

Restauration d'images dans le cas d'un bruit Gaussien Poissonien

Céline THEYS, Henri LANTÉRI

Laboratoire Universitaire d'Astrophysique de Nice
UMR6525, CNRS/Université de Nice Sophia-Antipolis
Céline.Theys@unice.fr, Henri.Lanteri@unice.fr

Résumé – Le sujet considéré est la reconstruction d'images dans le cas d'un bruit Gaussien Poissonien, modèle des données astrophysiques acquises avec un capteur CCD. Nous proposons un algorithme itératif de reconstruction basé sur la vraisemblance de l'image et régularisé avec une fonction quadratique. Cet algorithme est appliqué sur des données astrophysiques et comparé en terme de moyenne et de variance de l'erreur d'estimation à des algorithmes classiques tels que ISRA ou RL.

Abstract – In this paper, we consider the problem of restoring astronomical images in the case of Poisson data with additive Gaussian noise, model of the data acquired with Charge Coupled Device cameras. An iterative algorithm is proposed based on the maximum likelihood with a classical penalization-regularization term to impose a smoothness property on the solution. The proposed algorithm is checked on typical astronomical images and is compared in terms of mean and variance of the error estimation with classical algorithms like ISRA or RL.

1 Introduction

Le problème traité dans ce papier est la restauration d'images astrophysiques. Pour de telles images, deux processus de bruit sont généralement considérés. Le premier est un processus Gaussien additif correspondant à des données de forte intensité; dans ce cas l'estimateur par maximum de vraisemblance (MV) de l'objet, sous contrainte de positivité, conduit à l'algorithme ISRA (Image Space Reconstruction Algorithm), [5]. Le second modèle adapté à des données de faible flux correspond à une transformation de Poisson de l'image, l'estimateur du MV est alors obtenu avec l'algorithme RL (Richardson Lucy), [12]. Le modèle le plus adapté aux images acquises avec un capteur CCD (Charged Coupled Device) est le modèle composite : données de Poisson et bruit additif Gaussien. Un tel modèle a déjà été analysé par Snyder et al. [16] et par Llacer et Nuñez [11].

Ce sujet s'inscrit dans le cadre des problèmes inverses, problèmes mal posés au sens de Hadamard, dont la solution devient instable pour des données bruitées. Quelque soit le modèle considéré, les méthodes itératives de maximum de vraisemblance conduisent à des solutions instables : le processus itératif doit être interrompu avant l'apparition du bruit. Une autre solution consiste à ajouter une contrainte de douceur stabilisant la solution et conduisant à une estimation par maximum a posteriori (MAP), cette technique classiquement utilisée pour les problèmes inverses est appelée régularisation dans ce contexte, [6].

Dans les papiers précédents de Snyder, la régularisation est réalisée au moyen de fonctions *sieves*, or il a été montré dans [3] que la solution du MAP donne de meilleurs résultats. L'approche utilisée par Llacer et Nuñez est celle du MAP avec des fonctions de pénalité telles que l'en-

tropie croisée de Shannon entre la solution et un a priori constant, cependant comme cela est mentionné dans [18], ni la positivité de la solution, ni la convergence de l'algorithme proposé ne sont garanties.

Nous proposons ici de développer un algorithme itératif du type MGS (Méthode du Gradient Séparé) pour estimer l'objet au sens du MV sous contrainte de positivité et de conservation de l'énergie pour un modèle Gaussien Poissonien de l'image. Cet algorithme sera ensuite étendu à l'approche régularisée et nous proposerons d'utiliser une fonction de régularisation quadratique avec *a priori* variable. L'algorithme sera mis en œuvre sur des données astrophysiques et on mettra en évidence l'intérêt du modèle choisi par rapport aux modèles classiques en terme d'erreur de reconstruction.

2 Modèle Gaussien Poissonien de l'image

On utilisera des lettres capitales pour des tableaux $N \times N$, des caractères gras pour les vecteurs $N \times 1$, l'indice i pour le pixel i de l'image, ordonnée lexicographiquement.

