

Synthèse de la notion de facteur de crête et application aux modulations monoporteuse

Yves LOUËT, Jacques PALICOT

IETR - SUPELEC, Campus de RENNES

Équipe SCEE (Signal, Communications, Électronique Embarquée)
Avenue de la Boulaie, BP 81127 35511 CESSON SEVIGNE - France

Yves.Louet@rennes.supelec.fr, Jacques.Palicot@rennes.supelec.fr

Résumé – Les modulations à enveloppes non constantes présentent l’inconvénient d’être sensibles aux non linéarités (principalement de l’amplificateur de puissance) du fait d’importantes fluctuations du signal modulé. Pour quantifier ces fluctuations, on définit le ” facteur de crête ”, rapport de la puissance instantanée maximale et moyenne du signal en question. Ce facteur de crête est cependant décliné dans la littérature sous différentes appellations comme CF pour Crest Factor, PAPR pour Peak to Average Power Ratio ou encore PMEPR pour Peak to Mean Envelope Power. De plus, les signaux peuvent prendre des formes différentes (continue ou échantillonnée), être observés sur des durées différentes ou être traités à des niveaux différents (en bande de base ou en radio fréquence).

Devant cette multiplicité, nous établissons dans un premier temps une définition générique du facteur de crête, le PR pour Power Ratio synthétisant les définitions existantes. Ensuite, nous proposons une étude théorique du PR en modulations monoporteuse en fonction du facteur de suréchantillonnage, puis du facteur de retombée d’un filtre de Nyquist. Des résultats de simulations sont présentés en modulations QPSK et MAQ 16.

Abstract – In the past few years, many research activities have concerned the Peak to Average Power Ratio (PAPR) especially in an Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) context. Nevertheless, we have noticed that the PAPR definition is not always the same from one author to the other, depending on the paper context which leads to confusions and bad interpretations. That’s why we propose in this article to generalize the PAPR definition by introducing the Power Ratio (PR) parameter from which we can derive all the possible PAPR versions. Then, we propose a theoretical analysis of the PR vs oversampling and the roll off factor in single carrier modulation when a Nyquist filter is considered. We give an upper bound of the PR and simulations for QPSK and 16QAM modulations.

1 Introduction

L’amplificateur de puissance est un des éléments clés d’un système de télécommunications, tout spécialement dans des contextes radiomobiles. Le rendement des amplificateurs est cependant faible (de l’ordre de 50%), leurs caractéristiques ne sont pas linéaires et une partie non négligeable (environ 60% dans le cas d’un terminal 2.5G) de la consommation est attribuée à l’amplificateur de puissance. Ainsi, l’utilisation de modulations à enveloppes constantes telles que la GMSK pour le GSM se justifie, optimisant ainsi l’efficacité de la fonction d’amplification en se plaçant au point de saturation, évitant ainsi tout traitement de non linéarités. Pour autant, la plupart des modulations standardisées aujourd’hui ne sont pas à enveloppes constantes, qu’elles soient mono ou multi porteuses et les conséquences d’une amplification de puissance non linéaire du signal radio fréquence doivent être examinées avec la plus grande attention.

Le facteur de crête est un paramètre défini comme le rapport entre la puissance instantanée et moyenne d’un signal donné et permettant de dimensionner ce dernier vis à vis de l’amplificateur de puissance (et vice versa). Ce paramètre apparaît dans la littérature sous plusieurs

acronymes tel que PAPR (Peak To Average Power Ratio), PMEPR (Peak to Mean Enveloppe Power Ratio) ou encore CF (Crest Factor). Devant cette multiplicité, il nous a paru nécessaire de synthétiser la notion de facteur de crête en introduisant celle du Power Ratio (PR), plus générale et déclinable en différentes versions permettant de retrouver celles pré-citées. Cette approche fait l’objet de la première partie de cet article.

Dans la deuxième partie de cet article, nous étudions séparément l’influence du suréchantillonnage et du filtrage sur le PR. En effet, tous les étages d’une chaîne de communications modifient le signal instantané et donc la valeur du PR. Cette étude est menée dans un cas monoporteuse.

