

# Bornes de Cramer Rao de DOA pour signaux BPSK et QPSK en présence de bruit non uniforme

Habti ABEIDA, Jean Pierre DELMAS

GET/INT, Département CITI, UMR-CNRS 5157  
9 rue Charles Fourier, 91011 Evry Cedex, France

habti.abeida@int-evry.fr, jean-pierre.delmas@int-evry.fr

**Résumé** – Cet article est consacré au calcul de la borne de Cramer-Rao (CRB) stochastique des directions d'arrivée (DOA) de signaux de modulation BPSK et QPSK en présence de bruit additif gaussien circulaire de matrice de covariance spatiale diagonale arbitraire. Une expression analytique de cette borne est donnée dans le cas d'une seule source grâce au découplage entre les paramètres puissance et les paramètres de phase de la matrice d'information de Fisher (FIM). Cette borne est comparée à diverses bornes dérivées selon diverses connaissances a priori. Ces résultats et comparaisons sont ensuite étendus au cas de deux sources indépendantes où des expressions analytiques de CRB sont obtenues pour des grandes valeurs de rapport signal sur bruit (SNR). Nous avons mis en évidence de grandes différences de comportement par rapport à la borne standard obtenue dans le cas de signaux gaussiens circulaires, démontrant ainsi l'intérêt des approches EM dans le cas de connaissances a priori sur la distribution discrète des sources.

**Abstract** – This paper focuses on the stochastic Cramer-Rao bound (CRB) for the direction of arrival (DOA) for binary phase-shift keying (BPSK) and quaternary phase-shift keying (QPSK) modulated signals observed on the background of nonuniform white noise with an arbitrary diagonal covariance matrix. Explicit expressions of the CRB for the DOA parameter alone in the case of a single signal waveform is given thanks to the decoupling of the power and phase parameters in the Fisher information matrices (FIM) and compared with CRBs obtained with different a priori knowledge. Then, these results and comparisons are extended to the case of two independent sources where an explicit expression of the CRB of the DOA parameters alone is given for large SNR. They reveal large differences of behavior with respect to complex circular Gaussian signals. This proves the interest of the EM approaches when an a priori information on the discrete distribution of the sources is given.

## 1 Introduction

Il existe une abondante littérature sur les bornes de Cramer-Rao des DOA de sources de distributions gaussiennes. Dans le cas de distributions discrètes telles que celles rencontrées en communications numériques, le calcul de ses bornes semble délicat. Un premier calcul de celles-ci a été mené [1] pour des modulations BPSK et QPSK dans le cadre de bruit additif gaussien circulaire spatialement blanc uniforme. Mais ce modèle de bruit semble irréaliste quand il est d'origine externe, ce qui est le cas en particulier dans les applications radio-électriques car alors le bruit est spatialement coloré. Cependant, dans le cas particulier de réseaux lacunaires, ce modèle général de bruit spatialement corrélés peut être simplifié [2], [3] en supposant qu'il est simplement blanc non uniforme. Le but de cet article est d'étendre les résultats de [1] dans ce cadre.

## 2 Modèle et notations

Nous considérons une antenne arbitraire de  $M$  capteurs recevant un ou deux signaux indépendants de modulations BPSK ou QPSK issus de DOAs inconnues  $(\theta_k)_{k=1,2}$ . Nous supposons que l'antenne est parfaitement calibrée de telle sorte que les vecteurs directionnels sont des fonctions connues  $\mathbf{a}_k$  de  $\theta_k$  telles que  $\|\mathbf{a}_k\|^2 = M$ . Nous supposons également qu'il n'y a pas d'interférence entre symboles de sorte qu'après démodulation, les signaux bande de base en sortie de filtrage adapté du réseau d'antenne s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{y}_t = s_{1,t}\mathbf{a}_1 + s_{2,t}\mathbf{a}_2 + \mathbf{n}_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

