

Optimisation des codes LDPC pour les communications OFDM

Valérien MANNONI¹, Guillaume GELLE²

¹France Télécom R&D, RESA/BWA
4 rue du Clos Courtel, B.P. 59, 35512 Cesson-Sévigné Cedex, France

²DéCom/CRéSTIC-URCA
BP 1039, 51687 Reims Cedex 2, France

valerian.mannoni@francetelecom.com, guillaume.gelle@univ-reims.fr

Résumé – Nous présentons dans cet article une nouvelle méthode d’optimisation des codes correcteurs d’erreurs pour les transmissions OFDM codées sur canal sélectif en fréquence, basée sur l’utilisation des codes LDPC irréguliers. Dans un premier temps, nous introduisons une nouvelle paramétrisation des codes LDPC irréguliers que nous appelons profil d’irrégularité. Ensuite, nous proposons d’utiliser cette paramétrisation pour optimiser les codes LDPC pour les communications OFDM en utilisant comme critère la minimisation du seuil de convergence du code. L’optimisation de ce nouveau critère est ensuite faite par approximation Gaussienne. Des simulations illustrent les performances de notre approche comparativement à celle d’un code optimisé pour canal BABG.

Abstract – This paper deals with optimized channel coding for OFDM transmissions (COFDM) over frequency selective channels using irregular Low-Density Parity-Check codes. Firstly, we introduce a new characterization of the LDPC codes irregularity called "irregularity profile". Then, using this parameterization, we optimize the LDPC codes using the criterion based on the minimization of the convergence threshold. The optimization of this criterion is done using the Gaussian approximation technique. Simulations illustrate the good performance of our approach in comparison with irregular LDPC codes optimized on AWGN channel.

1 Introduction

Ce papier présente une nouvelle méthode de construction de codes correcteurs d’erreurs optimisés pour les transmissions OFDM codées (COFDM) [1]. En effet, les modulations OFDM se montrent être de bonnes candidates pour les standards émergeant de communications haut débit que ce soit pour les communications filaires ou radio, simple ou multi-utilisateurs. Nous proposons ici d’utiliser l’information sur l’état du canal disponible par voie de retour à l’émetteur dans certaines applications telle que les transmissions filaires xDSL. Celle-ci sert alors d’*a priori* pour construire des codes correcteurs d’erreurs qui soient *adaptés* à la sélectivité en fréquence du canal OFDM.

Les Turbo-codes ainsi que les codes LDPC sont deux familles concurrentes de codes pseudo-aléatoires approchant la capacité de certains canaux. Il a été montré que les codes LDPC irréguliers sont spécialement intéressants du fait que l’on peut en optimiser les paramètres caractérisant leur irrégularité ce qui a permis ainsi d’approcher la capacité de divers canaux de communication [2]. Nous proposons alors d’optimiser l’irrégularité des codes LDPC pour les canaux OFDM sélectifs en fréquence et pour ce faire nous supposons que nous avons une connaissance parfaite de l’état du canal à l’émetteur. Cependant, nous verrons qu’une connaissance partielle de celui-ci est suffisante pour réaliser nos codes.

Ce papier est organisé comme suit. Les principaux concepts et notations sur les codes LDPC ainsi que sur les modulations OFDM sont présentés en section 2. Dans la section 3 est décrit l’étude du comportement asymptotique par approximation Gaussienne des codes LDPC pour les canaux OFDM sélectifs en fréquence. A partir de cette étude, nous donnons l’algorithme d’optimisation des codes LDPC pour ce type de canal

en section 4. Finalement, les résultats sont présentés en section 5 et une conclusion est donnée en section 6.

2 Généralités

2.1 Codes LDPC

Un code LDPC est un code bloc défini par une matrice de vérification de parité \mathbf{H} , creuse, de dimension $(M \times N)$ où N est la taille du mot de code et M le nombre d’équations de parité. Un code LDPC peut également être représenté par son graphe factoriel. Un graphe factoriel est un graphe bipartite contenant deux types de noeuds : les noeuds de données représentant le mot de code et les noeuds de contrôles représentant les vérifications de parité. Le $i^{\text{ème}}$ noeud de donnée et le $j^{\text{ème}}$ noeud de contrôle sont connectés par une branche si et seulement si $\mathbf{H}_{j,i}$ est non nul.

