

Diagonalisation de matrices polynômiales quaternioniques : application à la séparation de mélanges convolutifs d’ondes polarisées

Nicolas Le Bihan
Laboratoire des Images et des Signaux,
UMR 5083 CNRS,
ENSIEG, 961 Rue de la Houille Blanche,
BP 46, 38402 Saint Martin d’Hères Cedex, France
Nicolas.Le-Bihan@lis.inpg.fr

Résumé – L’utilisation des quaternions et des biquaternions permet une formulation simple et compacte des mélanges convolutifs de signaux polarisés. Une technique de séparation à l’ordre 2 des signaux est alors possible à l’aide d’une étape de diagonalisation d’une matrice polynômiale quaternionique. Nous présentons un algorithme de type Jacobi permettant cette diagonalisation et montrons les avantages de l’approche proposée vis-à-vis des techniques matricielles classiques de type *long-vecteur*. Particulièrement, l’approche quaternionique autorise une estimation des paramètres de polarisation plus robuste au bruit que les techniques *long-vecteur*.

Abstract – The use of quaternions and biquaternions allows a simple and compact formulation of convolutive mixtures of polarized signals. With this formulation, it is then possible to use a quaternion valued matrix polynomial diagonalization step to perform a second order separation of polarized signals. We introduce a new Jacobi like quaternionic algorithm for this purpose and show the advantages of the quaternionic approach over classical *long-vector* techniques. Polarization parameters estimation is more robust to noise using the quaternion approach than the *long-vector* approach.

1 Introduction

Nous nous intéressons au problème de la séparation à l’ordre 2 de mélanges convolutifs de signaux polarisés. De tels signaux sont classiquement rencontrés dans de nombreuses applications (sismologie, sismique, télécom, etc).

Après avoir traversé le milieu de propagation ces signaux sont enregistrés sur des capteurs vectoriels (n -uplets de capteurs directionnels co-localisés enregistrant les vibrations du champ d’ondes dans des directions différentes). Dans un souci d’identification ou d’interprétation, il peut être pertinent d’estimer la polarisation des signaux reçus. Également, la diversité de polarisation peut permettre de discriminer différentes sources dans un but de séparation des champs d’ondes reçus.

Afin de tenir compte de cette information, d’en tirer avantage dans la séparation et de permettre une estimation des paramètres de polarisation après séparation, nous proposons d’utiliser une modélisation *quaternionique* des signaux polarisés (également appelés *vectoriels*).

Dans le cas de mélanges convolutifs de tels signaux, ce modèle permet de proposer une méthode de séparation à l’ordre 2 par diagonalisation d’une matrice polynômiale quaternionique, extension directe des techniques de séparation connues dans le cas de signaux à échantillons réels ou complexes [1, 2, 3]. Le modèle quaternionique utilisé assure la prise en compte de la polarisation dans la séparation, ce qui a pour effet d’améliorer les performances. Nous proposons un algorithme de type Jacobi pour achever la diagonalisation de matrices

polynômiales quaternioniques. Nous montrons sur un exemple synthétique l’avantage de l’utilisation du modèle quaternionique vis à vis d’un traitement classique matriciel (arrangement des données sous forme *long-vecteur*).

2 Modèle quaternionique pour les signaux polarisés

Après une brève introduction sur les quaternions et les biquaternions (quaternions à coefficients complexes), nous présentons le modèle de signaux à valeurs quaternioniques en temps et fréquence.

