

# Estimation des dérivées d'un signal multidimensionnel avec applications aux images et aux vidéos

Michel FLIESS<sup>1</sup>, Cédric JOIN<sup>2</sup>, Mamadou MBOUP<sup>3</sup>, Alexandre SEDOGLAVIC<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Équipe ALIEN, INRIA Futurs & Équipe MAX, LIX (CNRS, UMR 7161),  
École polytechnique, 91128 Palaiseau, France.

<sup>2</sup>Équipe ALIEN, INRIA Futurs & CRAN (CNRS, UMR 7039),  
Université Henri Poincaré (Nancy I), BP 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France.

<sup>3</sup>Équipe ALIEN, INRIA Futurs & UFR de Mathématiques et Informatique,  
Université René-Descartes (Paris V), 45 rue des Saints-Pères, 75270 Paris cedex 06, France.

<sup>4</sup>Équipe ALIEN, INRIA Futurs & LIFL (CNRS, UMR 8022), USTL, 59655 Villeneuve d'Ascq, France.

Michel.Fliess@polytechnique.fr, Cedric.Join@cran.uhp-nancy.fr  
mboup@math-info.univ-paris5.fr, Alexandre.Sedoglavic@lifl.fr

**Résumé** – On étend des techniques récentes d'estimations de dérivées de signaux transitoires bruités au multidimensionnel, c'est-à-dire aux images et vidéos. On présente des simulations numériques, avec débruitage et détection de contours.

**Abstract** – Recent techniques for estimating derivatives of noisy transient signals are extended to the multidimensional case, *i.e.*, to image and video processing. Numerical simulations are provided for noise removal and edge detection.

## 1 Introduction

La citation suivante, empruntée à [4], résume l'actualité du débruitage des images : *The search for efficient image denoising methods still is a valid challenge, at the crossing of functional analysis and statistics. In spite of the sophistication of the recently proposed methods, most algorithms have not yet attained a desirable level of applicability. All show an outstanding performance when the image model corresponds to the algorithm assumptions, but fail in general and create artifacts or remove image fine structures.* Cette communication en propose une approche nouvelle, par extension de techniques [10, 11] d'estimations des dérivées de signaux transitoires bruités. Quoique le passage du monodimensionnel au multidimensionnel nécessite un langage mathématique assez différent, les estimations des dérivées partielles s'y obtiennent aussi par des formules, de nature algébrique, où les intégrales itérées permettent d'atténuer les bruits les plus divers, additifs et/ou multiplicatifs, sans souci des propriétés statistiques. Nous en analysons brièvement la complexité informatique, qui se compare très favorablement aux approches existantes. Plusieurs simulations numériques, avec, notamment, une détection de contours (voir [12] et [11] pour un premier exemple de détection de ruptures avec un signal monodimensionnel), illustrent notre propos.

Avec des images et des vidéos bruités, nos méthodes permettent de retrouver les invariants géométriques standard (voir [5]), comme la courbure et la torsion. Nous les utiliserons pour une compréhension plus fine. D'autres thèmes de la littérature, si riche et diverse, sur les images

et les vidéos (voir, par exemple, [1, 2, 3, 6, 8, 13, 14, 15, 16]) pourront, alors, bénéficier de nos calculs<sup>1</sup>.

Soulignons enfin, comme en [11], que notre démarche repose sur une vision renouvelée des fondements théoriques du signal (voir [9]).

## 2 Cadre mathématique

### 2.1 Images et vidéos

Une *vidéo*, ou une *image animée*  $I$ , est une distribution vectorielle  $I := (I_1, \dots, I_m)$  (au sens de [17]) sur  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ . Les coordonnées  $x_1, \dots, x_m$  de  $\mathbb{R}^m$  (resp.  $y_1, \dots, y_p$  de  $\mathbb{R}^p$ ) sont les *variables d'espace* (resp. les *composantes chromatiques*), celle  $t$  de  $\mathbb{R}$  le *temps*. En général,  $m$  est égal à 2 ou 3, et  $p$  à 1 ou 3. La vidéo est dite *monochromatique* (resp. *polychromatique*) si  $p = 1$  (resp.  $p > 1$ ). Si  $\partial I / \partial t \equiv 0$ ,  $I$  est une *image fixe*. Faisons les hypothèses — raisonnables en pratique — suivantes :

- les projections du support de  $I$  sur  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}$  sont respectivement compactes et fermées dans  $\mathbb{R}_+$  ;
- en presque tout point de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ ,  $I$  est localement égale (*cf.* [17]) à une fonction analytique des variables d'espace et de temps.