où  $s_{k,t} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_k e^{i\phi_k} \epsilon_{k,t}$  et où  $(\epsilon_{k,t})_{t=1,\dots,T}$  sont des symboles aléatoires indépendantes, identiquement distribués (IID) prenant des valeurs  $\pm 1$  [resp.  $\pm\sqrt{2}/2 \pm i\sqrt{2}/2$ ] avec des probabilités égales associées à la modulation BPSK [resp. QPSK].  $(\mathbf{n}_t)_{t=1,\dots,T}$  sont des v.a. IID complexes circulaires centrées gaussiennes de matrice de covariance diagonale inconnue

$$\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\mathbf{n}_t \mathbf{n}_t^H) = \text{Diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_M^2)$$

où  $\boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_1, \dots, \sigma_M)$ .  $\mathbf{n}_t$  et  $\epsilon_t$  sont supposés indépendants. En absence de connaissances a priori sur les symboles transmis, leur phase et leur puissance, notre modèle (1) est paramétré par  $\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{s_1}, \phi_1, \theta_1)$  ou  $\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{s_1}, \phi_1, \theta_1, \sigma_{s_2}, \phi_2, \theta_2)$  selon le nombre de sources, et les observations  $(\mathbf{y}_t)_{t=1,\dots,T}$  possèdent une densité de probabilité (PDF) comme mélange de distributions gaussiennes complexes circulaires :

$$p(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{L^K \pi^M \text{Det}(\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}))} \sum_{j=1}^{L^K} e^{-(\mathbf{y}_t - \mathbf{A}\mathbf{s}_j)^H \mathbf{Q}_n^{-1}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{y}_t - \mathbf{A}\mathbf{s}_j)} \quad (2)$$

avec pour une source  $K = 1$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{s}_j = \sigma_{s_1} \eta_{j,1} e^{i\phi_1}$ ,  $(\eta_{j,1})_{j=1,L} = \pm 1$  ( $L = 2$ ) ou  $(\eta_{j,1})_{j=1,L} = \pm\sqrt{2}/2 \pm i\sqrt{2}/2$  ( $L = 4$ ) associée respectivement aux modulations BPSK et QPSK. Pour deux sources  $K = 2$ ,  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  et  $\mathbf{s}_j = (\sigma_{s_1} \eta_{j,1} e^{i\phi_1}, \sigma_{s_2} \eta_{j,2} e^{i\phi_2})^T$  où  $(\eta_{j,1}, \eta_{j,2})_{j=1,L^2} = (\pm 1, \pm 1)$  ( $L = 2$ ) ou  $(\eta_{j,1}, \eta_{j,2})_{j=1,L^2} = (\pm\sqrt{2}/2 \pm i\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2 \pm i\sqrt{2}/2)$  ( $L = 4$ ) associées respectivement aux modulations BPSK et QPSK.

### 3 CRB stochastiques pour des signaux BPSK et QPSK

#### 3.1 Cas d'une source

En mettant les PDF (2) sous les formes suivantes :

$$p_{\text{BPSK}}(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\pi^M \text{Det}(\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}))} e^{-\|\tilde{\mathbf{y}}_t\|^2 + \sigma_{s_1}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2} \text{ch}(\sigma_{s_1} g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t))$$

$$p_{\text{QPSK}}(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\pi^M \text{Det}(\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}))} e^{-\|\tilde{\mathbf{y}}_t\|^2 + \sigma_{s_1}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2} \text{ch}\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}} g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) \text{ch}\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}} g_2(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)$$

avec  $\tilde{\mathbf{y}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{y}_t$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{a}_1$ ,  $g_1(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(e^{i\phi_1} \tilde{\mathbf{y}}_t^H \tilde{\mathbf{a}}_1)$  et  $g_2(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Im(e^{i\phi_1} \tilde{\mathbf{y}}_t^H \tilde{\mathbf{a}}_1)$ , nous avons étendu les calculs menés dans [1] et démontré le théorème suivant dans [4] :

