la fréquence  $f$ . Le KS de  $X(n)$  se formule alors<sup>1</sup> :

$$K_X(f) = \frac{|H(n, f)|^4}{\langle |H(n, f)|^2 \rangle^2} - 2 \quad (2)$$

où  $\langle f(n) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_N f(n)$  symbolise la moyenne temporelle d'une fonction  $f(n)$ . Cette définition jouit de nombreuses propriétés dont nous rappelons brièvement les plus importantes :

- i) le KS des processus stationnaires réguliers est une fonction constante de la fréquence,
- ii) le KS des processus stationnaires gaussiens est une fonction identiquement nulle,
- iii) en présence de bruit stationnaire additif  $N(n)$ , le KS d'un processus non-stationnaire  $X(n)$  s'exprime

$$K_{(X+N)}(f) = K_X(f) / [1 + \rho(f)] \quad (3)$$

où  $\rho(f)$  est le rapport bruit-à-signal en fonction de la fréquence.

Les propriétés (i)-(iii) suffisent à comprendre la capacité du KS à détecter, caractériser et localiser en fréquence des non-stationnarités.

### 1.2 Le kurtogramme : une dimension supplémentaire

L'estimation du KS tel que défini par l'équation (2) se conçoit sans trop de difficulté par extension des estimateurs de la DSP à l'ordre 4. Les estimateurs potentiels se ramènent alors, d'une manière ou d'une autre, à calculer les kurtosis d'enveloppes complexes en sortie d'un banc de filtres. Nous avons montré que ces estimateurs ne sont stables – dans le sens où ils fournissent des estimations relativement invariantes par rapport au choix des paramètres d'analyse – que pour des processus localement stationnaires [2], [3]. A contrario dans le cas de processus fortement non-stationnaires (typiquement des impulsions), le KS affiche des valeurs qui dépendent sensiblement du choix de la résolution fréquentielle, c'est à dire de la largeur des bandes du banc de filtres. Par exemple, le cas extrême où la largeur des bandes devient infiniment étroite implique un KS nul en raison du théorème de la Limite Centrale. Cet état de fait n'est pas forcément un inconvénient, mais veut simplement dire que pour un processus non-stationnaire quelconque, le KS dépend à la fois de la fréquence *et* de la résolution fréquentielle. A titre

<sup>1</sup>la constante  $-2$  au lieu de  $-3$  vient du fait que  $H(n, f)$  est supposé complexe circulaire.

d'exemple le KS d'un signal composé d'impulsions brèves en temps sera mieux estimé à partir d'un banc de filtres à bandes larges et donc associé à une résolution fréquentielle grossière. A l'inverse un signal non-stationnaire crée par des modulations lentes de certaines de ses composantes harmoniques devra être analysé avec une résolution fréquentielle très fine. En bref, à chaque type de non-stationnarité correspond une dyade {fréquence  $f$  / résolution fréquentielle  $\Delta f$ } qui maximise son kurtosis et donc sa détection. Nous avons appelé *kurtogramme* la représentation du KS dans le plan  $(f, \Delta f)$  et avons illustré dans [4] les avantages de ce type de représentation dans les problématiques de détection. Il est clair cependant que l'exploration exhaustive du plan  $(f, \Delta f)$  est très coûteuse en temps de calcul et difficilement envisageable en pratique. Nous proposons dans cet article un algorithme de calcul rapide du kurtogramme basé sur un échantillonnage dyadique du plan  $(f, \Delta f)$  et dont la complexité maximale est de l'ordre de  $N \log N$ .