On peut résumer les différentes étapes conduisant aux données à traiter de la manière brève et simplificatrice suivante : la lumière provenant de l'objet \mathbf{x} se propage à travers une atmosphère turbulente, puis elle est observée par un système optique imparfait (le télescope). Cette première transformation est mathématiquement décrite par un produit de convolution entre l'objet et la réponse impulsionnelle de l'ensemble télescope/atmosphère appelée *PSF* (Point Spread Function), on note cette transformation $H\mathbf{x}$ sous forme matricielle. Un capteur CCD réalise

une photo conversion donnant \mathbf{n} photons, transformation de Poisson de moyenne $H\mathbf{x}$. Enfin un bruit de lecture Gaussien s'ajoute (*read out noise*), indépendant du processus de Poisson.

Une réalisation de l'intensité de l'image \mathbf{y} dans le pixel i , y_i peut alors être modélisée suivant :

$$y_i = n_i + b_i, \quad (1)$$

où b_i est une réalisation d'un processus Gaussien $\mathcal{N}(g, \sigma^2)$, indépendant de n_i : réalisation d'un processus de Poisson $\mathcal{P}((H\mathbf{x})_i)$.

Le problème consiste à retrouver \mathbf{x} à partir des données \mathbf{y} . H est mesuré expérimentalement et les paramètres du bruit Gaussien sont des caractéristiques connues du capteur CCD.

2.1 Vraisemblance des données - MLE

Compte tenu de l'indépendance des processus de bruit et de l'indépendance des pixels de l'image, la fonction de vraisemblance de l'image y s'écrit :

$$L(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \prod_i \sum_{n_i} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y_i - n_i - g)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{(H\mathbf{x})_i^{n_i}}{n_i!} \exp(-(H\mathbf{x})_i). \quad (2)$$

L'estimateur du MV de \mathbf{x} est la valeur de \mathbf{x} qui maximise (2) ou de manière équivalente qui minimise $J_1(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = -\log(L(\mathbf{y}; \mathbf{x}))$:

$$J_1(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \sum_i \left((H\mathbf{x})_i - \log\left(\sum_{n_i} \frac{(H\mathbf{x})_i^{n_i}}{n_i!} \exp\left(-\frac{(y_i - n_i - g)^2}{2\sigma^2}\right)\right) \right). \quad (3)$$

x_i est donc solution de :

$$(\nabla J_1(\mathbf{y}; \mathbf{x}))_i = \sum_j (h_{ji} - h_{ji} \frac{r_j}{(H\mathbf{x})_j}) = 0 \quad (4)$$

avec

$$r_j = \frac{p_j}{q_j}, \quad (5)$$

$$p_j = \sum_{n_i} \exp\left(-\frac{(y_j - n_i - g)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{n_i}{n_i!} (H\mathbf{x})_j^{n_i} \quad (6)$$

et

$$q_j = \sum_{n_i} \exp\left(-\frac{(y_j - n_i - g)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{n_i!} (H\mathbf{x})_j^{n_i}. \quad (7)$$

p_j et r_j sont deux séries convergentes que l'on peut réduire à une en utilisant, [7] :

$$r_j = \sum_{n_i} c_{n_i} (H\mathbf{x})_j^{n_i}, \quad (8)$$

avec

$$c_{n_i} = \frac{(-1)^{n_i}}{\exp\left(-\frac{(y_j - n_i - g)^2}{2\sigma^2}\right)^{n_i}} \times \begin{vmatrix} 0 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_0 a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ -2a_3 a_0 & a_2 & a_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1-n)a_n a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix} \quad (9)$$

et

$$a_n = \exp\left(-\frac{(y_j - n_i - g)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{n_i!}. \quad (10)$$

En pratique, on limitera la sommation sur n_i à $[\max y_j + 3\sigma]$.

2.2 Ajout d'un a priori - MAP

Dans le cas régularisé, on ajoutera à $J_1(\mathbf{y}; \mathbf{x})$, une fonction $J_2(\mathbf{x})$, convexe, introduisant une contrainte de douceur et un facteur de régularisation γ permettant de régler le poids relatif de la pénalité sur l'objet par rapport à la vraisemblance des données : $J(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = J_1(\mathbf{y}; \mathbf{x}) + \gamma J_2(\mathbf{x})$, le gradient s'écrit alors $\nabla J(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \nabla J_1(\mathbf{y}; \mathbf{x}) + \gamma \nabla J_2(\mathbf{x})$, [17].