2.1 Quaternions et biquaternions

Les quaternions sont une extension des complexes à l’espace 4D, découverts en 1843 par Sir W.R. Hamilton [4]. Les quaternions forment une algèbre sur \mathbb{R} , notée \mathbb{H} , et de base $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Un quaternion $q \in \mathbb{H}$ est composé d’une partie réelle et de trois parties imaginaires :

$$q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \quad (1)$$

avec $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ et les nombres imaginaires \mathbf{i}, \mathbf{j} et \mathbf{k} vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1, \\ \mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2)$$

Le conjugué de q est $\bar{q} = q_0 - q_1 \mathbf{i} - q_2 \mathbf{j} - q_3 \mathbf{k}$, sa norme est $|q|^2 = q\bar{q}$. Un quaternion dont la partie réelle est nulle est dit *pur*. \mathbb{H} est un corps non-commutatif, de sorte

que : $pq \neq qp$ en général pour $p, q \in \mathbb{H}$. Un certain nombre d'ouvrages traite des propriétés élémentaires des quaternions, voir par exemple [5].

Les *quaternions complexes* (ou *biquaternions*) ont été également introduits par Hamilton [6]. Un biquaternion $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ est défini comme :

$$Q = Q_0 + Q_1 \mathbf{i} + Q_2 \mathbf{j} + Q_3 \mathbf{k} \quad (3)$$

avec $Q_\alpha = Q'_\alpha + \mathbf{I}Q''_\alpha \in \mathbb{C}^{\mathbf{I}}$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) et $\mathbf{I}^2 = -1$. Les nombres \mathbf{i} , \mathbf{j} et \mathbf{k} suivent les mêmes règles que dans le cas des quaternions à coefficients réels (2). L'opérateur \mathbf{I} commute avec \mathbf{i} , \mathbf{j} et \mathbf{k} , et n'interagit pas avec eux :

$$\mathbf{i}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{i}, \mathbf{j}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{j}, \mathbf{k}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{k} \quad (4)$$

Nous ne détaillons pas ici l'étude des biquaternions, leurs propriétés sont décrites dans [5].

2.2 Signaux polarisés à valeurs sur \mathbb{H}

Suivant le modèle décrit dans [7], un signal à échantillons vectoriels enregistré sur un capteur vectoriel à trois composantes (c_1, c_2, c_3) peut être considéré comme un signal quaternionique pur, $x(n) \in \mathbb{H}^N$, donné comme :

$$x(n) = x_{c_1}(n)\mathbf{i} + x_{c_2}(n)\mathbf{j} + x_{c_3}(n)\mathbf{k} \quad (5)$$

où les trois signaux $x_{c_1}(n)$, $x_{c_2}(n)$ et $x_{c_3}(n)$ sont liés entre eux par des relations de phase et d'amplitude, *c.à.d.* de polarisation. La polarisation est ici supposée constante en temps et en fréquence.

Afin d'étudier les mélanges convolutifs de signaux polarisés, nous définissons une représentation en Z des signaux donnés en (5) basée sur les *biquaternions*.

Nous définissons la transformée en Z pour les signaux donnés en (5) comme suit. Soit un signal $x(n)$ à valeurs sur \mathbb{H} , alors sa transformée en Z , notée $x[z]$, est :

$$x[z] = x_{c_1}[z]\mathbf{i} + x_{c_2}[z]\mathbf{j} + x_{c_3}[z]\mathbf{k} \quad (6)$$

où les $x_{c_\alpha}[z]$ ($\alpha = 1, 2, 3$) sont les transformées en Z des signaux pris séparément, avec $z \in \mathbb{C}^{\mathbf{I}}$, *c.à.d.* $z = \Re(z) + \mathbf{I}\Im(z)$. La transformée en Z de $x(n)$ ainsi définie est donc à valeurs quaternioniques complexes, *c.à.d.* $x[z] \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^N$. Cette approche diffère de [8] où la TF Quaternionique est utilisée pour les signaux vectoriels.

Dans [8], la transformée \mathcal{F} opère sur des fonctions à valeurs dans \mathbb{H} tel que : $u \in \mathbb{H} \xrightarrow{\mathcal{F}} U \in \mathbb{H}$. Dans notre cas, la transformation \mathcal{F}' agit sur des signaux à valeurs sur \mathbb{H} et leur associe une représentation sur une algèbre de dimension deux fois plus grande : $u \in \mathbb{H} \xrightarrow{\mathcal{F}'} U \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.