Une classe plus générale des codes LDPC a ensuite été introduite par Luby *et al.* [3], il s’agit des codes LDPC *irréguliers*. Cette irrégularité se traduit par une distribution non uniforme du nombre de branches connectées aux différents types de noeuds sur le graphe factoriel. Habituellement l’irrégularité d’un code LDPC est spécifiée par deux polynômes : $\lambda(x) = \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i x^{i-1}$ et $\rho(x) = \sum_{j=2}^{t_{rmax}} \rho_j x^{j-1}$ où λ_i (resp. ρ_j) est la proportion des branches connectées aux noeuds de données (resp. noeuds de contrôles) de degré i c’est-à-dire connectés avec i branches (resp. degré j). t_{cmax} (resp. t_{rmax}) représente le taux de connexion maximal des noeuds de données (resp. contrôles). Ces deux polynômes sont liés par le rendement R du code, et la relation les liant, nommée contrainte de rendement, s’écrit : $(1 - R) \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i / i = \sum_{j=2}^{t_{rmax}} \rho_j / j$. Il est également usuel d’utiliser une représentation duale de l’irrégularité qui consiste en l’utilisation de deux autres polynômes :

$\tilde{\lambda}(x) = \sum_{i=2}^{tmax} \tilde{\lambda}_i x^{i-1}$ et $\tilde{\rho}(x) = \sum_{j=2}^{trmax} \tilde{\rho}_j x^{j-1}$ où, cette fois $\tilde{\lambda}_i$ (resp. $\tilde{\rho}_j$) représente la proportion des noeuds de données (resp. contrôles) de degré i (resp. j). A partir de cette définition de l'irrégularité, l'optimisation des codes LDPC a déjà été effectuée pour différents types de canal. Typiquement, la méthode d'optimisation est basée sur l'étude du comportement asymptotique des codes LDPC au cours des étapes de décodages lesquelles seront présentées dans la section suivante.

2.2 Décodage des codes LDPC

Les codes LDPC sont facilement décodés par un algorithme itératif nommé propagation de croyance. Chaque itération de propagation de croyance est composée de deux étapes : Une étape de mise à jour des messages lorsqu'ils passent par un noeud de donnée appelée *data pass* et une étape de mise à jour des messages lorsqu'ils passent par un noeud de contrôle appelée *check pass*. Les messages utilisés seront ici les log-rapports de vraisemblance. Notons $v = \log \frac{p(y|c=0)}{p(y|c=1)} = \log \frac{v[0]}{v[1]}$ le message de sortie d'un noeud de donnée, et $u = \log \frac{p(y'|c'=0)}{p(y'|c'=1)} = \log \frac{u[0]}{u[1]}$ le message de sortie d'un noeud de contrôle.

Lors de la mise à jour sur le noeud de donnée k de degré i à l'itération l , le message v envoyé sur la $q^{ième}$ branche est donné par la relation suivante :

$$v_q^{(l)} = u_0 + \sum_{n=1; n \neq q}^i u_n^{(l-1)} \quad \forall q = 1, \dots, i \quad (1)$$

où u_n , $n = 1, \dots, i$, représentent les messages venant des noeuds de contrôles voisins et $u_0 = \log \frac{p(y_k|c_k=0)}{p(y_k|c_k=1)}$ représente le log-rapport de vraisemblance observé en sortie du canal. Ensuite, lors de la mise à jour sur un noeud de contrôle de degré j , le message de sortie u sur la $p^{ième}$ branche est donné par l'expression :

$$\tanh \frac{u_p^{(l)}}{2} = \prod_{m=1; m \neq p}^j \tanh \frac{v_m^{(l)}}{2} \quad \forall p = 1, \dots, j \quad (2)$$

où v_m , $m = 1, \dots, j$ sont les messages venant des noeuds de données voisins.

2.3 Nouvelle paramétrisation des codes LDPC pour l'OFDM

Le système de transmission OFDM, représenté en Fig.1, consiste en la division de la bande spectrale disponible en ensemble de porteuses, chacune d'entre elle étant modulée à bas débit. Ainsi, le canal sélectif en fréquence est transformé en un ensemble de N_c canaux Gaussiens instantanés d'amplitude H_k ($k = 1, \dots, N_c$). Le symbole reçu Y_k dans le domaine fréquentiel s'écrit donc :

$$Y_k = H_k X_k + N_k \quad \forall k = 1, \dots, N_c, \quad (3)$$

où H_k représente le $k^{ième}$ coefficient du spectre du canal, X_k le $k^{ième}$ symbole émis et N_k le bruit additif de moyenne nulle et de variance σ_n^2 . Le canal OFDM sélectif en fréquence étant, vu du décodeur, non stationnaire, il est ici nécessaire d'utiliser le profil d'irrégularité comme paramétrisation des codes LDPC que nous avons introduite dans [5] et que nous redéfinirons dans la prochaine section.