La discussion du choix de la fonction de régularisation et de l'*a priori* ne sera pas traité ici, on peut se reporter à [8, 13, 10, 4] pour une étude sur les régularisations quadratiques ou entropiques, avec *a priori* constant ou non. On propose d'utiliser une régularisation quadratique avec un *a priori* variable qui donne de bons résultats, [10]. Dans ce cas la fonction de régularisation s'écrit :

$$J_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - A\mathbf{x}\|^2, \quad (11)$$

où A est la matrice représentant le masque :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

et $A\mathbf{x}$ est la notation matricielle pour l'opération de convolution entre \mathbf{x} et ce masque. Le gradient correspondant est alors :

$$\nabla J_2(\mathbf{x}) = (I + A^T A - A^T - A)\mathbf{x}. \quad (12)$$

La solution est alors implicitement biaisée vers une version "adoucie" de la solution. On peut noter que A peut représenter toute autre forme de filtre passe bas.

3 Algorithmes

L'équation (4) étant non linéaire en x_i , on utilise une méthode itérative d'optimisation du type MGS incluant les contraintes de borne inférieure et de conservation de l'énergie [9, 10], l'équation de réactualisation de \hat{x}_i est alors :

$$\hat{x}_i^{k+1} = C^k \left(\hat{x}_i^k + \alpha_i^k \frac{\hat{x}_i^k}{V_i(\hat{\mathbf{x}}^k, \gamma)} (U_i(\hat{\mathbf{x}}^k, \gamma) - V_i(\hat{\mathbf{x}}^k, \gamma)) \right). \quad (13)$$

L'estimé initial $\hat{\mathbf{x}}^0$ est choisi de manière à satisfaire les contraintes, C^k est un facteur de normalisation pour la conservation de l'intensité, $\alpha_i^k > 0$ est le facteur de relaxation choisi de manière à garantir la convergence, k est le numéro de l'itération. Les fonctions $U() > 0$ et $V() > 0$ résultent de la décomposition de la fonction $\nabla J()$ suivante :

$$-\nabla J(\hat{\mathbf{x}}^k, \gamma) = U(\hat{\mathbf{x}}^k, \gamma) - V(\hat{\mathbf{x}}^k, \gamma). \quad (14)$$

Si l'on effectue cette décomposition pour $\nabla J_1()$ et $\nabla J_2()$, on obtient :

$$U(\hat{\mathbf{x}}^k, \gamma) = U_1(\mathbf{x}^k) + \gamma U_2(\mathbf{x}^k) \quad (15)$$

$$V(\hat{\mathbf{x}}^k, \gamma) = V_1(\mathbf{x}^k) + \gamma V_2(\mathbf{x}^k) \quad (16)$$

$U_1(), V_1(), U_2(), V_2()$ sont donnés sous forme matricielle dans le tableau 1. La valeur maximale de α_m^k qui garantit

Fonction	J_1	J_2
U	$U_1 = H^T \text{diag} \left(\frac{1}{(H\mathbf{x} + \mathbf{d})_i} \right) \mathbf{r}$	$U_2 = \gamma(A^T + A)\mathbf{x}$
V	$V_1 = \mathbf{a}, (\sum_j h_{j,i} = a_i)$	$V_2 = \gamma(I + A^T A)\mathbf{x}$