**Théorème 1** *Les paramètres puissances et phases de  $\boldsymbol{\alpha}$  sont découplés dans les FIM associées aux signaux de modulations BPSK et QPSK et celles-ci sont données par :*

$$\mathbf{I}_{\text{BPSK}} = T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_B^{(1)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_B^{(2)} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{I}_{\text{QPSK}} = T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_Q^{(1)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_Q^{(2)} \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbf{I}_B^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 2\sigma_{s_1}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 (1 - f(Mr_1)) \\ 2\sigma_{s_1}^2 i(\tilde{\mathbf{a}}_1^H \tilde{\mathbf{a}}_1) (1 - f(Mr_1)) \\ 2\sigma_{s_1}^2 i(\tilde{\mathbf{a}}_1^H \tilde{\mathbf{a}}_1) (1 - f(Mr_1)) \\ 2\sigma_{s_1}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 (1 - f(Mr_1)) \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{I}_Q^{(2)})_{1,1} = 2\sigma_{s_1}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 \left(1 - (1 + Mr_1) f\left(\frac{Mr_1}{2}\right)\right)$$

$$(\mathbf{I}_Q^{(2)})_{1,2} = 2\sigma_{s_1}^2 i(\tilde{\mathbf{a}}_1^H \tilde{\mathbf{a}}_1) \left(1 - (1 + Mr_1) f\left(\frac{Mr_1}{2}\right)\right)$$

$$(\mathbf{I}_Q^{(2)})_{2,2} = 2\sigma_{s_1}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 \left(1 - \left(1 + \frac{Mr_1}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2} \frac{|\tilde{\mathbf{a}}_1^H \tilde{\mathbf{a}}_1|^2}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}\right) f\left(\frac{Mr_1}{2}\right)\right)$$

où le SNR est défini par  $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_{s_1}^2}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma_m^2}$ ,  $\mathbf{a}'_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{a}_1}{d\theta_1}$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}'_1 = \mathbf{Q}_n^{-1/2}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{a}'_1$  et où  $f(\rho)$  est la fonction décroissante suivante :

$$f(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{-\rho}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\text{ch}(u\sqrt{2\rho})} du.$$

Grâce au découplage des paramètres puissances et phases de  $\boldsymbol{\alpha}$  dans ces FIM, nous obtenons facilement :

$$\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{\alpha_1 r_1}\right) \left(\frac{1}{1 - f(Mr_1)}\right) \quad (1)$$

$$\text{CRB}_{\text{QPSK}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{\alpha_1 r_1}\right) \left(\frac{1}{1 - f\left(\frac{Mr_1}{2}\right)}\right) \quad (2)$$

où  $\alpha_1$  est le facteur  $2M \left(\sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma_m^2}\right)^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_1^H \boldsymbol{\Pi}_{\tilde{\mathbf{a}}_1}^\perp \tilde{\mathbf{a}}_1'$ .

Nous remarquons que  $\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1) < \text{CRB}_{\text{QPSK}}(\theta_1)$  et que pour  $(\sigma_m^2)_{m=1, \dots, M} = \sigma_n^2$ ,  $\alpha_1 = 2\mathbf{a}_1^H \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{a}_1}^\perp \mathbf{a}_1'$  et (1) et (2) redonnent les expressions obtenues dans [1]. La connaissance a priori d'un bruit uniforme n'améliore donc pas les performances d'estimation de la DOA. Notons enfin que la méthode de blanchiment ( $\tilde{\mathbf{y}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{y}_t$ ) que nous avons utilisée

ne permet pas d'aboutir à une expression analytique et interprétable de la FIM dans le cas général d'une matrice de covariance  $\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma})$  non diagonale car la propriété " $\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 = \text{Cte}$  indépendante de  $\theta_1$ " essentielle dans ce calcul n'est plus valable.

Selon différentes connaissances a priori sur les paramètres ou sur la distribution des sources, plusieurs CRB peuvent être considérées et comparées aux expressions (1) et (2).