3 Modèle de mélange convolutif

Considérons une antenne de capteurs vectoriels à trois composantes (c_1, c_2, c_3) recevant la contribution de plusieurs sources polarisées. Nous considérons que le mélange reçu est une superposition linéaire des échantillons retardés des sources. Dans le cas simple de deux capteurs/deux sources et en l'absence de bruit, le mélange s'écrit :

$$\begin{cases} x_1(n) = h_{11} * s_1(n) + h_{12} * s_2(n) \\ x_2(n) = h_{21} * s_1(n) + h_{22} * s_2(n) \end{cases} \quad (7)$$

où $x_\beta(n), h_{\beta\gamma}(n) \in \mathbb{H}^N$, $s_\beta(n) \in \mathbb{R}^N$ ($\beta, \gamma = 1, 2$), et $*$ représente la convolution appliquée séparément sur les composantes :

$$h * s(n) = (h * s_{c_1}(n)) \mathbf{i} + (h * s_{c_2}(n)) \mathbf{j} + (h * s_{c_3}(n)) \mathbf{k} \quad (8)$$

avec $h * s_{c_\alpha} = \sum_{p=0}^l h(p) * s_{c_\alpha}(n-p)$ et l la taille du filtre h . Les signaux sont considérés causaux. Les représentations polynômiales en z sont données par :

$$H[z] = \sum_{r=0}^l H(r)z^{-r}, x[z] = \sum_{r=0}^{\infty} x(r)z^{-r}, s[z] = \sum_{r=0}^{\infty} s(r)z^{-r} \quad (9)$$

où $z \in \mathbb{C}^{\mathbf{I}}$, $x[z]$ et $H[z]$ sont à valeurs biquaternioniques tandis que $s[z]$ est à valeurs complexes ($\mathbb{C}^{\mathbf{I}}$).

Ainsi, l'effet du canal de propagation (retards identiques pour toutes les composantes et termes d'atténuation éventuellement différents pour chaque composante en milieu anisotrope), se formalise sous forme matricielle, après transformée en Z , comme :

$$\mathbf{x}[z] = \begin{bmatrix} x_1[z] \\ x_2[z] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}[z] & H_{12}[z] \\ H_{21}[z] & H_{22}[z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[z] \\ s_2[z] \end{bmatrix} = \mathbf{H}[z]\mathbf{s}[z] \quad (10)$$

où $\mathbf{H}[z]$ est une matrice polynômiale quaternionique en z , *c.à.d.* un élément de $\mathbb{H}[z]^{2 \times 2}$. Les éléments $H_{ij}[z]$ sont donc des filtres RIF à coefficients sur \mathbb{H} . Les sources s_1 et s_2 sont supposées décorrélatées à tous les retards. Avant de proposer un algorithme permettant d'estimer les sources s_α , nous présentons quelques résultats sur les matrices polynômiales quaternioniques.

4 Matrices polynômiales quaternioniques

Les matrices polynômiales à coefficients réels et complexes ont été utilisées dans l'étude des systèmes MIMO, et particulièrement en identification de fonctions de transfert [9], séparation de mélanges convolutifs [2, 3] et en déconvolution [1, 10]. Le cas des matrices polynômiales quaternioniques n'a pas été traité dans la littérature. Nous présentons dans cet article quelques définitions concernant ces matrices.