TAB. 1 – fonctions U et V

$x_i^{k+1} \geq 0, \forall i, \forall k$ est donnée par :

$$\alpha_m^k = \min_{i \in \mathcal{C}} \left(\frac{1}{1 - \frac{U_i(\mathbf{x}^k, \gamma)}{V_i(\mathbf{x}^k, \gamma)}} \right), \quad (17)$$

où \mathcal{C} est l'ensemble des indices i tels que $(\nabla J(\mathbf{x}^k, \gamma))_i > 0$ et $x_i^k > m$; clairement on voit que $\alpha_m^k > 1$, donc pour $\alpha^k = 1$, la contrainte est toujours satisfaite. La valeur optimale du pas α_c^k indépendante de i assurant la convergence doit appartenir à l'intervalle $]0, \alpha_m^k[$ (ou $]0, \alpha_m^k[$ si une inégalité stricte est demandée) par une procédure de recherche en ligne (voir par exemple [1, 2, 15, 14]), avec la direction de descente :

$$\boldsymbol{\rho}^k = \text{diag} \left(\frac{(x_i^k - m)}{V_i(\mathbf{x}^k, \gamma)} \right) (U(\mathbf{x}^k, \gamma) - V(\mathbf{x}^k, \gamma)). \quad (18)$$

Cette direction n'est plus l'inverse du gradient mais elle reste une direction de descente pour $J(\mathbf{x})$. Pour assurer la convergence théorique de (13) sans une augmentation dramatique du coût de calcul, la procédure économique de recherche du pas de descente suivant l'algorithme d'Armijo [1] a été utilisée.

4 Application à des données astrophysiques faible flux

Cet algorithme est illustré sur une image provenant du télescope spatial Hubble (HST), <http://hubblesite.org/gallery/>, fig. 1(a). La partie contenant la structure principale a été extraite et constitue l'objet, fig. 1(c). Ces données ont été convoluées avec une réponse physiquement réaliste d'un télescope terrestre incluant l'effet de la turbulence atmosphérique, fig. 1(b). Pour stopper les itérations avant l'apparition du bruit et également pour pouvoir donner un critère quantitatif sur la qualité de la restauration,

on utilise la distance euclidienne relative entre l'objet réel \mathbf{x} et l'objet reconstruit $\hat{\mathbf{x}}^k$:

$$\epsilon(k) = \frac{\|\hat{\mathbf{x}}^k - \mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2}, \quad (19)$$

On note $\epsilon_{min} = \min_k (\epsilon(k))$ et $k_{min} = \arg \min_k (\epsilon(k))$.

Une transformée de Poisson a ensuite été réalisée sur l'image et finalement un bruit Gaussien a été ajouté donnant l'image à restaurer. La fig. 2(a) représente l'image obtenue avec 3000 photons, $g = 0.1, \sigma^2 = 1$. Les images reconstruites représentées sont celles obtenues pour ϵ_{min} et pour différents algorithmes : ISRA, fig. 2(b), RL fig. 2(d) et l'algorithme proposé noté GP fig. 2(c).

On peut noter l'amélioration très nette de la reconstruction pour GP autant de manière qualitative ("à l'œil nu") que quantitative (minimum de l'erreur sensiblement plus faible). La moins bonne reconstruction, dans ce cas, est celle obtenue sous hypothèse Gaussienne avec ISRA, hypothèse la plus éloignée des données étant donné le faible nombre de photons.

La figure 3 donne la moyenne et la variance de l'erreur d'estimation sur 50 réalisations en fonction du nombre de photons pour des caractéristiques fixes du bruit Gaussien, expérience réaliste d'une acquisition d'images avec capteurs CCD, ceci pour les trois algorithmes non régularisés ISRA, RL et GP. Le tableau 2 donne la moyenne et la variance de l'erreur d'estimation pour 1000 et 3000 photons pour les trois algorithmes régularisés avec les mêmes caractéristiques du bruit Gaussien. Le facteur de régularisation a été déterminé expérimentalement comme étant celui qui donne la plus petite erreur asymptotique (à 200 itérations). Plusieurs observations peuvent en être tirées :

L'erreur diminue lorsque le nombre de photons augmente pour les 3 algorithmes, résultat classique d'estimation. L'erreur la plus faible est pour l'algorithme GP quelque soit le nombre de photons, ce qui correspond à l'adéquation données modèle. Moins il y a de photons plus la différence en terme d'erreur de reconstruction entre les algorithmes est grande. L'introduction d'un *a priori* provoque une légère augmentation de l'erreur et une diminution de l'écart entre les algorithmes. En effet, dans le cas régularisé, le poids accordé à la vraisemblance des données est diminué au profit d'une information *a priori* dont la forme est la même pour les trois algorithmes. Tout ceci met en évidence l'intérêt du modèle composite, en particulier pour les faibles flux.