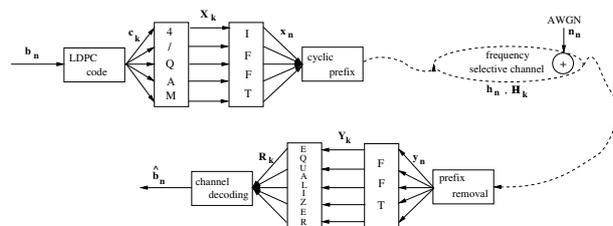


FIG. 1 – Système de transmission OFDM.

3 Approximation Gaussienne pour les transmissions OFDM

Afin d'optimiser la structure des codes LDPC, il est tout d'abord nécessaire d'évaluer leurs comportement lors du décodage par propagation de croyance. Richardson *et al.* ont introduit une méthode générale permettant de prédire le comportement asymptotique des codes LDPC. Cette méthode, appelée évolution de densité, est basée sur l'étude des densités de probabilité (d.d.p.) des messages se propageant dans le graphe factoriel au cours des itérations de décodage. Pour le canal à bruit additif blanc Gaussien (BABG), Chung proposa dans [4] une approximation gaussienne des d.d.p. des messages afin de simplifier l'analyse par évolution de densité. Cette approximation permet alors de calculer rapidement le seuil de convergence (lequel est défini par le plus petit RSB au dessus duquel la probabilité d'erreur tend vers zéro quand le nombre d'itérations tend vers l'infini) des codes LDPC et ainsi d'en optimiser la structure. Dans cette section, nous présenterons une adaptation de l'algorithme de Chung pour les communications OFDM à travers un canal sélectif en fréquence.

Afin de pouvoir effectuer l'analyse du comportement des codes LDPC par évolution de densité, il est tout d'abord nécessaire de montrer que les conditions de symétrie du canal et d'indépendance des messages qui se propagent au cours des itérations de décodage peuvent être vérifiées dans le cadre d'une communication OFDM.

Pour une transmission OFDM à travers un canal sélectif en fréquence avec des symboles issus d'une constellation MAQ-4, il est facile de montrer que la condition de symétrie du canal est bien respectée. Pour prédire les performances d'un tel système par évolution de densité, il suffira d'utiliser le mot de code tout 0 et ce, sans perte de généralité. Ainsi, le log-rapport de vraisemblance observé $u_{0,k}$ suit une loi Gaussienne consistante, soit :

$$f_{u_{0,k}} = \mathcal{N}\left(\frac{4|H_k|^2}{\sigma_n^2}, \frac{8|H_k|^2}{\sigma_n^2}\right) = \mathcal{N}(m_{u_{0,k}}, 2m_{u_{0,k}}) \quad \forall k. \quad (4)$$

La seconde condition laquelle implique l'indépendance des messages qui se propagent dans le graphe lors de la propagation de croyance est vérifiée uniquement dans le cas où le graphe factoriel représentant le code LDPC est un arbre c'est-à-dire à condition que la taille du mot de code soit infinie. Ceci nécessite donc d'utiliser un nombre infini de sous-porteuses et ainsi, par opposition au canal plat BABG, de définir un nombre infini de messages provenant du canal tel que défini par l'équation (4). Ceci n'étant bien sûr pas réalisable, nous avons dû utiliser une approximation de la réponse fréquentielle du canal dispersif par une fonction étagée. Cette dernière divise l'amplitude du canal en N_s parties égales réduisant ainsi le nombre d'équations à un nombre fini N_s (Cf. Fig.2).

