

# Séparation de mélanges convolutifs de modulations CPM sur-échantillonnées

Pierre JALLON<sup>1</sup>, Antoine CHEVREUIL<sup>1</sup>, Philippe LOUBATON<sup>1</sup>, Pascal CHEVALIER<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Equipe signal et communications  
Institut Gaspard Monge

Université de Marne la Vallée, 5, bd Descartes, Champs sur Marne, 77545 Marne La Vallée Cedex 2, France

<sup>2</sup>Thalès communications  
EDS/SPM/SBP, 160, bd Valmy, 92700 Colombes, France

pierre.jallon@univ-mlv.fr, antoine.chevreuil@univ-mlv.fr  
philippe.loubaton@univ-mlv.fr, pascal.chevalier@fr.thalesgroup.com

**Résumé** – Nous nous intéressons à la séparation de sources CPM mélangées par des canaux sélectifs en fréquences. Les débits des signaux transmis sont quelconques. En général, la connaissance des fréquences cycliques (inconnues du récepteur dans un contexte aveugle, et difficiles à estimer en pratique) n'est pas nécessaire à la mise en oeuvre d'algorithmes basés sur une approche par déflation; en effet, nous montrons que la minimisation du critère de Godard permet d'extraire une version filtrée d'une des sources.

**Abstract** – The separation of a convolutive mixture of CPM signals is addressed. The baud-rates of the sources are possibly different. In general, the knowledge of these baud-rates (unknown from the receiver in a blind context and very difficult to estimate in practice) is not required to process a deflation-based separation algorithm; indeed, we show that the minimization of the Godard criterion allows one to extract a filtered version of a source.

## 1 Introduction

Les problèmes de séparation de sources ont été l'objet de nombreux travaux scientifiques ces dernières années. Si ce thème de recherche a suscité autant d'intérêt, c'est principalement grâce à la diversité de ses applications: entre autres, applications audio, médicales ou encore améliorations des performances et détection de paramètres de systèmes de communications numériques. C'est ce dernier type d'application qui nous intéresse dans cette contribution:

Nous nous plaçons dans un contexte d'écoute passive où  $K$  émetteurs mal connus transmettent des signaux dans une même bande de fréquence. Ces signaux sont mélangés convolutivement par des canaux de propagation sélectifs en fréquence, et les signaux résultants sont reçus par un réseau de  $N$  capteurs ( $N \geq K$ ) et échantillonnés à une cadence compatible avec le théorème de Shannon. On souhaite extraire des signaux disponibles le plus d'informations possibles sur les  $K$  émetteurs (débit, modulation utilisé, constellation des symboles transmis...). Pour cela, il est raisonnable dans un première étape de séparer du signal reçu les différents signaux transmis, et dans une seconde étape d'utiliser des algorithmes d'estimation et de classification adaptés au contexte mono-source. Dans cet article, nous nous intéressons uniquement à l'étape de séparation du mélange, et nous faisons l'hypothèse que les sources sont mutuellement indépendantes et résultent de modulations à phase continue (CPM) de débits éventuellement différents. L'un des points originaux de notre travail provient du fait que la fréquence d'échantillonnage des signaux reçus n'a a priori aucun lien avec les débits symboles des signaux sources; dans ces conditions, le mélange qu'il convient de séparer est constitué de si-

gnaux cyclostationnaires dont les fréquences cycliques sont inconnues.

Dans cet article, nous nous intéressons à l'utilisation d'une approche séquentielle par déflation, consistant à rechercher un filtre  $N$  entrées / 1 sortie, de fonction de transfert  $\mathbf{g}(z)$ , qui excité par le signal de dimension  $N$  reçu, produit en sortie un signal scalaire  $r(n)$  coïncidant avec une version filtrée d'une des sources. Pour ceci, il convient de mettre en évidence des fonctions, dites de contraste, définies à partir des statistiques de  $r(n)$ , dont les extremas globaux sont atteints si et seulement si  $r(n)$  est une version filtrée de l'une des sources. Il est alors possible de retrancher du mélange observé la contribution de cette source et, de manière séquentielle, d'extraire une version filtrée de chacune des sources : voir [1, 5, 6, 7, 4].

Ainsi que cela est expliqué dans [2], il est relativement aisé de mettre en évidence des fonctions de contraste adaptées au contexte cyclostationnaire en introduisant des moyennages temporels dans les expressions des contrastes utilisés dans le cas stationnaire. A titre d'exemple, il est établi dans [2] que le maximum de la fonction  $\frac{\langle c_4(r(n)) \rangle}{(\langle \mathbb{E}[r(n)]^2 \rangle)^2}$  ( $\langle . \rangle$  est l'opérateur de moyenne temporelle) est atteint si et seulement si  $r(n)$  est une filtrée d'une des sources. Cependant, l'estimation consistante de cette fonction à partir d'un nombre fini d'observations nécessite, dans notre contexte aveugle, l'estimation des fréquences cycliques des signaux reçus. Comme ceci n'est pas toujours un problème simple, il est pertinent de tenter de mettre en évidence des fonctions de contraste dont l'estimation consistante ne nécessite pas la connaissance des fréquences cycliques du signal reçu. Dans [3], nous avons considéré le cas de mélanges de signaux modulés linéairement par des symboles indépendants identiquement distribués (i.i.d.), et avons étudié les propriétés