---

<sup>1</sup>Des exemples préliminaires sur la compression, le zoom, le tatouage, les vidéos, sont disponibles auprès de l'un des auteurs (C.J).

## 2.2 Formules intégrales

### 2.2.1 Polynômes

L'utilisation d'intégrales pour l'interpolation est, à notre connaissance, nouvelle. Pour  $x_i = \xi_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $t = \tau$ , supposons, pour simplifier, la composante  $I_\iota$ ,  $\iota = 1, \dots, m$ , de  $I$  localement, par exemple sur le pavé

$$\Pi_{i \in \{1, \dots, m\}} [\xi_i, \xi_i + h_i] \times [\tau, \tau + k] \quad (1)$$

égale à une fonction polynômiale. Alors, tout coefficient  $c$  de ce polynôme est donné par une somme finie

$$c = \sum_{\text{finie}} \frac{\int \mathfrak{J}_\iota}{\int \varpi} \quad (2)$$

où

- $\mathfrak{J}_\iota$  appartient au  $D$ -module [7]

$$\text{span}_{\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m, t, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial t}]}(I_\iota)$$

- $\varpi \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m, t]$ ,
- $\int$  désigne une intégrale, éventuellement itérée, sur un chemin dans le pavé (1).

*Exemple 1* Posons  $m = 2$  et

$$I_\iota = c_{00} + c_{10}x_1 + c_{01}x_2 + c_{11}x_1x_2 + c_{20}x_1^2 + c_{02}x_2^2$$

Alors,

$$c_{11} = 4 \left( \frac{\frac{I_\iota(\xi_1+h_1, \xi_2+h_2)}{h_1 h_2} - \frac{\int_{\xi_2}^{\xi_2+h_2} I_\iota(\xi_1+h_1, x_2) dx_2}{h_1 h_2^2} + \frac{\int_{\xi_2}^{\xi_2+h_2} \int_{\xi_1}^{\xi_1+h_1} I_\iota(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{h_1^2 h_2^2} - \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_1+h_1} I_\iota(x_1, \xi_2+h_2) dx_1}{h_1^2 h_2} \right) \quad (3)$$

Les formules pour les autres coefficients sont analogues.

*Remarque 1* Il est immédiat de vérifier que la formule (2) n'est pas unique. En particulier, l'ordre d'itérations des intégrales est arbitraire. Nous laissons au lecteur le soin de récrire (3) ainsi.

### 2.2.2 Fonctions analytiques

Supposons dorénavant  $I_\iota$  localement égale à une fonction analytique  $F_\iota$ . L'estimée  $[c]_{e_N}(h_1, \dots, h_m, k)$  du coefficient  $c$  d'un monôme de degré  $d$  du développement de Taylor de  $F$  en  $x_i = \xi_i$ ,  $t = \tau$ , s'obtient en remplaçant en (2)  $I_\iota$  par le jet  $F_N$ , d'ordre  $N$ , c'est-à-dire par le développement de Taylor tronqué à l'ordre  $N$ .

L'importance pratique de la proposition suivante, qui généralise [10], est claire.

**Proposition 2.1** — Si  $N \geq d$ , alors

$$\begin{aligned} c &= \lim_{h_1, \dots, h_m, k \downarrow 0} [c]_{e_N}(h_1, \dots, h_m, k), \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} [c]_{e_N}(h_1, \dots, h_m, k). \end{aligned}$$

## 3 Compléments divers

### 3.1 Nature des bruits

Les intégrales utilisées dans nos estimateurs se comportent comme des filtres passe-bas, atténuant les bruits, considérés comme des phénomènes à fluctuations très rapides par rapport au signal d'origine. Les deux faits suivants tranchent avec le point de vue classique :

- il n'est pas nécessaire de connaître les propriétés statistiques des bruits<sup>2</sup>;
- ils peuvent être additifs et/ou multiplicatifs<sup>3</sup>.

### 3.2 Complexité informatique

Dans l'approche traditionnelle par moindres carrés, le nombre d'opérations nécessaires est  $O(\nu^2 n)$ , où  $n$  est le nombre de pixels de l'image et  $\nu$  la largeur de la fenêtre. Cette complexité rend prohibitif l'utilisation de *grands* filtres, c'est-à-dire avec  $\nu$  grand. Notre méthode est, de plus, *séparable* : les intégrales itérées se calculent sur des segments de droites et non sur des hypersurfaces.

La taille du système linéaire à résoudre est égale au nombre de coefficients intervenant dans le développement de Taylor tronqué à l'ordre  $N$ , mais elle est indépendante du nombre de mesures servant à calculer ces intégrales. Par contre, avec les moindres carrés, cette taille dépend du nombre de mesures effectuées et influence négativement le conditionnement.

