

Une méthode de sous-espace pour l'extraction aveugle d'une source cyclostationnaire

Roger BOUSTANY, Jérôme ANTONI

Université de Technologie de Compiègne
Centre de Recherche de Royallieu, BP 20529, 60205 Compiègne Cedex, France
roger.boustany@utc.fr, jerome.antonio@utc.fr

Résumé – Le besoin de séparer des mélanges de signaux apparaît dans beaucoup d'applications du traitement du signal. La solution à ce problème réside dans les techniques émergentes de la séparation aveugle de sources (SAS) qui se fondent généralement sur la connaissance du nombre de sources statistiquement indépendantes dans le mélange. Cette communication traite le cas où le nombre de sources est inconnu et l'indépendance statistique n'est pas forcément satisfaite, mais où il n'y a qu'un seul signal d'intérêt (SI) cyclostationnaire à extraire. La méthode proposée exploite la cyclostationnarité de ce SI par une décomposition en sous-espaces des signaux observés via ses statistiques cycliques d'ordre 2. Cette approche est d'abord développée pour les mélanges instantanés et est ensuite étendue au cas convolutif dans le domaine fréquentiel où le problème des permutations ne se pose pas comme c'est le cas pour la SAS classique. Des expériences sur des signaux ECG et industriels sont finalement effectuées et illustrent la bonne performance de la méthode proposée.

Abstract – The need for blindly separating mixtures of source signals arises in many signal processing applications. The solution to this problem was found using emerging blind source separation (BSS) techniques which usually rely on the knowledge of the number of statistically independent sources present in the mixture. This paper deals with the case where the number of sources is unknown and the statistical independence may not apply, but where there is only one cyclostationary signal of interest (SOI) to be separated. A method for extracting this SOI by exploiting its cyclostationarity through a subspace decomposition of the observations is proposed. It is first developed for instantaneous mixtures and is then extended to the convolutive case in the frequency domain where it does not suffer from the permutation problem as does classical BSS. Experiments on ECG and industrial data are finally performed and illustrate the high performance of the proposed method.

1 Introduction

Dans de nombreux domaines du traitement du signal, l'expérimentateur doit faire face au problème de la séparation de sources présentes dans un mélange. Au cours de ces dernières années, plusieurs méthodes de séparation aveugle se basant sur l'indépendance statistique des sources ont été mises en oeuvre. Pour approcher l'indépendance statistique des sources recherchées, elles profitent habituellement d'hypothèses supplémentaires sur la nature des signaux, telles que leur non-gaussiannité [1], leur non-blancher [2] ou leur non-stationnarité — et plus particulièrement leur cyclostationnarité [3], [4], [5].

La séparation aveugle de sources (SAS) consiste à retrouver m sources inconnues $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), \dots, s_m(t))^T$ à partir des mesures de n signaux de mélange ou *observations* $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, $t \in \mathbb{R}$. Suivant l'application, le modèle du mélange est soit instantané

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (1)$$

soit convolutif

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}(t) * \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (2)$$

où $*$ est le produit de convolution, \mathbf{A} et $\mathbf{H}(t)$ représentent respectivement des matrices de rang plein de «scalaires» a_{ji} et de «filtres linéaires» $h_{ji}(t)$ modélisant le transfert de la source i au capteur j et où $\mathbf{n}(t)$ est un bruit additif décorrélé avec les sources. Cependant, dans de nombreuses situations, le nombre de sources est inconnu et supérieur au nombre de capteurs.

Deux conditions nécessaires à la plupart des algorithmes classiques pour réaliser la séparation se trouvent donc mises à défaut. Par ailleurs, l'indépendance statistique mutuelle des sources est une condition restrictive qui n'est pas souvent respectée dans les applications réelles, telles que celles impliquant des signaux industriels. L'objectif de cette communication est de proposer une approche se substituant à la SAS classique dans le but d'extraire la contribution sur les capteurs¹ d'un signal d'intérêt (SI) cyclostationnaire — désigné par $s_1(t)$ — noyé dans un nombre inconnu de signaux non-désirés. Ceux-ci sont de deux types :

- les signaux non-désirés spatialement cohérents donnés par les contributions $\{\sum_{i=2}^m h_{ji}(t)s_i(t)\}_{j=1}^n$ et désignés par *interférences*.
- les signaux non-désirés spatialement non-cohérents donnés par les contributions $\{n_j(t)\}_{j=1}^n$ et simplement désignés par *bruits*.