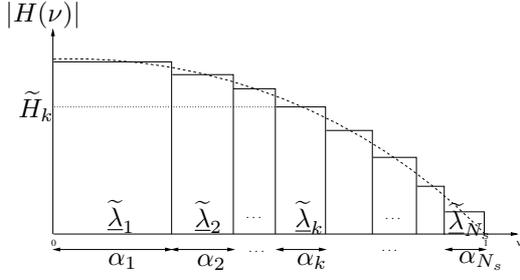


FIG. 2 – Approximation du canal sélectif en fréquence

Nous visons donc dans cet article à optimiser conjointement N_s "parties de code" LDPC correspondant aux N_s sous-bandes, lesquelles composent alors le code LDPC global. Chacune de ces N_s parties du code LDPC sera initialisée par une bande de fréquence du canal sélectif différente. La non-stationarité du canal de propagation est donc gérée par une initialisation non-constante de l'algorithme de décodage. Pour ce faire, il est tout d'abord nécessaire de redéfinir la paramétrisation du profil d'irrégularité (Cf. Fig.2) qui sera ici défini par la concaténation suivante : $[\alpha_1 \tilde{\lambda}_1 \alpha_2 \tilde{\lambda}_2 \dots \alpha_k \tilde{\lambda}_k \dots \alpha_{N_s} \tilde{\lambda}_{N_s}]$, où $\tilde{\lambda}_k = [\tilde{\lambda}_{2,k}, \tilde{\lambda}_{3,k}, \dots, \tilde{\lambda}_{t_{cmax},k}]$ représente le vecteur définissant l'irrégularité en terme de proportion de noeuds de données du code LDPC situé dans la $k^{ième}$ sous-bande avec $\tilde{\lambda}_{i,k}$ la proportion des noeuds de données de degré i de la $k^{ième}$ sous-bande.

Développons maintenant l'algorithme de l'approximation Gaussienne pour les canaux OFDM avec comme paramètre d'évolution l'information mutuelle. D'après l'équation (1), l'information mutuelle des messages sortants des noeuds de données de degré i dans la $k^{ième}$ sous-bande est donnée par :

$$I_{v,i,k}^{(l)} = J \left(m_{u_0}(\tilde{H}_k) + (i-1)J^{-1} \left(I_u^{(l-1)} \right) \right), \quad (5)$$

où l'information mutuelle I_u des messages u provenant des noeuds de contrôles et la fonction $J()$ sont définies dans [6]. Ainsi, nous obtenons l'évolution de l'information mutuelle en fonction du profil d'irrégularité :

$$I_v^{(l)} = \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_k \frac{i \tilde{\lambda}_{i,k}}{\sum_{j=2}^{t_{cmax}} \sum_{n=1}^{N_s} \alpha_n j \tilde{\lambda}_{j,n}} J \left(m_{u_0}(\tilde{H}_k) + (i-1)J^{-1} \left(I_u^{(l-1)} \right) \right) = F_{im} \left(\tilde{H}, \sigma_b^2, I_v^{(l-1)} \right). \quad (6)$$

En utilisant (6) itérativement, nous pouvons suivre l'évolution de $I_v^{(l)}$ au cours des itérations. Il devient donc maintenant possible de calculer le seuil de convergence lequel correspond ici au plus petit RSB au-dessus duquel $I_v^{(l)} \rightarrow 1$ quand $l \rightarrow +\infty$.

4 Optimisation

Dans [5], nous avons proposé un critère d'optimisation non linéaire, basé sur la minimisation de la probabilité d'erreur bit après L itérations de décodage, qui nous permettait d'obtenir des codes LDPC présentant de bonnes performances pour de petites tailles de mot de code. Dans cet article, nous utilisons le critère d'optimisation plus classique introduit dans [2] qui consiste en la minimisation du seuil de convergence $(E_b/N_0)^*$. Ce critère est adapté pour des mots de code de taille importante, décodés avec un nombre d'itérations conséquent. Étant

donné qu'il n'est pas possible de minimiser directement le seuil de convergence, le critère d'optimisation réel consiste en fait à maximiser le rendement de codage d'un code LDPC exhibant un seuil à un $(E_b/N_0)^*$ donné.

Le seuil de convergence étant le RSB au-dessus duquel $I_v^{(l)} \rightarrow 1$ quand $l \rightarrow \infty$, $I_v^{(l)}$ définie par (6) doit alors être strictement croissante. Ainsi la condition de convergence $I_v^{(l)} \rightarrow 1$ est donnée par :

$$I_v > F_{im} \left(\tilde{H}, \sigma_b^2, I_v \right) \quad \forall I_v \in [0, 1]. \quad (7)$$

Le problème d'optimisation peut être écrit comme suit :

$$[\tilde{\lambda}_{1,opt} \dots \tilde{\lambda}_{N_s,opt}] = arg \min_{[\tilde{\lambda}_1 \dots \tilde{\lambda}_{N_s}]} \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_k i \tilde{\lambda}_{i,k} \quad (8)$$

sous la contrainte,

$$I_v > F_{im} \left(\tilde{H}, \sigma_b^2, I_v \right) \quad \forall I_v \in [0, 1]. \quad (9)$$

ainsi que sous les contraintes de normalisation et de proportion définies respectivement par :

$$\sum_{i=2}^{t_{cmax}} \tilde{\lambda}_{i,k} = 1 \quad \forall k = 1, \dots, N_s, \quad \text{and} \quad \tilde{\lambda}_{i,k} \in [0, 1]. \quad (10)$$