photons	1000		
algo.	ISRA	RL	GP
$\mathbf{E}(\epsilon(\mathbf{k}))$	0.68	0.71	0.64
$\text{var}(\epsilon(\mathbf{k}))$	$1.00e^{-2}$	$2.34e^{-4}$	$4.73e^{-4}$
photons	3000		
algo.	ISRA	RL	GP
$\mathbf{E}(\epsilon(\mathbf{k}))$	0.54	0.58	0.53
$\text{var}(\epsilon(\mathbf{k}))$	$3.24e^{-4}$	$2.04e^{-4}$	$2.65e^{-4}$

TAB. 2 – Moyenne et variance de l'erreur d'estimation (50 réal.), $m = 0, \sigma^2 = 2$ avec régularisation.

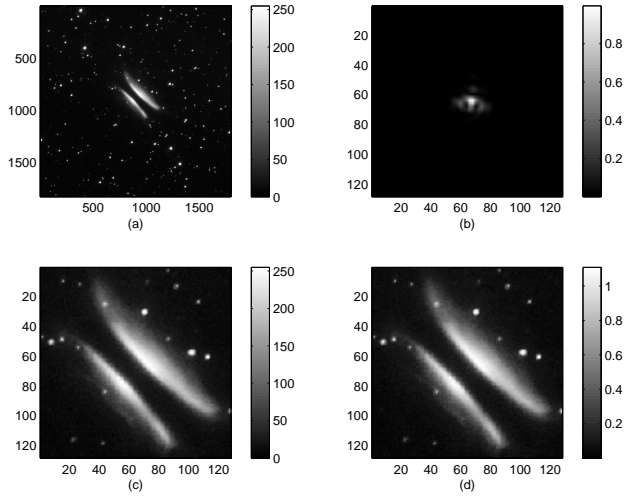


FIG. 1 – (a) Image HST (b) PSF (c) étoile (d) étoile normalisée

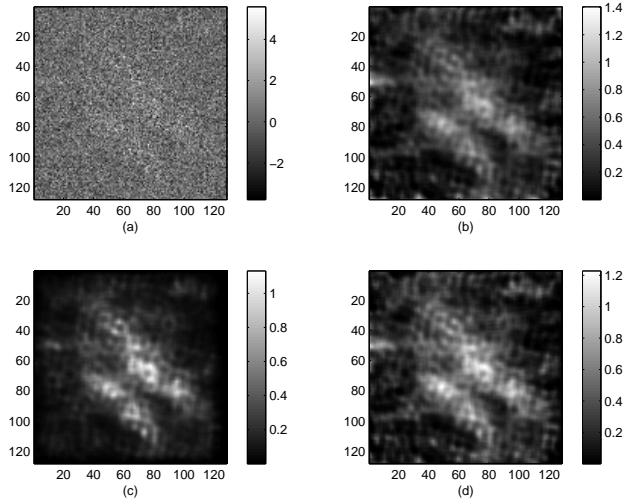


FIG. 2 – (a) Image bruitée, 3000 photons, $m = 0.1, \sigma^2 = 1$ (b) ISRA, $k_{min} = 2, \epsilon_{min} = 0.55$ (c) GP, $k_{min} = 5, \epsilon_{min} = 0.46$ (d) RL, $k_{min} = 3, \epsilon_{min} = 0.52$

5 Conclusion

Un algorithme de reconstruction d'images dans le cas d'un bruit Gaussien Poissonien a été proposé. Ce modèle est particulièrement adapté aux données astrophysiques acquises grâce à des capteurs CCD. Classiquement les modèles utilisés pour de telles données considèrent soit un bruit Gaussien pur, ce qui conduit à l'algorithme ISRA, soit un bruit Poissonien pur, ce qui conduit à l'algorithme RL. Les résultats de simulation mettent en évidence l'intérêt du modèle composite, en particulier à très faible flux.