## 2 Principes d'estimation du kurtogramme

Comme précisé précédemment, les estimateurs du kurtogramme se ramènent d'une manière ou d'une autre au calcul du kurtosis des coefficients en sortie d'un banc de filtres. Nous imposons aux gabarits des filtres de vérifier un certain nombre de contraintes décrites ci-dessous :

1. *Invariance en translation* : les valeurs du kurtogramme doivent rester invariantes par rapport à toute translation  $t_0$  de l'axe des temps, i.e.  $Kurt\{X(n - t_0)\} = Kurt\{X(n)\}$
2. *Insensibilité aux harmoniques purs* : le kurtogramme d'une composante fréquentielle d'amplitude *constante* à la fréquence  $f_0$  doit être nul (il s'agit de ne pas détecter les composantes harmoniques qui, en toute rigueur, sont *stationnaires*),
3. *Localisation fréquentielle* : afin de conserver l'interprétation du kurtogramme comme le kurtosis du signal pour une dyade {fréquence / résolution fréquentielle}  $(f, \Delta f)$ , il est nécessaire d'avoir des filtres proches de filtres passe-bande idéaux  $[f - \Delta f; f + \Delta f]$ ,
4. *Concentration fréquentielle* : si le kurtogramme est utilisé pour sélectionner une bande de fréquence optimale où démoduler le signal, les filtres doivent en plus respecter le théorème de Bedrosian, c'est à dire avoir des gabarits de largeur de bande telle que  $\Delta f \leq f$ ,
5. *Rapidité de calcul* : enfin les filtres doivent se prêter à une implémentation numérique rapide qui évite le traitement de toute information redondante.

Le respect des contraintes (1-5) conduit à une construction logique de l'estimateur du kurtogramme. Remarquons tout d'abord que la contrainte (4) est forcément satisfaite par le respect de la contrainte (3). Remarquons ensuite que la contrainte (2) implique l'utilisation de filtres complexes analytiques (de gain nul sur les fréquences négatives). La contrainte (1) quant à elle implique de calculer des kurtosis sur des séquences correctement échantillonnées, c'est à dire vérifiant la condition de Shannon. En conjonction avec la contrainte (5) ceci suggère de sous-échantillonner les signaux au plus serré en sortie du banc de filtre avant de calculer les kurtosis.

Nous affirmons qu'une solution efficace pour concilier les contraintes (1-5) est alors de bâtir un banc de filtres quasi-analytiques avec sous-échantillonnage critique. Par le terme «

quasi-analytique » nous entendons le fait d'approcher l'analyticité théorique à partir de filtres RIF, et par le terme « sous-échantillonnage critique » le fait de décimer d'un facteur  $M$  un banc de filtres à  $M$  bandes. Les détails de l'implémentation de l'algorithme sont décrits dans le paragraphe suivant.

## 3 Calcul rapide du kurtogramme

### 3.1 Principe de l'algorithme

Le principe de l'algorithme rapide de calcul du kurtogramme que nous proposons est basé sur une structure en bancs de filtres arborescente relativement classique [5], si ce n'est qu'elle s'appuie sur les propriétés particulières des filtres quasi-analytiques. Nous décrivons d'abord l'algorithme dans le cas d'un découpage en puissances de 2 de l'axe fréquentiel, avant d'en donner une généralisation en tiers de puissance de 2.

Soit  $h(n)$  un filtre prototype passe-bas, de fréquence de coupure<sup>2</sup>  $f_c = 1/8 + \epsilon$ ,  $\epsilon \geq 0$  à partir duquel nous construisons deux filtres d'analyse quasi-analytiques  $h_0(n)$  et  $h_1(n)$ , respectivement « passe-bas » et « passe-haut » dans les bandes de fréquence  $[0; 1/4]$  et  $[1/4; 1/2]$  :

$$\begin{aligned} h_0(n) &= h(n)e^{j\pi n/4} \\ h_1(n) &= h(n)e^{j3\pi n/4} \end{aligned} \quad (4)$$