2 Définition du PR (Power Ratio)

2.1 Définitions théoriques

Plusieurs cas de figure doivent être considérés suivant l’état du signal : continu (designé par **c**) ou échantillonné (designé par **e**) et suivant le temps d’intégration utilisé dans le calcul du PR : fini (designé par **f**) ou infini (designé par **i**). Nous obtenons ainsi quatre états possibles pour le PR : $PR_{c,f}$, $PR_{c,i}$, $PR_{e,f}$ et $PR_{e,i}$ illustrés sur la figure 1 :

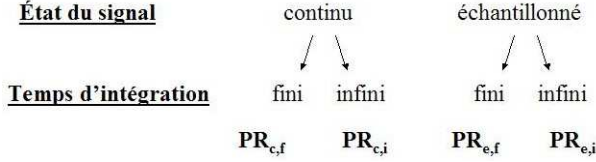


FIG. 1: Les différentes configurations du PR

2.1.1 Définition du PR infini

Nous présentons le *PR* infini dans le cas continu ($\mathbf{PR}_{c,i}$) sachant que cette définition est valable aussi dans un cas échantillonné. Dans ces conditions, soit $s(t)$ un signal réel ou complexe, en bande de base ou radio fréquence. Ainsi, le $\mathbf{PR}_{c,i}$ d'un signal $s(t)$ est :

$$\mathbf{PR}_{c,i}\{s(t)\} = \frac{\text{Max}|s(t)|^2}{E\{|s(t)|^2\}} = \frac{P_{max}}{P_{mean}}. \quad (1)$$

La variable t est réelle et $E\{\cdot\}$ représente l'espérance mathématique. P_{max} est le maximum de la puissance instantanée, pris sur un intervalle de temps infini. Ce $\mathbf{PR}_{c,i}$ est associé au signal présenté à l'entrée de l'amplificateur de puissance. Les autres définitions du *PR* ne sont que des approximations de celui-ci.

2.1.2 Définition du PR fini

Nous nous plaçons dans le cas d'un signal continu, sachant encore une fois que cette définition s'applique aussi dans un cas échantillonné. $\mathbf{PR}_{c,f}$, pour un temps d'intégration T , est alors défini par :

$$\mathbf{PR}_{c,f}(T)\{s(t)\} = \frac{\text{Max}_{[0,T]}|s(t)|^2}{\frac{1}{T} \int_T |s(t)|^2 dt}. \quad (2)$$

Dans ces conditions, nous avons la relation :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbf{PR}_{c,f}(T) = \mathbf{PR}_{c,i}. \quad (3)$$

2.1.3 Définition du PR dans le cas échantillonné

Soit N le nombre d'échantillons du signal $s(k)$. Le *PR* d'un signal numérique $s(k)$ (k variable entière) est :

$$\mathbf{PR}_{e,f}(N)\{s(k)\} = \frac{\text{Max}_{k \in [0, N-1]} |s(k)|^2}{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |s(k)|^2}. \quad (4)$$

Comme précédemment, nous avons la relation suivante pour le cas échantillonné :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{PR}_{e,f}(N) = \mathbf{PR}_{e,i}, \quad (5)$$

avec

$$\mathbf{PR}_{e,i}\{s(k)\} = \frac{\text{Max}|s(k)|^2}{E\{|s(k)|^2\}}. \quad (6)$$

3 Liens entre le PR et les définitions usuelles du facteur de crête

Dans la suite, le signal considéré est supposé continu et le temps d'intégration infini.

3.1 Cas du PMEPR

Le *PMEPR* (Peak to Mean Envelop Power Ratio) est lié à un signal en bande de base (en référence à la notion d'enveloppe complexe) [3]. En utilisant la notation \widetilde{PR} pour spécifier que le signal est complexe, $PMEPR = \widetilde{PR}_{c,i}$.

3.2 Cas du PAPR

Le *PAPR* (Peak to Average Power Ratio) est généralement utilisé pour définir le facteur de crête de signaux radio fréquence [2]. Soit $\tilde{s}(t)$ le signal en bande de base et $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ la fréquence porteuse. Le *PAPR* est alors défini par :

$$PAPR\{\tilde{s}(t)\} = \frac{\text{Max}|Re(\tilde{s}(t)e^{j\omega_0 t})|^2}{E\{|Re(\tilde{s}(t)e^{j\omega_0 t})|^2\}}. \quad (7)$$

En utilisant la notation \mathcal{PR} pour spécifier que le signal est radio fréquence, $PAPR = \mathcal{PR}_{c,i}$.