Une matrice polynômiale quaternionique $\mathbf{A}[z] \in \mathbb{H}[z]^{N \times N}$ de degré p est donnée par :

$$\mathbf{A}[z] = \sum_{l=0}^{p-1} \mathbf{A}_l z^l = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 z + \mathbf{A}_2 z^2 + \dots + \mathbf{A}_{p-1} z^{p-1} \quad (11)$$

avec $\mathbf{A}_\alpha \in \mathbb{H}^{N \times N}$. Les \mathbf{A}_α commutent avec tout $z \in \mathbb{C}^{\mathbf{I}}$, de telle sorte que $\mathbf{A}_\alpha z^\beta = z^\beta \mathbf{A}_\alpha$, $\forall \alpha, \beta$. Les monômes de type $\mathbf{A}_\alpha z^\beta$ sont des éléments de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N \times M}$. Étant donnée une matrice $\mathbf{A}[z]$, sa para-conjuguée, notée $\tilde{\mathbf{A}}[z]$, est donnée par : $\tilde{\mathbf{A}}[z] = \mathbf{A}^\dagger[1/z]$ où l'opérateur \dagger représente la transposition-conjugaison quaternionique. Une matrice polynômiale quaternionique carrée $\mathbf{A}[z] \in \mathbb{H}[z]^{N \times N}$ est dite para-unitaire si $\mathbf{A}[z]\tilde{\mathbf{A}}[z] = \mathbf{I}$ et para-hermitienne si $\tilde{\mathbf{A}}[z] = \mathbf{A}[z]$.

5 Diagonalisation de matrices polynômiales quaternioniques

Nous décrivons à présent un algorithme de diagonalisation pour les matrices polynômiales quaternioniques para-hermitiennes. Notre algorithme est basé sur les transformations de Jacobi. Nous détaillons tout d'abord l'extension de ces transformations au cas quaternionique avant de détailler l'algorithme de diagonalisation pour les éléments de $\mathbb{H}[z]^{N \times N}$.

5.1 Transformations de Jacobi sur \mathbb{H}

Considérons tout d'abord le cas d'une matrice quaternionique hermitienne \mathbf{A} de $\mathbb{H}^{2 \times 2}$. La procédure de Jacobi consiste à trouver une matrice unitaire \mathbf{R} telle que :

$$\mathbf{R}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \bar{c} & s \\ -\bar{s} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -\bar{s} \\ s & \bar{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

avec $c, s, a_{11}, a_{22}, a_{12} \in \mathbb{H}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ et $a_{12} = \bar{a}_{21}$. Par calcul direct et en faisant les hypothèses classiques (connues dans le cas des transformations de Jacobi sur \mathbb{C} [11]), il vient que $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta \frac{a_{12}}{|a_{12}|}$. Les valeurs de c et s sont alors données par :

$$\tau = \frac{(a_{22} - a_{11})}{2|a_{12}|} \quad \mu = \frac{\text{sign}(\tau)}{|\tau| + \sqrt{1 + \tau^2}} \quad (13)$$

et :

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad s = c\mu \frac{a_{12}}{|a_{12}|} \quad (14)$$

La procédure de Jacobi ainsi présentée s'étend trivialement sur des matrices carrées de dimension supérieure 2. La convergence de la procédure se démontre également aisément par extension des démonstrations connues sur \mathbb{R} et \mathbb{C} .

5.2 Algorithme de diagonalisation

Nous cherchons à diagonaliser une matrice polynômiale quaternionique para-hermitienne $\mathbf{A}[z] \in \mathbb{H}[z]^{N \times N}$. Pour cela, il est possible d'utiliser une version quaternionique de l'algorithme présenté dans [3]. La matrice para-unitaire $\mathbf{Q}[z]$ permettant de diagonaliser $\mathbf{A}[z]$ est construite comme :

$$\mathbf{Q}[z] = \mathbf{R}_L \Delta^{d_L} \mathbf{R}_{L-1} \Delta^{d_{L-1}} \dots \mathbf{R}_1 \Delta^{d_1} \quad (15)$$