L'approche proposée exploite la cyclostationnarité du SI par une décomposition en sous-espace des observations. Par opposition aux algorithmes SCORE [6], la méthode «SUBLEX» présentée dans le paragraphe 3 permet facilement l'utilisation de plusieurs fréquences cycliques pour améliorer l'estimation du SI. De plus, elle ne nécessite la détermination que de la moitié du nombre d'inconnus de SCORE. Une extension de la méthode aux mélanges convolutifs est également présentée pour couvrir une plus large étendue d'applications. Les expériences

¹La contribution d'une source sur un capteur est le signal enregistré quand uniquement cette source est active

du paragraphe 4 sur des signaux ECG et sur des signaux industriels illustrent la bonne performance de SUBLEX. Le paragraphe 2 passe en revue brièvement les fondements de la cyclostationnarité à l'ordre 2.

2 Les signaux cyclostationnaires et leurs descripteurs d'ordre 2

Dans ce qui suit, tous les signaux sont supposés à puissance finie et stochastiques. Un signal (presque-)cyclostationnaire au second ordre $s(t)$ avec des fréquences cycliques $\alpha_i \in \mathcal{A}$ est tel que sa fonction d'auto-corrélation est (presque-)périodique et admet par conséquent un développement en série de Fourier

$$\begin{aligned} R_s(t, \tau) &= \mathbb{E}\{s(t)s^*(t-\tau)\} \\ &= \sum_{\alpha_i \in \mathcal{A}} R_s^{\alpha_i}(\tau) e^{j2\pi\alpha_i t}, \end{aligned} \quad (3)$$

où la fonction d'auto-corrélation cyclique $R_s^{\alpha_i}(\tau)$ est identiquement non-nulle sur l'ensemble \mathcal{A} .

La corrélation spectrale définie par la double transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation par rapport à t et τ

$$S_s(\alpha, f) = \int \int R_s(t, \tau) e^{-j2\pi\alpha t} e^{-j2\pi f \tau} dt d\tau \quad (4)$$

devient en y insérant l'éq.(3)

$$S_s(\alpha, f) = \sum_{\alpha_i \in \mathcal{A}} S_s^{\alpha_i}(f) \delta(\alpha - \alpha_i), \quad (5)$$

ce qui veut dire que la «puissance» d'un signal cyclostationnaire est distribuée suivant des lignes spectrales parallèles à l'axe de f et positionnées aux fréquences cycliques $\alpha = \alpha_i$. La quantité spectrale $S_s^{\alpha_i}(f)$ est connue sous le nom de spectre de puissance cyclique et sera utilisée dans la méthode SUBLEX relative aux mélanges convolutifs. L'approche SUBLEX des mélanges instantanés décrite ci-après n'utilise pour l'instant que la fonction d'auto-corrélation cyclique.

3 La méthode SUBLEX

3.1 Principes

Le modèle du mélange bruité décrit par (1) est d'abord considéré. Comme indiqué auparavant, le SI résulte d'une seule source cyclostationnaire avec une fréquence cyclique α non partagée avec les interférences et le bruit — ces derniers étant supposés donc soit stationnaires soit cyclostationnaires avec des fréquences cycliques différentes. La matrice de corrélation cyclique des observations est :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x^\alpha(\tau) &= \langle \mathbb{E}\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t-\tau)\} e^{-j2\pi\alpha t} \rangle \\ &= \mathbf{A} \mathbf{R}_s^\alpha(\tau) \mathbf{A}^H, \end{aligned} \quad (6)$$

avec $\langle \langle \dots \rangle \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_{-T/2}^{T/2} (\dots) dt$. C'est une matrice de rang 1 car $\mathbf{R}_s^\alpha(\tau)$ ne possède qu'un seul élément non-nul situé sur sa diagonale et ceci est vrai indépendamment du bruit $\mathbf{n}(t)$. Par conséquent,

$$\mathbf{R}_x^\alpha(\tau) = R_{s_1}^\alpha(\tau) \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H, \quad (7)$$

où $R_{s_1}^\alpha(\tau)$ est la fonction d'auto-corrélation cyclique du SI $s_1(t)$ et \mathbf{a}_1 est la colonne correspondante de la matrice \mathbf{A} . Par suite, la décomposition en valeurs propres de la matrice $\mathbf{R}_x^\alpha(\tau) \mathbf{R}_x^\alpha(\tau)^H$ permet d'obtenir la colonne \mathbf{a}_1 de \mathbf{A} à un coefficient près, mais sans que ceci soit suffisant pour séparer les sources. Pour extraire le SI, un sous-espace complémentaire \mathcal{B} engendré par la base des vecteurs \mathbf{B} orthogonale à \mathbf{a}_1 est construit tel que