Enfin, les expressions de type (2) s'obtiennent et se manipulent aisément avec les divers systèmes de *calcul formel* (Maple, Mathematica, etc).

## 4 Simulations numériques

Nous utilisons les images<sup>4</sup> de *Lena* et du *Pentagone*<sup>5</sup>. Alors,  $m = 2$ ,  $p = 1$ ,  $0 \leq x_1, x_2 \leq 1024$ ,  $0 \leq y = y_1 \leq 255$ .

### 4.1 Calculs numériques

Une méthode de type trapèze fournit les intégrales simples de (2). Pour les intégrales itérées<sup>6</sup>, on utilise la formule de Cauchy :

$$\underbrace{\int_{\xi-h}^{\xi} dt \cdots \int_{\xi-h}^t}_{i \text{ fois}} I(\tau) d\tau = \int_{\xi-h}^{\xi} \frac{(\xi - \tau)^{i-1}}{(i-1)!} I(\tau) d\tau \quad (4)$$

afin d'implanter les calculs au point  $\xi$  sur une fenêtre glissante de *petite* taille, comme en [10, 11].

### 4.2 Débruitage et détection de contours

À partir des images bruitées (1) et (2), on obtient, comme indiqué plus haut, les débruitages (3) et (5). Le tableau ci-dessous présente les normes  $L_2$  des images originales et les distances — en pourcentage de l'original pour cette norme — des images bruitées et débruitées avec les originales<sup>7</sup> :

<sup>2</sup>Ils peuvent être blancs ou colorés, gaussiens ou non.

<sup>3</sup>La relation triviale  $wI = I + (w-1)I$ , où  $w$  est un bruit, permet de passer du multiplicatif à l'additif.

<sup>4</sup>Une telle communication écrite impose des images fixes et monochromatiques.

<sup>5</sup>The USC-SIPI Image Database, [sipi.usc.edu/database/](http://sipi.usc.edu/database/)

<sup>6</sup>Voir, par exemple, [18] pour des méthodes plus élaborées.

<sup>7</sup>Les défauts en traitement d'images de ce type de distance sont connus. Ajoutons qu'une telle norme  $L_2$  est peu naturelle dans le cadre mathématique ébauché ici.

Image	originale	bruitée	débruitée
Lena	100%	229%	88%
Pentagone	100%	268%	141%

Les figures (4) et (6) représentent le passage<sup>8</sup> par 0 du laplacien  $\partial^2 I / \partial x_1^2 + \partial^2 I / \partial x_2^2$ .

*Remarque 2* Le calcul et l'estimation, analogues, des dérivées partielles temporelles  $\partial^\nu I / \partial t^\nu$ ,  $\nu \geq 1$ , permet la détection de mouvements pour les vidéos.



FIG. 1 – Image avec bruit multiplicatif gaussien, de moyenne 1 et d'écart-type 1/5, uniformément réparti.

## Références

- [1] G. Aubert, P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing*, Springer, New York, 2002.
- [2] M. Barlaud, C. Labit (Eds.), *Compression et codage des images et des vidéos*, Lavoisier, Paris, 2002.
- [3] A. Bovik (Ed.), *Handbook of Image and Video Processing*, Academic Press, San Diego, 2000.
- [4] A. Buades, B. Coll, J.-M. Morel, On image denoising methods, Prépublication 2004-15, CMLA, ENS-Cachan, 2004.
- [5] F. Cazals, M. Pouget. Estimating differential quantities using polynomial fitting of osculating jets, *Computer Aided Geometric Design*, 22, 2005, 121-146.
- [6] B. Chalmoud, *Éléments de modélisation pour l'analyse d'images*, Springer, Paris, 2000.
- [7] S.C. Couthino, *A Primer of Algebraic D-Modules*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

<sup>8</sup>Ces passages sont déterminés, ici, par changements de signe et non par seuillage. Tous les contours sont donc représentés. Les trois niveaux de gris correspondent à des seuillages sur la norme du gradient.