Ainsi en absence de décalage de phase ou après correction de celle-ci (i.e.,  $\phi_1$  est connue), les CRB (1) et (2) deviennent

$$\text{CRB}_{\text{BPSK}}^{\text{CO}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2\|\tilde{\mathbf{a}}_1'\|^2 \sigma_{s_1}^2}\right) \left(\frac{1}{1 - f(Mr_1)}\right)$$

$$\text{CRB}_{\text{QPSK}}^{\text{CO}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2\|\tilde{\mathbf{a}}_1'\|^2 \sigma_{s_1}^2}\right) \left(\frac{1}{1 - \left(1 + Mr_1 \left(1 - \frac{\alpha_1}{2\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}\right) f\left(\frac{Mr_1}{2}\right)\right)}\right).$$

Si les symboles étaient connus en réception (DA estimation), nous démontrons [4] comme dans le cas de bruit spatialement blanc uniforme [1] que les deux CRB coïncident avec la CRB déterministe obtenue dans [3].

$$\text{CRB}_{\text{DA}}(\theta_1) = \text{CRB}_{\text{DET}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{\alpha_1 r_1}\right) \quad (3)$$

qui est identique aux CRB (1) et (2) quand  $\rho$  tend vers  $\infty$ .

Enfin, puisque la modulation BPSK [resp. QPSK] est non-circulaire [resp. circulaire] complexe au second-ordre, il est intéressant de comparer les CRB stochastiques (1) et (2) aux CRB associées à des distributions gaussiennes complexes non-circulaires (NCG) de taux de non-circularité maximal [5] ou complexes circulaires (CG) [3] qui peuvent être considérées comme des majorants par rapport aux vraies bornes (voir e.g., [6, corollary 1] ou [7, p. 293]). Ces bornes sont données par

$$\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{\alpha_1 r_1} \left[1 + \frac{1}{2Mr_1}\right]\right),$$

$$\text{CRB}_{\text{CG}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{\alpha_1 r_1} \left[1 + \frac{1}{Mr_1}\right]\right),$$

nous avons

$$\frac{\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1)} = \frac{1}{(1 - f(Mr_1)) \left(1 + \frac{1}{2Mr_1}\right)}$$

$$\frac{\text{CRB}_{\text{QPSK}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{CG}}(\theta_1)} = \frac{1}{(1 - f\left(\frac{Mr_1}{2}\right)) \left(1 + \frac{1}{Mr_1}\right)}.$$

Nous notons que ces rapports sont identiques à ceux obtenus dans le cas de bruit spatialement blanc uniforme [1], dépendent seulement de  $\rho$  et convergent tous les deux vers 1 quand  $\rho$  tend vers  $\infty$ .

#### 3.2 Cas de deux sources

Puisque dans le cas de deux sources BPSK ou QPSK, la PDF de  $\mathbf{y}_t$  est respectivement un mélange de 4 PDF gaussiennes ou de 16 PDF gaussiennes, les FIM associées au paramètre  $\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma, \sigma_{s_1}, \phi_1, \theta_1, \sigma_{s_2}, \phi_2, \theta_2)$  sont malheureusement difficiles à calculer explicitement ainsi que les CRB associées. La même difficulté a été rencontrée dans le cas d'un bruit complexe circulaire gaussien spatialement blanc uniforme [1].

Cependant pour des grandes valeurs de SNR, plus précisément pour  $\sum_{i=1}^M \frac{\sigma_{s1}^2}{\sigma_i^2} \gg 1$  et  $\sum_{i=1}^M \frac{\sigma_{s2}^2}{\sigma_i^2} \gg 1$ , nous démontrons que les FIM associées aux signaux BPSK et QPSK sont approximées par la même expression explicite :

$$\mathbf{I}_{\text{BPSK}}^{\text{HSNR}} \approx \mathbf{I}_{\text{QPSK}}^{\text{HSNR}} \approx T \begin{bmatrix} \mathbf{I}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}'_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}'_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