Références

[1] L. Armijo. Minimization of functions having continuous derivatives. *Pacific Journal of Mathematics*, (16) :1–3, 1966.
[2] D. P. Bertsekas. *Non linear programming*. Athena Scientific, 1995.

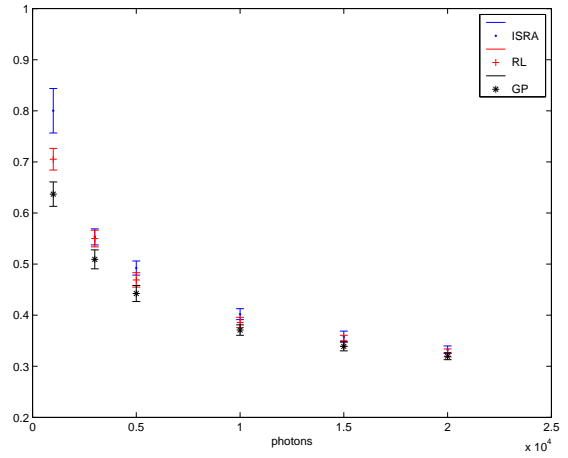


FIG. 3 – Moyenne et variance de l'erreur d'estimation (50 réal.), $m = 0, \sigma^2 = 2$ sans régularisation.

[3] C.S. Butler and M. I. Miller. Maximum a posteriori estimation for spect using regularization techniques on massively parallel computers. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 11(12) :84–89, 1993.
[4] I. Csiszär. Why least squares and maximum entropy? an axiomatic approach to inference for linear inverse problems. *The annals of statistics*, 46(19) :2032–2066, 1991.
[5] M. E Daube-Witherspoon and G Muehllehner. An iterative image space reconstruction algorithm suitable for volume ect. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, (5) :61–66, 1986.
[6] G. Demoment. Image reconstruction and restoration : Overview of common estimation structures and problems. *IEEE Transactions on ASSP*, 12(37) :2024–2036, 1989.
[7] I. S. Gradshteyn and I.M. Ryzbik. *Table of Integrals, series and Products*. Academic Press, 2000.
[8] K. Horne. Images of accretion discs - the eclipse mapping method. *Monthly notes in Royal Astronomy Society*, (213) :129–141, 1985.
[9] H. Lanteri, M. Roche, O. Cuevas, and C. Aime. A general method to devise maximum likelihood signal restoration multiplicative algorithms with non-negativity constraints. *Signal Processing*, 54(81) :945–974, 2001.
[10] H. Lanteri and C. Theys. Restoration of astrophysical images - the case of poisson data with additive gaussian noise. *Eurasip Journal on Applied Signal Processing - Special Issue on Applications of Signal Processing in Astrophysics and Cosmology*, to be published in 2nd Quarter 2005.
[11] J. Llacer and J. Nuñez. Iterative maximum likelihood and bayesian algorithms for image reconstruction in astronomy. In R. L White and R. J. Allen, editors, *The restoration Of Hubble Space Telescope images*, pages 62–69. The Space Telescope Science Institute, 1990.
[12] L. B. Lucy. An iterative technique for the rectification of observed distributions. *Astronomic Journal*, (79) :745–754, 1974.
[13] L. B. Lucy. Optimum strategy for inverse problems in statistical astronomy. *Astronomy and Astrophysics*, (289) :983–994, 1994.
[14] D. G. Luenberger. *Introduction to linear and non linear programming*. Addison Wesley, Reading, Massachussets, 1973.
[15] M. Minoux. *Programmation mathématique - Théorie et algorithmes*, volume 1. Collection technique et scientifique des télécommunications, dunod edition, 1983.
[16] D. L. Snyder, C. W. Helstrom, A. D. Lanterman, M. Faisal, and R. L. White. Compensation for readout noise in ccd images. *Journal of Optical Society of America A*, 12(2) :272–283, 1995.
[17] A. Tikhonov and V. Arsenin. *méthodes de résolution des problèmes mal posés*. Mir Moscou, 1976.
[18] C. H. Wu and J. M. M. Anderson. Novel deblurring algorithms for images captured with ccd cameras. *Journal of Optical Society of America A*, 7(14) :1421–1430, 1997.