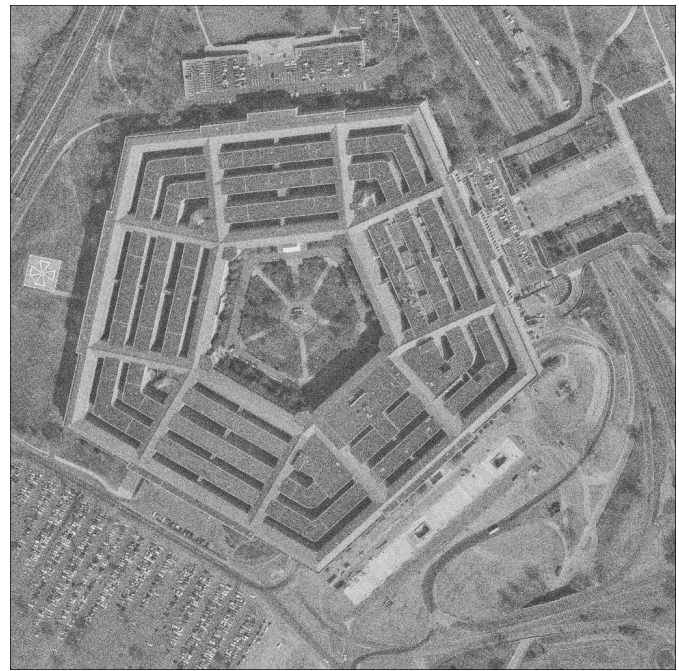


FIG. 2 – Image avec bruit additif coloré, de moyenne 0 et d'écart-type 15, uniformément réparti.

- [8] F. Davoine, S. Pateux (Eds.), *Tatouage de documents audiovisuels numériques*, Lavoisier, Paris, 2004.
- [9] M. Fliess, *Réflexions sur la question fréquentielle en traitement du signal*, manuscrit, 2005.
- [10] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, H. Sira-Ramírez, *Compression différentielle de transitoires bruités*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I, 339, 2004, 821-826.
- [11] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, H. Sira-Ramírez, *Analyse et représentation de signaux transitoires : application à la compression, au débruitage et à la détection de ruptures*, Actes 20<sup>e</sup> coll. GRETSI, Louvain-la-Neuve, 2005.
- [12] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier, H. Sira-Ramírez, *Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples*, in *Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation*, H. Sira-Ramírez, G. Silva-Navarro (Eds.), Editorial Lagares, México, 2003, pp. 1-21.
- [13] B. Jähne, *Digital Image Processing*, 5<sup>th</sup> ed., Springer, Berlin, 2002.
- [14] J.S. Lim, *Two-Dimensional Signal and Image Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1990.
- [15] S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes*, Éditions École polytechnique, Palaiseau, 2000.
- [16] W.K. Pratt, *Digital Image Processing*, 3<sup>rd</sup> ed., Wiley, New York, 2001.
- [17] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, 2<sup>e</sup> éd., Hermann, Paris, 1966.
- [18] A. Stroud, *Approximate Calculation of Multiple Integrals*, Prentice Hall, New York, 1971.



FIG. 3 – Image débruitée à partir de la figure (1).



FIG. 5 – Image débruitée à partir de la figure (2).



FIG. 4 – Contours et trois niveaux de gris obtenus à partir d'une image originale de Lena, avec bruit blanc additif, de moyenne 20 et d'écart-type 10.

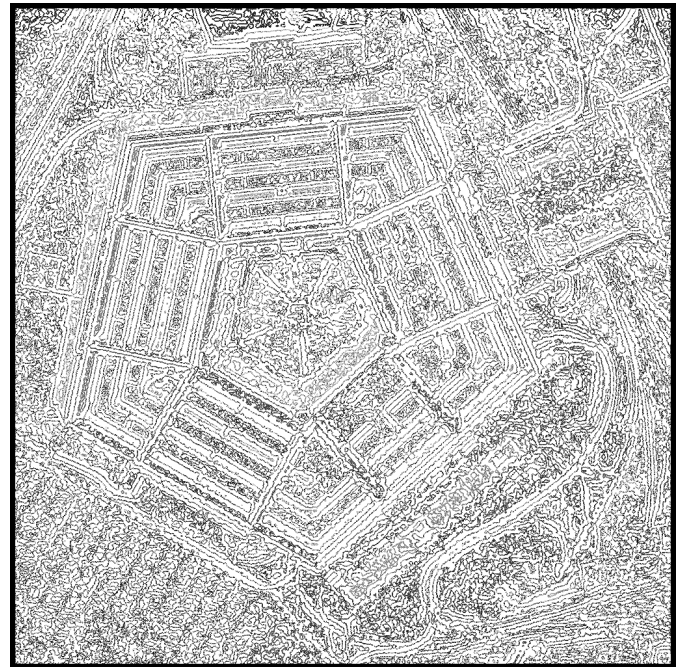


FIG. 6 – Contours et trois niveaux de gris obtenus à partir d'une image originale de pentagone, avec bruit coloré additif, de moyenne 20 et d'écart-type 10.