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{B}^H \mathbf{x}(t) \quad (8)$$

est un vecteur de dimension $(n-1)$ dont les éléments orthogonaux entre eux et avec $s_1(t)$ sont des références sur les interférences. La matrice \mathbf{B} de dimension $n \times (n-1)$ est par exemple déterminée à l'aide de la décomposition QR .

Les contributions des interférences sur les capteurs dénotées par $\mathbf{x}_{.s_1}(t)$ sont ensuite estimées par moindres carrés :

$$\widehat{\mathbf{x}}_{.s_1}(t) = \mathbf{C} \mathbf{r}(t), \quad (9)$$

où

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}_{x_r}^0(0) \mathbf{R}_r^0(0)^+, \quad (10)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{x_r}^0(0) &= \langle \mathbb{E}\{\mathbf{x}(t)\mathbf{r}^H(t)\} \rangle, \\ \mathbf{R}_r^0(0) &= \langle \mathbb{E}\{\mathbf{r}(t)\mathbf{r}^H(t)\} \rangle, \end{aligned}$$

et $^+$ dénote la pseudo-inverse. Les contributions du SI $\widehat{\mathbf{x}}_{/s_1}(t)$ sont finalement extraites des signaux capteurs par :

$$\widehat{\mathbf{x}}_{/s_1}(t) = \mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}_{.s_1}(t).$$

3.2 Évaluation dans le cas non-bruité

SUBLEX est conçue pour remplacer la SAS dans le cas des mélanges bruités, quand il n'y a qu'un seul SI cyclostationnaire avec une fréquence cyclique α et un nombre inconnu de sources interférentes. Reste à démontrer que SUBLEX sépare le SI aussi bien que la SAS dans le cas non-bruité et en considérant alors — sans perte de généralité — que $\mathbb{E}\{s(t)s(t)^H\} = \mathbf{I}$. En effet, soit

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Omega} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} & \mathbf{B} \end{array} \right) \mathbf{\Omega} \quad (11)$$

la décomposition QR qui a permis d'avoir \mathbf{B} de (8), $\mathbf{\Omega}$ étant une matrice triangulaire supérieure de dimension $n \times m$. En insérant (11) dans (8), il résulte $\mathbf{r}(t) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_{22} \end{array} \right) \mathbf{s}(t)$, avec $\mathbf{\Omega}_{22}$ la matric bloc de dimension $(n-1) \times (m-1)$ extraite de $\mathbf{\Omega}$, telle que $\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_{22} \end{pmatrix}$. Ceci implique après quelques manipulations : $\mathbf{C} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T \\ \mathbf{\Omega}_{22}^+ \end{pmatrix}$ où $\mathbf{\Omega}_{22}^+ = \mathbf{\Omega}_{22}^H (\mathbf{\Omega}_{22} \mathbf{\Omega}_{22}^H)^+$ est la pseudo-inverse de $\mathbf{\Omega}_{22}$. Finalement, remplaçant \mathbf{C} dans (11) par son expression, il résulte

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x}}_{/s_1}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{s}(t) - \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T \\ \mathbf{\Omega}_{22}^+ \end{pmatrix} \mathbf{B}^H \mathbf{Q} \mathbf{\Omega} \mathbf{s}(t) \\ &= \mathbf{A} \mathbf{s}(t) - \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{s}(t) \\ &= \mathbf{A} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

à condition que $\mathbf{\Omega}_{22}^+ \mathbf{\Omega}_{22} = \mathbf{I}$, c'est-à-dire que $\mathbf{\Omega}_{22}^+$ est l'inverse à gauche de $\mathbf{\Omega}_{22}$ ou bien $n \geq m$. Dans ce cas et en absence de

bruit, l'erreur sur $\widehat{\mathbf{x}}_{/s_1}(t)$ est nulle. Dans tous les autres cas — incluant les cas où les sources du mélange ne sont pas mutuellement indépendantes — la méthode fournit le meilleur résultat possible au sens des moindres carrés, au contraire de la SAS classique.