avec

$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_M^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}'_k = \begin{bmatrix} 2 \sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma_m^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 \sum_{m=1}^M \frac{\sigma_{s_k}^2}{\sigma_m^2} & 2\sigma_{s_k}^2 (i\tilde{\mathbf{a}}_k'^H \tilde{\mathbf{a}}_k) \\ 0 & 2\sigma_{s_k}^2 (i\tilde{\mathbf{a}}_k'^H \tilde{\mathbf{a}}_k) & 2\sigma_{s_k}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_k\|^2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$k = 1, 2$ . Il est clair qu'à partir de (4), les paramètres associés aux deux sources sont découplés entre eux ainsi qu'avec les paramètres puissance de bruit. Par conséquent, pour deux sources indépendantes et de grandes valeurs de SNR, la CRB de la DOA d'une source ne dépend pas des paramètres de l'autre source et nous obtenons pour le paramètre  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$  seul :

$$\text{CRB}_{\text{BPSK}}^{\text{HSNR}}(\boldsymbol{\theta}) \approx \text{CRB}_{\text{QPSK}}^{\text{HSNR}}(\boldsymbol{\theta}) \approx \frac{1}{T} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1} \frac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} \frac{1}{r_2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

où  $\alpha_2$  et  $r_2$  sont définis comme  $\alpha_1$  et  $r_1$ . De plus  $\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_k)$  et  $\text{CRB}_{\text{QPSK}}(\theta_k)$  (i.e. les termes diagonaux de (6)) pour chaque DOA sont identiques aux CRB (1) et (2) d'une seule source obtenue dans le cas où  $Mr_1 \gg 1$ . Nous notons que cette propriété est totalement différente de celle obtenue dans le cas de sources de distribution gaussienne circulaire ou dans le cas de la modélisation déterministe. Plus précisément, nous démontrons [4] que la CRB stochastique sous hypothèse gaussienne circulaire [3, rel. (36)] et la CRB déterministe [3, rel. (31)] sont équivalentes, pour des sources indépendantes quand les SNR tendent vers  $+\infty$  sous contrainte  $\mathbf{Q}_n = \sigma_n^2 \mathbf{Q}'_n$  avec  $\mathbf{Q}'_n$  diagonale fixée.

$$\text{CRB}_{\text{CG}}(\boldsymbol{\theta}) \approx \text{CRB}_{\text{DET}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_1} \frac{1}{\sigma_{s1}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_2} \frac{1}{\sigma_{s2}^2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

avec  $\beta_k(\theta_1, \theta_2) \stackrel{\text{def}}{=} 2\tilde{\mathbf{a}}_k'^H \mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{A}}}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_k$ ,  $k = 1, 2$ , et  $\tilde{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2)$ . En conséquence, le comportement du seuil de résolution pour 2 sources proches de même puissances et indépendantes ( $r \stackrel{\text{def}}{=} r_1 = r_2$  et  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 = \alpha_2$ ) est aussi totalement différent. Bien que la CRB ne donne pas directement accès à la meilleure résolution accessible par un estimateur sans biais, elle peut être utilisée pour définir une limite ultime, de résolution. Suivant le critère décrit dans [9], 2 telles sources seront résolues si la racine carré de la CRB sur l'écart angulaire estimé  $(\theta_{1,T} - \theta_{2,T})$  est plus petit que cette séparation angulaire  $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ , i.e.,

$$\sqrt{\text{CRB}_{\text{PSK}}(\theta_1 - \theta_2)} = \sqrt{\frac{2}{T} \frac{1}{\alpha r}} < \Delta\theta$$

parce que  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont découplés dans (6). Cette résolution borne la résolution de tout estimateur sans biais des DOA dans les conditions  $\text{SNR} \gg 1$  où cette CRB a été obtenue. Pour

un réseau linéaire équidistant (ULA),  $\alpha r = 2\sigma^2 [\sum_{m=1}^{M-1} \frac{m^2}{\sigma_m^2} - (\sum_{m=1}^{M-1} \frac{m}{\sigma_m^2})^2 (\sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma_m^2})^{-1}]$  qui est un SNR étendu  $r_e$  ( $\alpha = \frac{M(M^2-1)}{6}$  et  $r = \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2}$  dans le cas de bruit blanc uniforme). Nous obtenons alors  $r_e > \frac{2}{T(\Delta\theta)^2}$ , qui comparée aux sources Gaussiennes circulaires pour lesquelles le seuil de SNR varie en  $(\Delta\theta)^{-4}$  ou en  $(\Delta\theta)^{-3}$  selon le domaine de  $T$  ([10, (35)] pour l'algorithme MUSIC qui est asymptotiquement efficace quand le SNR tend vers l'infini, a un comportement très différent.