Afin de rendre la condition de convergence linéaire en fonction du profil d'irrégularité définie par les $\lambda_{i,k}$, nous insérons également la contrainte de rendement :

$$I_v > \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_k \frac{i \tilde{\lambda}_{i,k}}{(1-R) \sum_{j=2}^{t_{cmax}} j \tilde{\rho}_j} I_v^{(l)} \quad \forall I_v \in [0, 1]. \quad (11)$$

Ainsi, le problème d'optimisation devient linéaire en les paramètres à optimiser et peut donc être traité par programmation linéaire. Cependant, étant donné que le rendement R intervient dans la condition de convergence, nous avons été amené à développer l'algorithme d'optimisation suivant, basé sur une dichotomie :

1. Initialisation : Fixons un (E_b/N_0) initial suffisamment important, un rendement cible R^* et le pas de la dichotomie K_{dich} ,
2. Pour la valeur courante de $(E_b/N_0)^*$ et un rendement cible R^* , effectuer l'optimisation suivante

$$\tilde{\lambda}_{opt} = [\tilde{\lambda}_{1,opt} \dots \tilde{\lambda}_{N_s,opt}] = arg \min_{[\tilde{\lambda}_1 \dots \tilde{\lambda}_{N_s}]} \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_k i \tilde{\lambda}_{i,k} \quad (12)$$

sous les contraintes,

$$\sum_{i=2}^{t_{cmax}} \tilde{\lambda}_{i,k} = 1 \quad \forall k = 1, \dots, N_s, \quad \tilde{\lambda}_{i,k} \in [0, 1] \quad \text{and} \quad I_v > \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_k \frac{i \tilde{\lambda}_{i,k}}{(1-R^*) \sum_{j=2}^{t_{cmax}} j \tilde{\rho}_j} I_v^{(l)} \quad \forall I_v \in [0, 1].$$

3. Soit $R_{opt} = 1 - \frac{\sum_{i=2}^{t_{cmax}} \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_k i \tilde{\lambda}_{i,k,opt}}{\sum_{j=2}^{t_{cmax}} j \tilde{\rho}_j}$, le rendement résultant obtenu après l'étape 2.

Si $R_{opt} > R^*$, diminuer la valeur de $(E_b/N_0)^*$ par K_{dich} , et revenir à l'étape 2. Si $R_{opt} < R^*$, fixer le RSB à $(E_b/N_0)^* + K_{dich}/2$, diviser le pas de la dichotomie K_{dich} par 2 et revenir à l'étape 2.

4. L'algorithme d'optimisation stoppe dès que nous obtenons $0 < |R^* - R_{opt}| < 10^{-5}$.

5 Résultats des simulations

Dans cette section, nous présentons la structure du code LDPC optimisé pour le canal sélectif en fréquence Proakis B laquelle est illustrée en Fig.3. Pour cette optimisation, nous fixons le rendement de codage à $R = 0.5$ et le taux maximum de connexion à $t_{cmax} = 200$. Au vu du profil d'irrégularité, nous pouvons faire deux remarques sur la forme du profil :

- tout d'abord, on peut constater que la répartition des degrés de connexion tend à *inverser* la forme du canal, c'est-à-dire à placer des taux de connexion importants aux endroits où le canal est de mauvaise qualité afin de compenser les évanouissements.
- Cependant, sur la première partie du mot de code, l'algorithme d'optimisation place des connexions à 3 alors que le degré minimum est 2. Ceci peut s'expliquer par le fait que dans cette partie du mot de code, le canal a un fort gain et fournit donc des messages de bonne qualité au décodeur. Ces bons messages se propageront d'autant mieux dans le graphe, au cours des itérations, que les degrés des nœuds seront élevés.

La forme globale du profil d'irrégularité est donc caractéristique d'un compromis entre ces deux comportements.

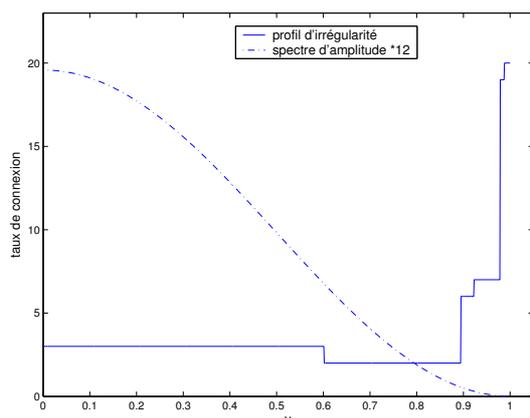


FIG. 3 – Profil d'irrégularité pour le canal Proakis B avec $R = 1/2$.