avec $\Delta^{d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{d_i} \end{bmatrix}$, $d_i \in \mathbb{Z}$ et $\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} c_i & -\bar{s}_i \\ s_i & \bar{c}_i \end{bmatrix}$. L est le nombre de matrices élémentaires nécessaires à la construction de la $\mathbf{Q}[z]$ et où d_i est choisi (pour chaque i) afin de maximiser la décorrélation à tous les retards [3]. L'algorithme est appliqué par bloc 2×2 sur toute la matrice, comme classiquement dans les algorithmes de Jacobi [11]. La diagonalisation est alors obtenue par :

$$\mathbf{Q}[z] \mathbf{A}[z] \tilde{\mathbf{Q}}[z] = \mathbf{\Sigma}[z] \quad (16)$$

où $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}[z]^{N \times N}$ (dans le cas où $\mathbf{A}[z]$ est para-hermitienne) est diagonale. Comme pour les matrices sur \mathbb{R} et \mathbb{C} , l'algorithme de type Jacobi permet une bonne estimation des termes diagonaux mais est très coûteux en temps de calcul.

6 Méthode de séparation

Afin de retrouver les sources polarisées du mélange donné en (10), nous proposons d'utiliser une technique basée sur l'algorithme de diagonalisation présenté en 5.2. Nous présentons le cas simple de $N = 2$ (2 sources/2 capteurs), qui se généralise naturellement à $N > 2$. Dans le cas de deux capteurs, les signaux $s_1(n)$ et $s_2(n)$ sont supposés décorrés à tous les retards possibles. En supposant que les espérances mathématiques sont estimées par moyennage temporel non-normalisé¹, on a :

$$\mathbb{E}[s_1(n) \bar{s}_2(n-k)] = \sum_{n=1}^N s_1(n) \bar{s}_2(n-k) = 0, \quad \forall k \quad (17)$$

Ceci autorise une notation vectorielle par la suite. La décorrélation à tous les retards donnée par (17) peut s'écrire dans le domaine en Z comme : $s_1[z] \bar{s}_2[1/z] = 0$. Ainsi, si les sources s_1 et s_2 sont décorrées à tous les retards, cela revient en termes de matrice polynômiale à :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{s}}[z] &= \mathbf{s}[z] \mathbf{s}[1/z] = \begin{bmatrix} s_1[z] \\ s_2[z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{s}_1[1/z] & \bar{s}_2[1/z] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1[z] & 0 \\ 0 & \sigma_2[z] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

Considérant la sortie $\mathbf{x}[z]$ des capteurs vectoriels du mélange donné en (10), l'étape de séparation proposée consiste à trouver une matrice para-unitaire $\mathbf{Q}[z] \in \mathbb{H}[z]^{2 \times 2}$ telle que $\mathbf{w}[z] = \mathbf{Q}[z] \mathbf{x}[z]$, vérifie :

$$\mathbf{w}[z] \tilde{\mathbf{w}}[z] = \mathbf{Q}[z] \mathbf{x}[z] \tilde{\mathbf{x}}[z] \tilde{\mathbf{Q}}[z] \approx \begin{bmatrix} \delta_1[z] & 0 \\ 0 & \delta_2[z] \end{bmatrix} \quad (19)$$

Estimer $\mathbf{w}[z]$ revient donc à diagonaliser une matrice polynômiale quaternionique ($\Gamma_{\mathbf{x}}[z] = \mathbf{x}[z] \tilde{\mathbf{x}}[1/z]$). Les termes de $\mathbf{w}[z] = \mathbf{Q}[z] \mathbf{x}[z]$ sont les estimées des sources, à plusieurs indéterminées (classiques) près : amplitude (signe), phase, retard, mais aussi rotation de la figure de polarisation. Cette dernière indétermination est due aux classes d'équivalence entre les signaux à valeurs sur \mathbb{H} . En effet, pour tout $s(n) \in \mathbb{H}^N$, le signal $s_q(n) = qs(n)q^{-1}$, avec $q \in \mathbb{H}$ lui est *équivalent* (voir [12] pour plus de détails).