Si les symboles étaient connus et les SNR quelconques, les résultats de [1] s'étendent et la FIM associée est également donnée par (4).

Dans le cas de SNR quelconques où des expressions analytiques ne sont pas accessibles, nous avons recours à des approximations numériques obtenues à partir de la loi forte des grands nombres, i.e.,

$$\text{CRB}_{(\text{PSK})}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{I}_{\text{PSK}}^{-1})_{([M+3 \ M+6],[M+3 \ M+6])} \quad (8)$$

où la FIM associée à une seule observation  $\mathbf{y}_t$  est donnée par :  $\frac{1}{T} (\mathbf{I}_{\text{PSK}})_{k,l} = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \sum_{t=1}^{T'} \left( \frac{\partial \ln p(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_k} \right) \left( \frac{\partial \ln p(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_l} \right)$ . Ces expressions nous permettent de déterminer le domaine de SNR pour lequel l'approximation (4) est valide.

## 4 Exemples numériques

Cette section illustre les résultats des sections 3.1 et 3.2. Nous considérons dans cette section une antenne ULA de  $M$  capteurs pour laquelle  $\mathbf{a}_k = (1, e^{i\theta_k}, \dots, e^{i(M-1)\theta_k})^T$ .

Fig.1 considère le cas d'une source BPSK ou QPSK. Elle compare différentes CRB normalisées (les CRB sont calculées pour  $T = 1$ ) pour  $M = 10$  et  $\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}) = \text{Diag}(\sigma_n^2(1+\delta_1), \sigma_n^2(1+\delta_2), \dots, \sigma_n^2(1+\delta_M))$  où  $\{\delta_i\}_{i=1}^M$  sont des v.a. IID de loi uniforme sur l'intervalle  $[0, \beta]$  et où le SNR est défini par le SNR "initial"  $10 \log_{10}(\frac{\sigma_{s1}^2}{\sigma_n^2})$  est égal à -10dB ou 0dB. Notons ainsi que pour  $\beta = 0$ , le bruit est uniforme, i.e.,  $\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_n^2 \mathbf{I}_M$  et que lorsque  $\beta$  augmente le bruit devient de plus en plus non uniforme. Nous remarquons sur cette figure que conformément aux résultats de la section 3.1 :

$$\text{CRB}_{\text{DET}}(\theta_1) < \text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1) < \text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1) < \text{CRB}_{\text{QPSK}}(\theta_1) < \text{CRB}_{\text{CG}}(\theta_1)$$

mais que la différence entre ces CRB s'accroît lorsque le bruit est de moins en moins uniforme.

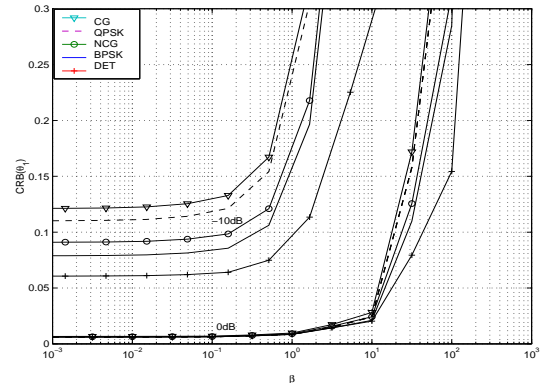


Fig.1 CRB normalisées en fonction de  $\beta$ .