3.3 Relation entre le PMEPR et le PAPR

De nombreux articles ont proposé une relation entre le *PAPR* et le *PMEPR*, tout en donnant des résultats contradictoires. En effet, dans [2] ou [4] par exemple, les auteurs montrent que $PAPR \leq PMEPR$, et dans [5], il est montré que $PAPR \approx 2PMEPR$. Cette dernière approximation est correcte mais à notre sens imprécise. En effet, comme :

$$|Re(\tilde{s}(t)e^{j\omega_0 t})|^2 \leq |\tilde{s}(t)|^2 \quad (8)$$

et que la puissance moyenne en fréquence porteuse est la moitié de celle en bande de base, alors :

$$PAPR \leq 2PMEPR \quad (9)$$

L'égalité est obtenue lorsque les puissances instantanées en radio fréquence et bande de base ont même maximum et au même instant. Ceci est en particulier réalisé lorsque $f_0 \ll \frac{1}{T_s}$ où T_s est le temps symbole. Cette condition est toujours vérifiée en télécommunications. C'est pourquoi l'on peut affirmer qu'en pratique, $PAPR \approx 2PMEPR$, soit $PAPR_{dB} = PMEPR_{dB} + 3dB$.

3.4 Cas du CF

Le facteur de crête (CF pour Crest Factor) peut être utilisé et est défini comme la racine carrée du *PAPR* [7] ou du *PMEPR* [6] suivant le cas d'étude :

- $CF = \sqrt{PAPR} = \sqrt{\mathcal{PR}_{c,i}}$ en fréquence porteuse
- $CF = \sqrt{PMEPR} = \sqrt{\widetilde{PR}_{c,i}}$ en bande de base

4 Analyse du PR en modulations monoporteuse

L'analyse du PR est effectuée selon deux axes : le premier consiste à étudier l'influence du facteur de suréchantillonnage

sur le PR ; le second consiste à prendre en compte l'effet du filtrage (ici de Nyquist) et de propose une borne supérieure du PR.

$$p(t) = \frac{\sin(\frac{\pi}{T_s}t)}{\frac{\pi}{T_s}t} \frac{\cos(\frac{\pi\beta}{T_s}t)}{1 - \frac{4\beta^2 t^2}{T_s^2}}. \quad (13)$$

4.1 Influence du suréchantillonnage

En prenant comme exemple la modulation QPSK, le $PR_{e,i}$, calculé à la fréquence symbole vaut $0dB$ car les puissances instantanées et moyennes sont identiques. Cette valeur n'a cependant pas de sens dans un cas continu car elle ne prend pas en compte les valeurs des transitions entre symboles. En prenant ainsi un suréchantillonnage de 2, les constatations sont les suivantes :

- pendant une demie période, on se situe à P_{max}
- pendant l'autre demie période, on se situe à mi chemin entre 2 symboles avec :

- une chance sur 4 que les symboles soient les mêmes ($P = P_{max}$)
- une chance sur 2 que les symboles soient voisins ($P = \frac{P_{max}}{2}$)
- une chance sur 4 que les symboles soient diamétralement opposés ($P = 0$)

Dans ces conditions, le calcul de la puissance moyenne, pour une QPSK avec un facteur de suréchantillonnage de 2 donne :

$$P_{mean} = \frac{P_{max}}{2} + \frac{1}{2} * \left(\frac{P_{max}}{4} + \frac{P_{max}}{2 * 2} + \frac{0}{4} \right), \quad (10)$$

soit $1.25dB$.

En effectuant le même raisonnement sur une QPSK pour un facteur N , on montre que l'on a :

- une probabilité de $\frac{1}{4}$ de rester sur le même symbole ($P_0 = \frac{P_{max}}{2}$)
- une probabilité de $\frac{1}{2}$ pour une transition d'un symbole à un symbole voisin avec une probabilité globale égale à :

$$P_1 = \frac{P_{max}}{2N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(N/2 - i)^2}{2 * (N/2)^2} = \frac{1 + 2N^2}{6N^2} P_{max}. \quad (11)$$

- une probabilité de $\frac{1}{4}$ pour une transition d'un symbole à un autre diamétralement opposé avec une probabilité globale égale à :

$$P_2 = \frac{P_{max}}{4N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(N/2 - i)^2}{(N/2)^2} = \frac{2 + N^2}{12N^2} P_{max}. \quad (12)$$

Le PR global est alors $\frac{3N^2}{1+2N^2}$ soit $1.76dB$ pour valeur limite quand N tend vers l'infini. Cette valeur est cependant sous estimée car elle ne prend pas en compte l'effet du filtrage. Ce point est développé dans la partie suivante.

4.2 Influence du filtre de Nyquist

Dans cette partie, on considère un filtre de Nyquist de facteur de retombée β :

T_s est le temps symbole et le $\widetilde{PR}_{c,i}$ sera analysé pour un temps continu (t réel) ; le signal considéré sera alors $\widetilde{s}(t)$ défini par :

$$\widetilde{s}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} (a_k + jb_k)p(t - kT_s). \quad (14)$$

L'objectif de cette partie est de majorer le $\widetilde{PR}_{c,i}$ de $\widetilde{s}(t)$ par le biais du calcul de la moyenne et du maximum de la puissance instantanée de $\widetilde{s}(t)$. Ces développements seront effectués en modulations BPSK et étendus ensuite à toutes sortes de modulations.