3.3 Considérations pratiques

En pratique, les signaux mesurés ont une taille finie et en conséquence les statistiques sont empiriques. La matrice empirique $\widehat{\mathbf{R}}_x^\alpha(\tau)$ peut être de rang supérieur à 1 ce qui implique une mauvaise estimation de \mathbf{a}_1 . Pour remédier à ce problème, la méthode est (i) appliquée sur les observations blanchies $\widetilde{\mathbf{x}}$ et (ii) une diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices hermitiennes $\widehat{\mathbf{R}}_x^\alpha(\tau)\widehat{\mathbf{R}}_x^\alpha(\tau)^H$ indexées par différentes valeurs de α prises dans un ensemble fini $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ et de τ , est effectuée pour extraire de manière plus robuste le vecteur \mathbf{a}_1 .

3.4 Extension au cas des mélanges convolutifs

Le modèle convolutif décrit par (2) s'écrit dans le domaine fréquentiel, en termes d'incrément spectraux :

$$d\mathbf{X}(f) = \mathbf{H}(f)d\mathbf{S}(f) + d\mathbf{N}(f). \quad (13)$$

La méthode SUBLEX est ensuite appliquée en utilisant la matrice spectrale cyclique $\mathbf{S}_x^\alpha(f)$ au lieu de la matrice de corrélation cyclique $\mathbf{R}_x^\alpha(\tau)$. En pratique, un pré-blanchiment des observations et une diagonalisation conjointe de $\widehat{\mathbf{S}}_x^\alpha(f)\widehat{\mathbf{S}}_x^\alpha(f)^H$ sur $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ sont exécutés pour assurer une estimation plus robuste du vecteur $\mathbf{a}_1(f)$ de $\mathbf{H}(f)$. Il faut remarquer que contrairement à la SAS classique, cette méthode ne présente pas de problème de permutation puisqu'un seul SI est reconstruit.

4 Applications

La première application illustre l'utilisation de la version «instantanée» de SUBLEX pour l'extraction de l'électrocardiogramme d'un fœtus — un signal contenant des informations importantes sur la santé du fœtus — à partir des mesures prises sur l'abdomen de la mère. Les signaux sont constitués de 8 enregistrements de 2500 points échantillonnés à $f_s = 500\text{Hz}$ [7]. Afin de déterminer la fréquence cyclique α du SI généré par le fœtus, la corrélation spectrale décrite par (5) a été calculée sur l'un des signaux de mesures. La figure (1) montre une cyclostationnarité importante à la fréquence cyclique $\alpha = 8.8 \times 10^{-3} f_s$ et ses harmoniques. En examinant la corrélation spectrale d'un enregistrement provenant d'une électrode placée sur le thorax de la mère, la fréquence cyclique $\alpha = 8.8 \times 10^{-3} f_s$ n'existe pas, ce qui veut dire que cette fréquence cyclique peut être attribuée à l'activité électrique du fœtus. La méthode SUBLEX a ensuite été appliquée sur 3 mesures abdominales en considérant $N_\alpha = 9$ fréquences cycliques pour l'estimation de \mathbf{a}_1 . Les résultats de la figure (2) illustrent la bonne performance de la méthode.

La deuxième application concerne des mesures prises sur un système mécanique comprenant un étage d'engrenages avec un rapport de réduction de 32 : 49, une vitesse d'entrée $f_r = 3\text{Hz}$

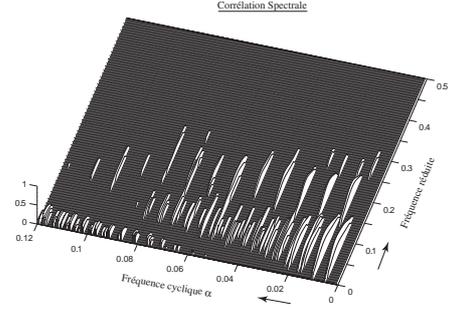


FIG. 1 – Corrélation spectrale d'un signal ECG (estimée avec une fenêtre demi-sinus de 32 points et 75% de recouvrement) montrant la fréquence cyclique foetale à $\alpha = 8.8 \times 10^{-3} f_s$. Le signal est pré-blanchi et uniquement les valeurs au-dessus d'un niveau de signification de 5% sont affichées.