Dans les trois figures suivantes, nous considérons deux sources BPSK de même puissance où le SNR est défini comme dans [1, 3] par  $\text{SNR} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{\sigma_{s1}^2}{\sigma_i^2}$  avec  $(\sigma_1^2, \dots, \sigma_{10}^2) = (10.0,$

2.0, 1.5, 0.5, 8.0, 0.7, 1.1, 3.0, 6.0, 3.0) pour  $M = 10$  et  $M = 6$ . Fig.2 compare  $\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1)$  donnée par (8) à  $\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1)$  sous distribution gaussienne non circulaire de taux de non circularité égal à 1. Et pour être comparées, cette dernière doit être considérée sous les mêmes connaissances a priori, c'est à dire ici en tenant compte de l'indépendance des deux sources. Pour cette raison, nous n'utilisons pas l'expression donnée dans [5], mais l'expression non explicite de la borne du second-ordre [8] étendue au cas de bruit blanc non uniforme qui permet de tenir compte de cet a priori. Cette figure exhibe le rapport  $\frac{\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1)}$ . Nous voyons que contrairement au cas d'une source,  $\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1)$  est très largement supérieure à  $\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1)$  sauf pour des grandes valeurs de séparation angulaire  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$  et d'écart de phase  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ . En conséquence, pour de tels signaux de modulation, des algorithmes asymptotiquement efficaces tels que des mises en oeuvre du maximum de vraisemblance (MV) auront des performances bien meilleures que celles issues d'algorithmes asymptotiquement efficaces sous distribution gaussienne. Il en est ainsi de l'algorithme EM (algorithme itératif qui implémente l'estimateur asymptotiquement efficace du MV), dont les performances n'ont été évaluées jusqu'ici que par simulations de Monte Carlo [11].

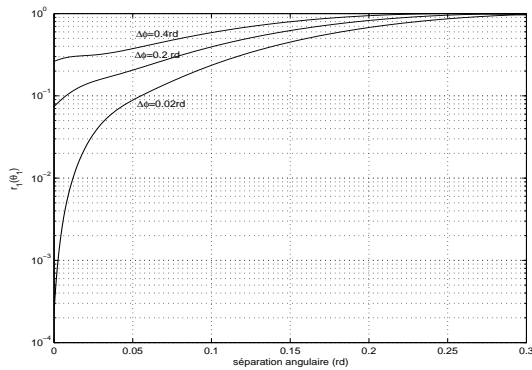


Fig.2 Rapports  $r_1(\theta_1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1)}$  en fonction de la séparation angulaire  $\Delta\theta$  pour plusieurs valeurs d'écart de phase  $\Delta\phi$ ,  $M = 10$  et  $\text{SNR} = 20\text{dB}$ .

Fig.3 exhibe le domaine de validité des valeurs analytiques de CRB obtenues à la section 3.2 pour des SNR élevés. Nous voyons sur cette figure que ce domaine de validité de SNR dépend non seulement du type de modulation mais aussi du nombre de capteurs et de la séparation angulaire  $\Delta\theta$ . Par exemple pour  $M = 10$ , le seuil de validité est de l'ordre de 4dB [resp 10dB] pour  $\Delta\theta = 0.03\text{rd}$  et 4dB [resp. 8dB] pour  $\Delta\theta = 0.1\text{rd}$  pour BPSK [resp. QPSK].

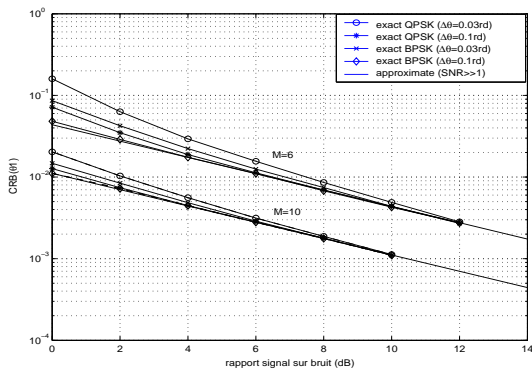


Fig.3 Valeurs exactes et approximées des  $\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1)$  et  $\text{CRB}_{\text{QPSK}}(\theta_1)$  en fonction du SNR pour deux valeurs de  $M$  et de la séparation angulaire  $\Delta\theta$  et  $\Delta\phi = 0.1\text{rd}$ .