Analyse de la puissance moyenne en BPSK : en considérant $e(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta(t - kT_s)$ et $P(f)$ la transformée de Fourier de $p(t)$, la puissance moyenne du signal $\widetilde{s}(t)$ est :

$$P_m = E\{|\widetilde{s}(t)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_e(f) P^2(f) df, \quad (15)$$

En supposant que les symboles sont non corrélés et de moyennes nulles, $\gamma_e(f) = \frac{E\{a_k^2\}}{T_s} = \frac{\sigma_a^2}{T_s}$. On montre de plus que $\int_{-\infty}^{\infty} P^2(f) df = T_s(1 - \frac{\beta}{4})$

En conclusion, $P_m = \sigma_a^2(1 - \frac{\beta}{4})$.

Analyse du maximum de la puissance instantanée : pour que l'équation (24) soit valable, il faut étudier séparément les cas $\beta = 0$ et $\beta \neq 0$.

Pour $\beta = 0$, le signal pour un temps donné prend la forme d'une série dont il faut étudier la convergence. Si on considère $a_k = (-1)^k$ et $t = -\frac{T_s}{2}$, on obtient :

$$\widetilde{s}(t = -\frac{T_s}{2}) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{1 + 2k}, \quad (16)$$

Cette série est divergente. Cela nous assure qu'il existe bien une configuration de symboles c_k et un instant donné pour lesquels le signal et donc sa puissance instantanée tendent vers l'infini, ce qui se traduit par :

$$\widetilde{PR}_{c,i}\{\widetilde{s}(t), \beta = 0\} = +\infty. \quad (17)$$

Pour une meilleure lisibilité, considérons $T_s = 1$. Pour $\beta \neq 0$, on montre que $|s(t)| \leq \frac{1}{|1 - 4\beta^2(t-k)^2|}$. La puissance instantanée est ainsi majorée par une série de Riemann qui converge.

On peut donc conclure que :

$$\widetilde{PR}_{c,i}\{\widetilde{s}(t), \beta \neq 0\} \neq +\infty. \quad (18)$$

Analysons maintenant le maximum de $|\widetilde{s}(t)|^2$ pour $\beta \neq 0$. Dans ce cas,

$$\widetilde{s}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \frac{\sin(\pi(t-k)) \cos(\pi\beta(t-k))}{\pi(t-k) (1 - 4\beta^2(t-k)^2)}. \quad (19)$$

$|\widetilde{s}(t)|^2$ peut alors être majoré par :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\sin(\pi(t-k))}{\pi(t-k)} \right)^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\cos(\pi\beta(t-k))}{1-4\beta^2(t-k)^2} \right)^2. \quad (20)$$

Le premier terme est majoré par 1. Analysons le second terme par le biais de la fonction $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\cos(\pi\beta(t-k))}{1-4\beta^2(t-k)^2} \right)^2$. On montre aisément que φ est maximum en $t_n = \frac{N}{2}$. Ceci est illustré sur la figure 2 où la courbe supérieure est la somme des N fonctions $\left(\frac{\cos(\pi\beta(t-k))}{1-4\beta^2(t-k)^2} \right)^2$ décalées.

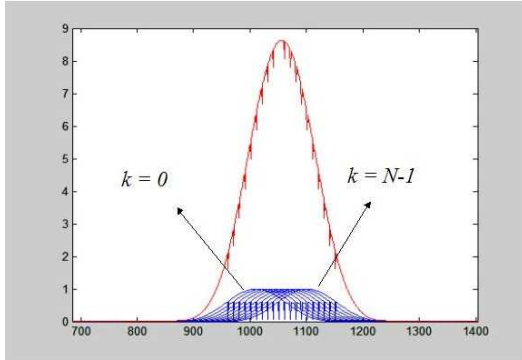


FIG. 2: Fonction $\varphi(t)$

Pour $t = \frac{N}{2}$, $\varphi(t = \frac{N}{2}) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{N/2} \left(\frac{\cos(\pi\beta k)}{1-4\beta^2 k^2} \right)^2$. En montrant que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(\frac{\cos(\pi\beta t)}{1-4\beta^2 t^2} \right)^2 dt = \frac{\pi^2}{16\beta} \quad \beta \in]0, 1], \quad (21)$$

on en déduit que $|\tilde{s}(t)|^2 \leq \frac{\pi^2}{8\beta}$ et donc

$$\widetilde{PR}_{c,i} \{ \tilde{s}(t) \}_{BPSK} \leq \frac{\pi^2/8\beta}{(1-\beta/4)}. \quad (22)$$