7 Résultats

Nous nous plaçons dans un cas simple afin d'illustrer l'intérêt de la technique proposée vis à vis des techniques *long-vecteur*² et *composante par composante*³. Nous présentons un exemple sur données sismiques synthétiques : une onde plane polarisée elliptiquement enregistrée sur un réseau de cinq capteurs vectoriels à trois composantes (c_1, c_2, c_3) additionnée à du bruit (Gaussien, Blanc et non polarisé). La polarisation elliptique engendre que les signaux sur c_2 et c_3 sont des versions *amplifiées* et *déphasées* de celui enregistré sur c_1 . Les trois composantes du signal

¹Cette hypothèse s'avère utile quand une seule réalisation des sources est disponible, comme par exemple en sismique/sismologie.

²Le traitement est effectué sur un grand vecteur formé par la concaténation des composantes : $\mathbf{x}_{lv} = [\mathbf{x}_{c_1}^T \mathbf{x}_{c_2}^T \mathbf{x}_{c_3}^T]^T$

³Le traitement est effectué sur c_1, c_2 et c_3 séparément

source sont présentées sur la figure 1. Nous présentons les résultats des trois approches : 1) Q, quaternionique (algo. de la section 6); 2) Lv, long-vecteur $\mathbf{x}_{lv} = [\mathbf{x}_{c_1}^T \mathbf{x}_{c_2}^T \mathbf{x}_{c_3}^T]^T$; 3) CpC, c_1 , c_2 et c_3 traitées séparément. Dans les cas CpC et Lv, l'algorithme utilisé (pour des signaux à valeurs réelles) est celui donné dans [3]. Les résultats de séparation sont présentés pour un RSB⁴ de -15 dB sur la figure 2.

L'intérêt de l'approche Q par rapport à CpC se conçoit aisément, car CpC n'utilise pas la redondance du signal sur les trois composantes. Q et Lv ont des résultats de séparation à peu près équivalents en terme de résistance au bruit, mais l'avantage de Q vient du fait qu'il permet une estimation de la polarisation, alors que Lv ne le permet pas (les trois composantes sont vues comme une seule et même source dans le mélange mis sous forme de grande matrice et l'information polarisation ne peut être récupérée, ce qui n'autorise pas à tracer une figure de Lissajou). Ceci montre l'intérêt d'utiliser l'approche quaternionique plutôt que long-vecteur dans l'optique d'une estimation des paramètres de polarisation après la séparation.

8 Conclusion

Nous avons proposé de modéliser les mélanges convolutifs de signaux polarisés à l'aide de matrices polynômiales quaternioniques. Dans le cas de sources décorréelées, un algorithme de diagonalisation de telles matrices permet une estimation des sources et permet d'envisager une estimation de la polarisation. Une étude plus détaillée des performances de la méthode proposée reste à faire, entre autres pour caractériser la qualité d'estimation de la polarisation après la séparation proposée. Également, une étude systématique des propriétés des matrices polynômiales sur \mathbb{H} reste à être menée.