Fig.4 compare l'erreur quadratique estimée  $E(\theta_{1,T} - \theta_1)^2$  donnée par l'algorithme EM aux expressions  $\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1)$  exactes et  $\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1)$  pour deux valeurs de séparation angulaire  $\Delta\theta$ . Nous constatons que les performances de l'algorithme EM sont largement supérieures à celles données par  $\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1)$  dans un très large domaine de SNR que dans le cas de faibles séparations angulaires.

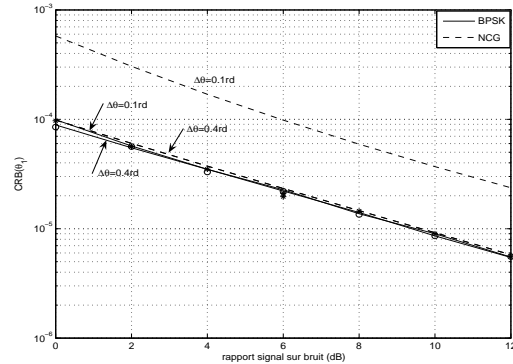


Fig.4  $\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1)$ ,  $\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1)$  et erreur quadratique estimée (1000 expériences de Monte Carlo)  $E(\theta_{1,T} - \theta_1)^2$  donnée par l'algorithme EM (10 itérations initialisé dans un voisinage des valeurs exactes) pour  $T = 500$ ,  $M = 6$  et  $\Delta\phi = 0.1\text{rd}$  en fonction du SNR.

## Références

- [1] J.P. Delmas, H. Abeida, "Cramer-Rao bounds of DOA estimates for BPSK and QPSK modulated signals," à paraître dans *IEEE Trans. on Signal Processing*, Janvier 2006.
- [2] A.L. Matveyev, A.B. Gershman and J.F. Böhme, "On the direction estimation Cramer-Rao bounds in the presence of uncorrelated unknown noise," *Circuits, Systems, Signal Processing*, vol. 18, pp. 479-487, 1999.
- [3] M. Pesavento, A.B. Gershman, "Maximum-likelihood direction of arrival estimation in the presence of unknown nonuniform noise," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, no. 7, pp. 1310-1324, July 2001.
- [4] H. Abeida, J.P. Delmas, "Cramer Rao bound for DOA estimation of BPSK, QPSK and MSK modulated signals in the presence of unknown nonuniform noise," en préparation.
- [5] H. Abeida, J.P. Delmas, "Gaussian Cramer-Rao bound for direction estimation of non-circular signals in unknown noise fields," à paraître dans *IEEE Trans. on Signal Processing*, Janvier 2006.
- [6] B. Ottersten, M. Viberg and T. Kailath, "Analysis of subspace fitting and ML techniques for parameter estimation from sensor array data," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 40, no. 3, pp. 590-600, March 1992.
- [7] P. Stoica, R. Moses, "Introduction to spectral analysis," *Prentice-Hall*, Upper Saddle River, NJ, 1997.
- [8] J.P. Delmas, "Asymptotically minimum variance second-order estimation for non-circular signals with application to DOA estimation," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 52, no. 5, pp. 1235-1241, May 2004.
- [9] S.T. Smith, "Statistical resolution limits and the complexified Cramer-Rao bound," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53, no. 5, pp. 1597-1609, May 2005.
- [10] M. Kaveh, A.J. Barabell, "The statistical performance of MUSIC and the minimum-norm algorithms in resolving plane waves in noise," *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. 34, no. 2, pp. 331-341, April 1986.
- [11] M. Lavielle, E. Moulines and J.F. Cardoso, "A maximum likelihood solution to DOA estimation for discrete sources," *Proc. Seventh IEEE Workshop on SP*, pp. 349-353, 1994.