Les filtres  $h_0(n)$  et  $h_1(n)$  vont servir de base à l'élaboration du banc de filtres arborescent en réalisant les opérations élémentaires de la figure 1 itérées en cascade de manière à obtenir l'arbre de décomposition de la figure 2, dont chaque niveau  $k$  représente un banc de filtres "uniforme"<sup>3</sup> à  $2^k$  bandes. Comme indiqué à la figure 1, notons  $c_k^i(n)$  la séquence des coefficients issu du  $i^{\text{ème}}$  filtre,  $i = 0, \dots, 2^k - 1$ , au  $k^{\text{ème}}$  niveau de l'arbre de décomposition. Par filtrage avec  $h_0(n)$  et  $h_1(n)$  suivi d'un sous-échantillonnage par 2, cette séquence donne alors naissance à deux nouvelles séquences  $c_{k+1}^{2i}(n)$  et  $c_{k+1}^{2i+1}(n)$  de longueurs deux fois plus courtes au niveau  $k + 1$ . Le processus est itéré du niveau  $k = 0$  où  $c_0(n) \equiv X(n)$  jusqu'à un niveau  $K - 1$  spécifié, le nombre de bandes – et donc de séquences filtrées – augmentant d'un facteur 2 à chaque nouveau niveau. Notons que la multiplication par  $(-j)^n$  dans les branches supérieures (après filtrage par  $h_1$  et avant sous-échantillonnage) permet de ramener les séquences filtrées passe-haut en bande de base et donc de respecter l'ordonnement fréquentiel du banc de filtre au niveaux suivants. Par conséquent il s'ensuit que les coefficients  $c_k^i(n)$  sont indicés par un indice fréquentiel  $i$  et par un indice de résolution fréquentielle  $k$ , et qu'ils s'interprètent comme l'enveloppe complexe de  $X(n)$  (sous-échantillonnée d'un facteur  $2^k$ ) dans la bande de fréquence positionnée sur la fréquence centrale  $f_i = (i + 2^{-1})2^{-k-1}$  et de largeur de bande  $(\Delta f)_k = 2^{-k-1}$ . Le kurtogramme est finalement obtenu par le calcul du kurtosis<sup>4</sup> sur toutes les séquences de coefficients  $c_k^i(n)$ ,  $i = 0, \dots, 2^k - 1$ ,  $k = 0, \dots, K - 1$  :

$$K_k^i = \frac{|c_k^i(n)|^4}{(|c_k^i(n)|^2)^2} - 2 \quad (5)$$

Sa représentation dans le plan  $(f, \Delta f)$  échantillonné aux noeuds  $\{f_i; (\Delta f)_k\}$  est schématisé à la figure 3.

<sup>2</sup>la raison d'être du  $\epsilon$  sera explicitée au paragraphe 3.3

<sup>3</sup>ce point est discuté plus en détail au paragraphe 3.3

<sup>4</sup>on prendra soin à ne pas inclure dans le calcul du kurtosis les premiers coefficients affectés par les transitoires des filtres  $h_0$  et  $h_1$ .

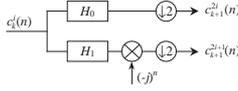


FIG. 1 – Filtrages passe-bas et passe-haut élémentaires.

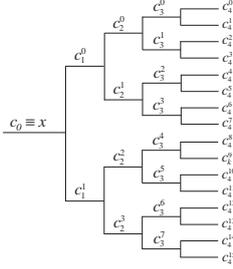


FIG. 2 – Principe de calcul rapide du kurtogramme par une structure en bancs de filtres arborescente.

### 3.2 Complexité de l'algorithme

La complexité de l'algorithme proposé est de l'ordre de  $KLN$  avec  $K$  le nombre de niveaux demandé,  $L$  la longueur du filtre prototype et  $N$  la longueur du signal analysé. Pour une décomposition du signal jusqu'au dernier niveau où il est possible de calculer un kurtosis, la complexité est de  $O(LN \log_2 N)$  à l'image de la transformation en paquet d'ondelettes et de la Transformation de Fourier Rapide. Il est clair que pour diminuer le temps de calcul, il est important de concevoir filtre prototype  $h(n)$  le plus court possible, mais tout en vérifiant les contraintes imposées dans le paragraphe 2.