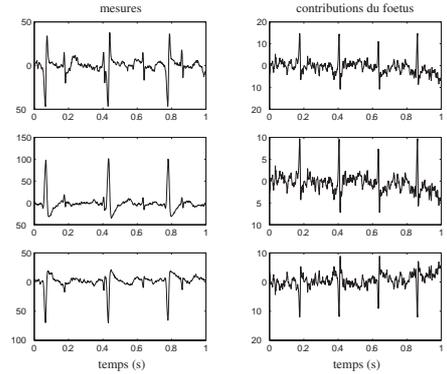


FIG. 2 – Extraction de l'électrocardiogramme foetal à partir de 3 enregistrements.

et un couple de 60N.m. L'axe moteur est supporté par un roulement à billes à deux rangées dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Diamètre de la bague externe = 44.85mm
- Diamètre de la bague interne = 32.17mm
- Diamètre d'une bille $B_d = 7.12\text{mm}$
- Nombre de billes $N_b = 12/\text{rangée}$.

Ce roulement présente un défaut localisé sur la bague interne. L'objectif est d'extraire la contribution des vibrations générées par le passage des billes sur ce défaut [8]. La fréquence théorique de passage d'une bille sur un défaut de bague interne est donnée par la formule [9] :

$$BPF I = \frac{f_r N_b}{2} \left(1 + \frac{B_d}{P_d} \cos \theta \right) \approx 22.39\text{Hz}, \quad (14)$$

où P_d et θ représentent respectivement le diamètre primitif et l'angle de contact du roulement. Les signaux étudiés ont une taille de 100000 points échantillonnés à $f_s = 16384\text{Hz}$. la corrélation spectrale de l'une des mesures (fig. 3) permet de déterminer de manière plus précise la fréquence cyclique du défaut. Une forte cyclostationnarité à $\alpha = 1.36 \times 10^{-3} f_s = 22.28\text{Hz}$ et ses harmoniques confirme la valeur théorique de (14). L'extension de la méthode SUBLEX aux mélanges convolutifs a ensuite été appliquée avec $\alpha = 1.36 \times 10^{-3} f_s$ et $N_\alpha = 5$. La première colonne de la figure (4) présente les signaux de mesure, et la deuxième colonne les contributions du défaut extraites par SUBLEX. Un zoom sur quelques cycles présenté sur la figure (5) illustre la très bonne extraction des chocs dus au défaut en présence d'interférences comme celles dues à l'engrène-

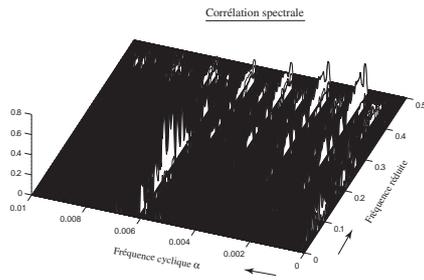


FIG. 3 – Corrélation spectrale d’un signal industriel (estimée avec une fenêtre demi-sinus de 256 points et 75% de recouvrement) montrant la fréquence cyclique d’un défaut de bague interne à $\alpha = 1.36 \times 10^{-3} f_s$. Le signal est pré-blanchi et uniquement les valeurs au-dessus d’un niveau de signification de 5% sont affichées.

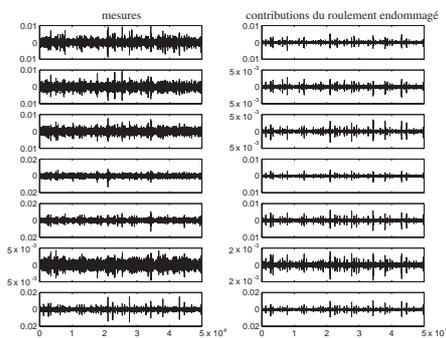


FIG. 4 – Extraction de la signature du défaut de roulement.

ment des pignons, et dans un bruit de fond considérable. Les spectres d’amplitude des enveloppes des signaux de mélange avant et après SUBLEX sont représentés à la figure (6). Avant SUBLEX, ils révèlent la dominance de la fréquence d’engrènement des pignons f_g et de ses harmoniques correspondants au fonctionnement normal du système, lesquels fortement masquent la signature du défaut de roulement. Après SUBLEX, cette fréquence f_g et ses harmoniques sont éliminés du signal extrait dont l’enveloppe ne contient plus que la fréquence $BPFI$ et ses harmoniques modulés par la fréquence de rotation f_r comme prévu par la théorie pour un défaut de bague interne [9].