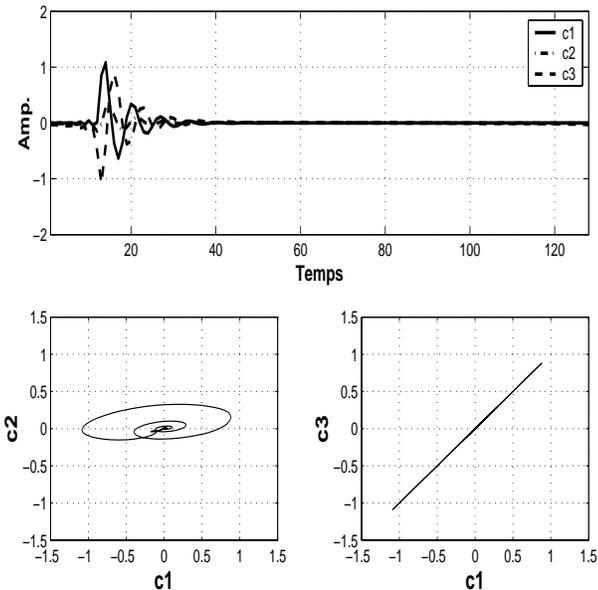


FIG. 1: Signal source polarisé et figures de Lissajou

⁴Le RSB est calculé sur une fenêtre temporelle (de taille N_T) où le signal est non-nul et vaut : $SNR = 10 \log \left(\frac{\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{n=1}^{N_T} |x_{c_\alpha}(n)|^2}{\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{n=1}^{N_T} |x_{c_\alpha}(n)|^2} \right)$

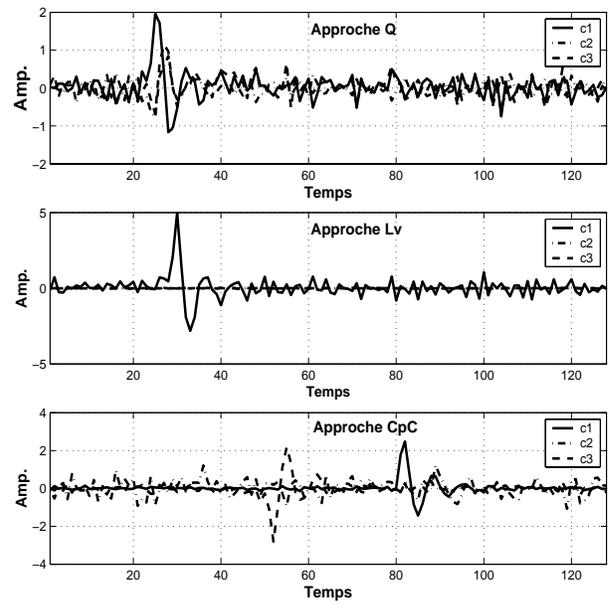


FIG. 2: Sources estimées par les méthodes Q, Lv et CpC

References

- [1] R. Lambert and C. Nikias. Polynomial matrix whitening and application to the blind deconvolution problem. MILCOM Conference on Military Communications, San Diego, 1995.
- [2] P. Comon and L. Rota. Blind separation of independent sources from convolutive mixtures. *IEICE Trans. fundamentals*, E86-A(3), 2003.
- [3] J.G. McWhirter and P.D. Baxter. A novel technique for broadband SVD. Proceedings of the 12th ASAP Workshop, MIT, 2004.
- [4] W.R. Hamilton. On quaternions. *Proceeding of the Royal Irish Academy*, 1843.
- [5] J.P. Ward. *Quaternions and Cayley Numbers, Algebra and applications*. Kluwer Academic, 1997.
- [6] W.R. Hamilton. On the geometrical interpretation of some results obtained by calculation with biquaternions. *Proceeding of the Royal Irish Academy*, V:388–390, 1853.
- [7] N. Le Bihan and J. Mars. Singular value decomposition of quaternion matrices: A new tool for vector-sensor signal processing. *Signal Processing*, 84(7):1177–1199, 2004.
- [8] S.J. Sangwine. Fourier transforms of colour images using quaternions, or hypercomplex, numbers. *Electronics letters*, 32(21):1979–1980, 1996.
- [9] K. Abed-Meraim, P. Loubaton, and E. Moulines. A subspace algorithm for certain blind identification problems. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 43(2):499–511, 1997.
- [10] P. Comon and E. Moreau. Blind MIMO equalization and joint-diagonalization criteria. International conference on Acoust. Speech and Signal Processing (ICASSP), Salt Lake City, 2001.
- [11] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins, 1989.
- [12] L.H. Zetterberg and H. Brändström. Codes for combined phase and amplitude modulated signals in a four-dimensional space. *IEEE Trans. on Communications*, COM-25(9), 1977.