### 3.3 Spécification du filtre prototype $h(n)$

Afin de préciser les spécifications de conception du filtre prototype  $h(n)$ , nous établissons dans un premier temps l'expression générale de la fonction de transfert  $G_{k,i}(f)$  du  $i^{\text{ème}}$  filtre au  $k^{\text{ème}}$  niveau qui, au signal analysé  $X(n)$ , associe son enveloppe complexe  $c_k^i(n)$  dans la bande de fréquence  $[i \cdot 2^{-k-1}; (i+1) \cdot 2^{-k-1}]$ . Pour cela, posons  $a_l$  les coefficients de la décomposition en base 2 de l'indice  $i$  au niveau  $k$ , c'est à dire  $i = \sum_{l=1}^k a_l 2^{k-l}$ . On démontre alors que :

$$G_{k,i}(f) = \prod_{q=1}^k H(2^{-q} f + \beta_q - \gamma_q) \quad (6)$$

avec  $\beta_q = \sum_{l=0}^{q-1} a_{k-l} 2^{-q+l-2}$  et  $\gamma_q = (1 + 2a_q) 2^{-3}$ . La simplicité de l'expression (6) provient essentiellement du caractère quasi-analytique des filtres  $h_0(n)$  et  $h_1(n)$ . Elle est riche en enseignements quant aux spécifications du filtre prototype  $h(n)$  :

1. *Filtres à phase linéaire* : Pour avoir un banc de filtres arborescent à phases linéaires, il suffit de choisir au départ  $h(n)$  à phase linéaire ; l'expression (6) montre que la propriété se transmet au travers des branches de l'arbre de décomposition du premier jusqu'au dernier niveau. Dans une optique de détection cette propriété est très avantageuse.
2. *Filtres à gains uniformes* : La forme de  $G_{k,i}(f)$  dépend en général de la bande  $i$  et du niveau  $k$  considéré. En effet, l'expression (6) montre que, par le jeu des dilatactions, la bande de fréquence sélectionnée par  $G_{k,i}(f)$  sur  $X(f)$  devient de plus en plus étroite en avançant dans les niveaux de l'arbre de décomposition ; il en est

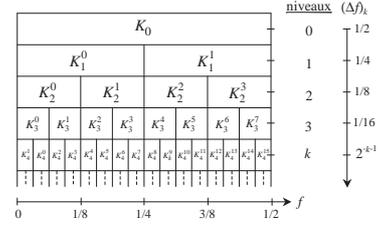


FIG. 3 – Pavage (fréquence / résolution fréquentielle)  $\{f_i; (\Delta f)_k\}$  du kurtogramme rapide

de même des bandes de transition. Par conséquent le filtre  $G_{k,i}(f)$  devient de plus en plus sélectif, comme requis par la contrainte (3) (localisation fréquentielle) du paragraphe 2. Cependant la forme de  $G_{k,i}(f)$  dépend en général de la bande  $i$  et du niveau  $k$  considéré ; par exemple si en  $f = 0$  le gabarit du filtre prototype est tel que  $|H(f)| < 1$ , il est clair que  $\prod_{q=1}^k H(2^{-q} f) \rightarrow 0$  avec  $k \rightarrow \infty$ . Le fait d'avoir des gabarits hétérogènes le long de l'axe des fréquences n'est pas forcément un problème, car (1) cette évolution se fait lentement avec  $k$  (en pratique le niveau maximum dépassera rarement quelques unités), (2) le calcul du kurtosis (5) fait de toute manière intervenir une normalisation par l'énergie dans chaque bande de fréquence. Si avoir des filtres presque uniformes est toutefois une priorité, une manière simple de s'en approcher est d'imposer  $H(f)$  aussi plat que possible sur toute la bande passante  $[-1/8; 1/8]$  en choisissant une fréquence de coupure  $f_c = 1/8 + \epsilon$  avec  $\epsilon > 0$ . Il faut noter que cette spécification n'autorise pas la conception d'un banc de filtres à complémentarité de puissance – i.e. tel que  $\sum_{i=0}^{2^k-1} |G_{k,i}(f)|^2 = 1$  au niveau  $k$  – mais que cette concession est sans conséquence sur le calcul du kurtosis.