5 Conclusion

Une méthode SUBLEX de sous-espace a été présentée pour l’extraction d’une source cyclostationnaire mélangées avec un nombre *inconnu* de sources interférentes — une situation que la SAS classique aborde avec difficulté. L’approche proposée réalise une *parfaite* séparation du SI en absence de bruit si le nombre de capteurs est supérieur ou égal au nombre de sources. Dans les autres cas, elle garantit un débruitage significatif. Une extension de la méthode au cas des mélanges convolutifs a été également présentée dans le but de couvrir une plus large étendue d’applications. La version «instantanée» de SUBLEX a ensuite été illustrée sur des signaux ECG pour en extraire l’électrocardiogramme foetal, et sa version fréquentielle sur des signaux industriels pour en extraire la signature d’un défaut de roulement noyé dans un mélange convolutif complexe.

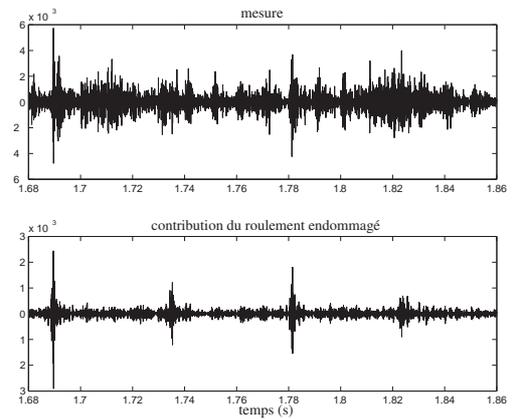


FIG. 5 – Zoom sur quelques cycles révélant la présence de chocs caractérisant un défaut localisé de roulement à billes.

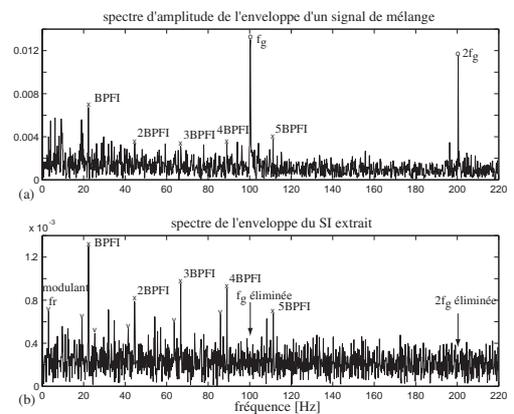


FIG. 6 – Spectres d’amplitude des enveloppes (a) d’un signal de mesure et (b) de la contribution du roulement endommagé extraite après application de SUBLEX.

Références

- [1] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, “Blind beamforming for non gaussian signals,” in *IEE Proceedings-F*, vol. 140, pp. 362–370, Dec. 1993.
- [2] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, J.-F. Cardoso and E. Moulines, “A blind source separation technique using second order statistics,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, no. 2, pp. 434–444, Feb. 1997.
- [3] K. Abed-Meraim, Y. Xiang and Y. Hua, “Blind source separation using second-order cyclostationary statistics,” in *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, no. 4, pp. 694–701, Apr. 2001.
- [4] A. Ferréol and P. Chevalier, “On the behavior of current second and higher order blind source separation methods for cyclostationary sources,” in *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 48, no. 6, pp. 1712–1725, Jun. 2000.
- [5] J. Antoni, F. Guillet, M. ElBadaoui and F. Bonnardot, “Blind separation of convolved cyclostationary processes,” in *Signal Processing*, 85, pp.51–66, 2005.
- [6] B.G. Agee, S.V. Schell and W.A. Gardner, “Spectral self-coherence restoral : A new approach to blind adaptive signal extraction using antenna arrays,” in *Proceedings of the IEEE*, vol. 78, no. 4, pp. 753–767, Apr. 1990.
- [7] J.-F. Cardoso, “Multidimensional independent component analysis,” in *Proc. ICASSP’98*, Seattle, USA, May. 12-15. 1998, pp. 1941–1944.
- [8] R. B. Randall, J. Antoni, S. Chhobsaard, “The Relationship between Spectral Correlation and Envelope Analysis for Cyclostationary Machine Signals. Application to Ball Bearing Diagnostics,” in *Mechanical Systems and System Processing*, vol. 15, no. 5, pp. 945–962, 2001.
- [9] S. Braun, “Mechanical signature analysis : theory and applications”, Academic Press, 1986.