Cas des autres modulations : en considérant que les symboles a_k et b_k ont la même statistique, on montre que dans le cas général d'une modulation MAQ à M états,

$$\widetilde{PR}_{c,i} \{ \tilde{s}(t) \}_{QAM} \leq \left(\frac{Max(a_k)}{\sigma_a} \right)^2 \frac{\pi^2/8\beta}{(1-\beta/4)}. \quad (23)$$

Résultats de simulations : la figure 3 compare les majorations obtenues en modulations BPSK, QPSK et MAQ 16 avec des simulations pour quatre valeurs différentes de β (0.9, 0.6, 0.3 et 0.1). Pour des valeurs de β proches de 1, les simulations ont été menées en générant 10^4 signaux de $N = 10^3$ symboles. Pour ces valeurs de β , les densités de probabilités de $\widetilde{PR}_{c,i}$ sont très peu étalées, donnant ainsi des valeurs de facteur de crête très proches les unes des autres. Par contre pour des valeurs de β proches de 0, du fait de la divergence de la série décrite au paragraphe 4.2, les valeurs de $\widetilde{PR}_{c,i}$ sont beaucoup plus dispersées et cela nécessite de générer 10^6 signaux de $N = 10^5$ symboles.

Ces résultats montrent ainsi les très fortes adéquations entre les majorations théoriques proposées et les simulations.

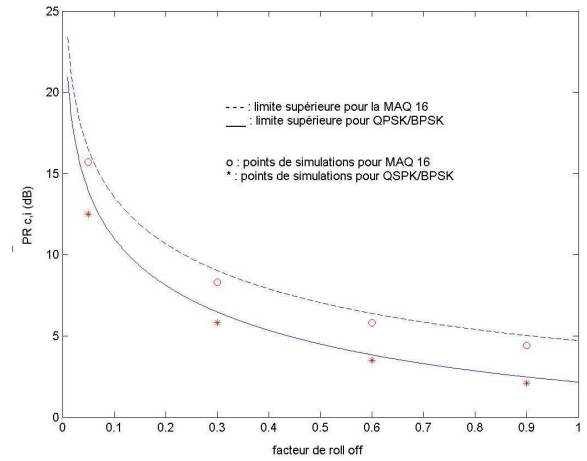


FIG. 3: Le $\widetilde{PR}_{c,i}$ en fonction de β

5 Conclusion

L'étude théorique menée montre que le PR est fortement influencé par le suréchantillonnage et le filtrage. Dans un contexte monoprotéuse, une borne supérieure très fine du PR avec un filtre de Nyquist est proposée. Des travaux sont en cours pour étendre ces résultats à un filtre en racine de Nyquist pour formaliser de façon plus générale l'influence du filtrage sur le PR, aussi bien en mono qu'en multiprotéuses.

References

- [1] Nati Dinur, Dov Wulich, "Peak-to-Average Power Ratio in High-Order OFDM", IEEE Transactions on Communications, Vol 49, No.6, June 2001, pp 1063-1072.
- [2] M. Sharif, M. Gharavi-Alkhansari and B.H. Khalaj, "On the Peak-to-Average Power of OFDM Signal Based on Oversampling", IEEE Transactions on Communications, Vol 51, No 1, January 2003, pp 72-78.
- [3] M. Sharif and B.H. Khalaj, "Peak to Mean Envelope Power Ratio of oversampled OFDM Signals: an analytical approach", Proc. of IEEE Int. Conf. Communications, Vol 5, Helsinki, Finland, June 2001, pp 1476-1480.
- [4] "A theoretical framework for the peak-to-average power control problem in OFDM transmission" Gerhard Wunder, PhD from Berlin University, 2004.
- [5] "Peak to average power reduction for multicarrier modulation", Jose Tellado, Stanford University, Septembre 1999.
- [6] M.Friese, "Multitone Signals with Low Crest Factor", IEEE Trans. On Communications, Vol 45, No 10, October 1997, pp 1338-1344.
- [7] B.M. Popovic, "Synthesis of Power Efficient Multitone Signals with Flat Amplitude Spectrum", IEEE Transactions on Communications, Vol 39, No 7, July 1991, pp 1031-1033. 2002.