### 3.4 Généralisation à un découpage en tiers de puissance de 2

Il est très facile de généraliser le principe de l'algorithme proposé pour aboutir à un échantillonnage encore plus fin du plan  $(f, \Delta f)$ . Par exemple dans le cas d'un découpage en tiers de puissance de 2, l'idée est de définir trois nouveaux filtres passe-bas quasi-analytiques  $g_j(n)$ ,  $j = 0, 1, 2$ , de bandes passantes respectives  $[0; 1/6]$ ,  $[1/6; 1/3]$ , and  $[1/3; 1/2]$ . Ces filtres sont ensuite utilisés pour décomposer chaque séquence  $c_k^i(n)$ ,  $k = 0, \dots, K-1$ ,  $i = 0, \dots, 2^k - 1$  en trois nouvelles sous-séquences  $c_{k,6}^{i+j}(n)$ ,  $j = 0, 1, 2$ , en basses, moyennes et hautes fréquences de l'intervalle  $[i \cdot 2^{-k-1}; (i+1) \cdot 2^{-k-1}]$ . L'indice  $k.6$  indique qu'il y a  $i = j = l = 0, \dots, 3 \times 2^k - 1 \simeq 2^{k+0.6} - 1$  sous-séquences  $c_{k,6}^l(n)$  calculées entre les niveaux  $k+1$  et  $k+2$  de l'arbre binaire. Après décimation d'un facteur 3, les kurtosis de toutes les sous-séquences sont finalement calculés à partir de (5). Cet algorithme fournit un échantillonnage encore plus du plan  $(f, \Delta f)$  tel qu'illustré à la figure 4, à comparer à la figure 2.

## 4 Exemples d'application

### 4.1 Exemple 1

Le premier exemple d'application est tiré de [6]. Il s'agit de détecter les chocs créés par des corps errants indésirables dans le circuit hydraulique d'une centrale nucléaire. Les signaux re-

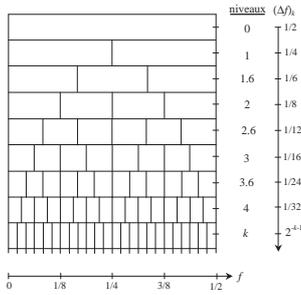


FIG. 4 – Echantillonnage du plan  $(f, \Delta f)$  en tiers de puissance de 2.

cueillis sont de type vibratoire et entachés d'un très fort bruit de fond. La figure 5.a présente un tel signal mesuré sur 1,37 secondes à 24kHz Hz. Le kurtogramme correspondant – calculé avec un filtre prototype à 8 coefficients – est représenté à la figure 6. Il révèle une forte activité non-stationnaire sur la dyade  $\{f_i; (\Delta f)_k\} = \{6750Hz; 1500Hz\}$ . Le résultat du filtrage dans la bande de fréquence correspondante – superposé avec l'enveloppe  $c_k^i(n)$  – est représenté à la figure 5.b, où la présence d'un choc anormale est maintenant clairement discernable aux alentours de 1 seconde.

## 4.2 Exemple 2

Ce deuxième exemple illustre l'utilisation du kurtogramme pour le diagnostic des paliers à roulements dans les systèmes mécaniques. Un défaut de roulement se manifeste sur les mesures vibratoires par une série d'impulsions généralement de faibles amplitudes par rapport au bruit de fond environnant [4]. Afin de les détecter, il est d'usage de démoduler le signal dans différentes bandes de fréquences jusqu'à trouver celle qui maximise le rapport signal-à-bruit. Le kurtogramme permet de substituer à cette procédure empirique une méthodologie rigoureuse pour rapidement trouver la bande de démodulation optimale. Ceci est illustré sur le signal vibratoire de la figure 7.a auquel on fait correspondre le kurtogramme de la figure 8. Ce dernier indique un kurtosis spectral maximum sur la dyade  $\{f_3; (\Delta f)_{2.6}\} = \{0,292; 0,083\}$ ; la partie réelle de l'enveloppe  $c_{2.6}^3(n)$  dans la bande de fréquence correspondante est représenté à la figure 7.b. Il faut apprécier le fait que le signal de défaut dont le rapport signal-à-bruit initial était seulement de -30dB a été parfaitement détecté et extrait du bruit de fond.