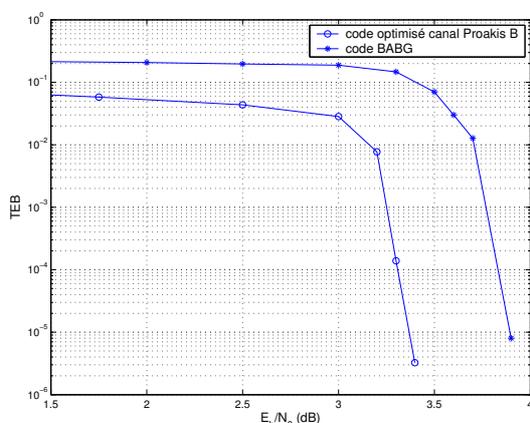


FIG. 4 – Performances du code LDPC optimisé pour le canal Proakis B et du code optimisé pour le canal BABG utilisés lors d'une transmission OFDM sur le canal Proakis B. $R = 1/2$, $N = 65536$ et le nombre d'itérations est $L = 500$.

Le tableau Tab.1 liste les seuils de convergence calculés par évolution de densité exacte sur le canal OFDM Proakis B du code LDPC optimisé pour ce canal et du code BABG (code LDPC optimisé pour le canal BABG avec les mêmes paramètres entrelacé). Notre code LDPC optimisé présente un gain de 0.27 dB par rapport au code BABG et de 1.5 dB par rapport au code régulier (3;6). Nous avons ensuite simulé une chaîne OFDM codé avec un code LDPC de taille finie. Les performances obtenues sont présentées en Fig.4.

TAB. 1 – Seuils de convergence obtenus par évolution de densité exacte des codes LDPC de $R = 1/2$ à travers le canal OFDM Proakis B. La capacité du canal pour une constellation MAQ-4 est indiquée entre parenthèses.

R=1/2	canal Proakis B (1.18 dB)		
code LDPC	code optimisé	code BABG	(3;6)
$(E_b/N_0)^*$	3.03 dB	3.30 dB	4.48 dB

6 Conclusion

Dans ce papier, nous avons optimisé la structure des codes LDPC pour des transmissions OFDM à travers des canaux sélectifs en fréquence. Afin de pouvoir effectuer cette optimisation, il a tout d'abord été nécessaire de redéfinir le profil d'irrégularité comme paramétrisation des codes LDPC. A partir de cette paramétrisation, nous avons alors effectué l'optimisation à l'aide de l'approximation Gaussienne développée ici pour les canaux OFDM. L'implantation de l'algorithme d'optimisation est basée sur la programmation linéaire. Les résultats présentés montrent l'intérêt d'exploiter la sélectivité fréquentielle des canaux OFDM.

Références

- [1] W.Y. Zou and Y. Wu, "COFDM : An Overview," *IEEE Trans. on Broadcasting*, vol. 41, no. 1, pp. 1–8, March 1995.
- [2] T. J. Richardson, A. Shokrollahi, and R. Urbanke, "Design of Capacity-Approaching Low-Density Parity-Check Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 619–637, Feb. 2001.
- [3] M.G. Luby, M. Mitzenmacher, A. Shokrollahi, and D. Spielman, "Analysis of Low Density Codes and Improved Designs Using Irregular Graphs," in *Proc of the 30th ACM STOC*, 1998.
- [4] S. Y. Chung, R. Urbanke, and T. J. Richardson, "Analysis of Sum-Product Decoding of Low-Density Parity-Check Codes Using a Gaussian Approximation," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 47, no. , pp. 657–670, Feb. 2001.
- [5] V. Mannoni, D. Declercq, and G. Gelle, "Optimized Irregular LDPC Codes for Multi-carrier Modulations over Frequency Selective Channels," in *EURASIP-JASP, special issue on 'Multi-carrier Communications and Signal Processing'*, vol. 10, pp. 1536–1546, Aug. 2004.
- [6] S. ten Brink, G. Kramer, and A. Ashikhmin, "Design of Low-Density Parity-Check Codes for Modulation and Detection," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 52, no. 4, pp. 670–678, April 2004.