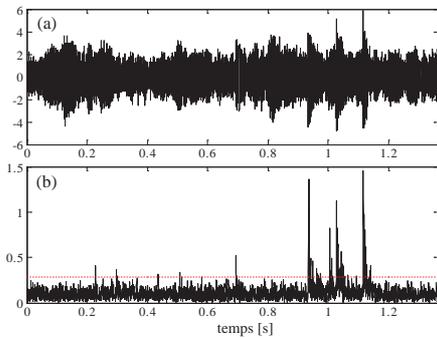


FIG. 5 – (a) Signal vibratoire, (b) partie réelle de l'enveloppe complexe  $c_4^5(n)$  extraite via le kurtogramme, avec le seuil de significativité à 0,1%.)

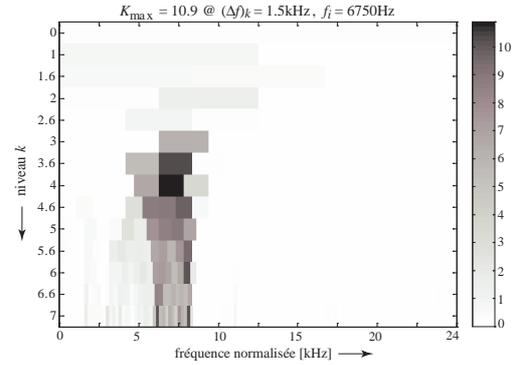


FIG. 6 – Kurtogramme du signal de la figure 5.a (7 niveaux en tiers de puissance de 2.)

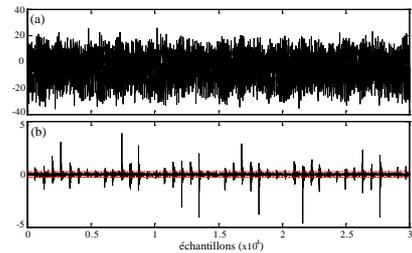


FIG. 7 – (a) Signal vibratoire, (b) enveloppe complexe  $c_{2.6}^3(n)$  (partie réelle) extraite via le kurtogramme, avec le seuil de significativité à 0,1%.

## Références

- [1] Dwyer, "Detection of non-Gaussian signals by frequency domain kurtosis estimation", in *Int. Conf. on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, pp. 607-610, Boston 1983.
- [2] J. Antoni, "The spectral kurtosis : a useful tool for characterising nonstationary signals", *Mechanical Systems and Signal Processing*, In Press.
- [3] J. Antoni, "The Spectral Kurtosis of Nonstationary Signals : Formalisation, some Properties, and Application", in *12th European Signal Processing Conference*, Sept. 6-10, 2004, Vienna, Austria.
- [4] J. Antoni, "The spectral kurtosis : application to the vibratory surveillance and diagnostics of rotating machines", in *Mechanical Systems and Signal Processing*, In Press.
- [5] J. Masson, "Bancs de filtres numériques pour l'analyse et la synthèse des signaux", in *11ème colloque GRETSI*, Juin 1987, Nice.
- [6] Ravier, "Détection de transitoires par ondelettes adaptées - Critères d'adaptation fondés sur les statistiques d'ordre supérieur", thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble préparée au Laboratoire des Images et des Signaux, Juillet 1998, 2005.

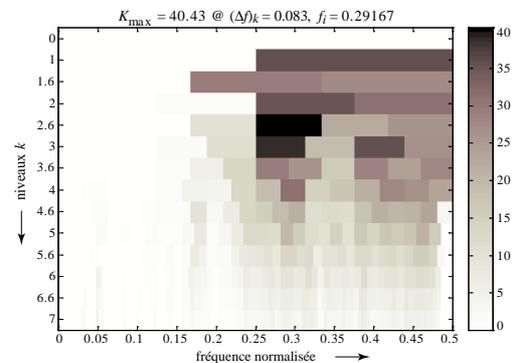


FIG. 8 – Kurtogramme du signal de la figure 7.a : 7 niveaux en tiers de puissance de 2.