séparantes de la fonction de Godard définie par

$$J(r(n)) = \langle \mathbb{E}(|r(n)|^2 - 1)^2 \rangle, \quad (1)$$

Le but de cet article est d'étudier dans quelle mesure les résultats de [3] s'étendent au cas de mélanges de signaux CPM. Dans la section 2, nous précisons la nature des signaux considérés. La section 3 est consacrée à la présentation de nos résultats. Enfin, la section 4 est consacrée à quelques résultats de simulation.

## 2 Modélisation du problème

Les  $K$  signaux sources sont supposés être des signaux modulés à phase continue: pour tout  $k$ , le  $k$ -ième signal s'écrit  $\exp(i\phi_{a,k}(t))$  où la phase<sup>1</sup>  $\phi_{a,k}(t)$  est donnée par:

$$\phi_{a,k}(t) = \pi h_k \int_{-\infty}^t \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{n,k} g_k(u - nT_k) du$$

Dans cette expression,  $T_k$  est la période-symbole,  $h_k$  est l'indice de modulation et  $(a_{n,k})_{n \in \mathbb{Z}}$  est la suite de symboles transmis. Cette suite est une suite binaire ( $a_{n,k} = \pm 1$  avec probabilité  $1/2$ ) indépendante et identiquement distribuée. La fonction de mise en forme  $g_k(t)$  vérifie  $g_k(t) = 0$  si  $t < 0$  ou  $t > L_k$ , et  $\int_0^{L_k T_k} g_k(u) du = 1$ .

Afin d'augmenter l'efficacité spectrale de ces signaux, un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_c = \frac{1+\gamma_k}{2T_k}$ ,  $\gamma_k \in [0, 1]$ , est en général appliqué avant la transmission au  $k$ -ième signal, et nous noterons  $s_{a,k}(t)$  le signal effectivement émis.

Les  $K$  signaux sont émis dans une même bande de fréquences, et sont mélangés convolutivement par des canaux de propagation sélectifs en fréquence. Le récepteur dispose de  $N$  capteurs, et l'on désigne par  $\mathbf{y}_a(t)$  le signal de dimension  $N$  formé des  $N$  enveloppes complexes  $(y_{a,i}(t))_{i=1,\dots,N}$  des signaux à temps continu reçus sur chacun des capteurs.  $\mathbf{y}_a(t)$  est échantillonné à un rythme  $T_e$  qui satisfait la condition de Shannon, et on pose  $y_i(n) = y_{a,i}(nT_e)$  et  $\mathbf{y}(n) = \mathbf{y}_a(nT_e)$ .

Puisque  $T_e$  vérifie la condition de Shannon, le signal  $\mathbf{y}(n)$  coïncide avec la sortie d'un système linéaire  $K$  entrées /  $N$  sorties de fonction de transfert  $\mathbf{H}(z) = [h_{i,j}(z)]_{(i,j)}$  excité par le signal de dimension  $K$   $\mathbf{s}(n) = (s_1(n), \dots, s_K(n))^T$ , où  $s_k(n) = s_{a,k}(nT_e)$ .

Les signaux  $\{s_k(n)\}$  sont cyclostationnaires. En particulier, le moment d'ordre 2 de la  $k$ -ième source est une fonction périodique du temps, de période  $\frac{T_e}{T_k}$ . Néanmoins, le filtre passe bas appliqué à l'émission assure, tant que  $\gamma_k < 1$ , que, en tant que fonction de  $n$ , les moments  $\mathbb{E}(s_k(n)s_k(n-p)^*)$  possèdent au plus 3 coefficients de Fourier non nuls aux fréquences cycliques:  $\alpha_k \in \left\{0, \frac{T_e}{T_k}, -\frac{T_e}{T_k}\right\}$ . De plus, si  $\gamma_k$  est nul, alors le signal  $s_k$  n'a qu'une seule fréquence cyclique qui est 0, et est donc stationnaire à l'ordre 2.

Pour séparer le mélange, nous proposons d'utiliser une approche par déflation, consistant à déterminer un filtre  $N$  entrées / 1 sortie  $\mathbf{g}(z)$  de façon à ce que  $r(n) = [\mathbf{g}(z)]\mathbf{y}(n)$  coïncide avec une version de l'une des sources. Dans la suite, nous étudions les propriétés séparante du critère de Godard (1).

## 3 Résultats

La sortie du filtre  $\mathbf{g}(z)$  excité par les observations s'écrit:

$$r(n) = \sum_{i=1}^N [g_i(z)]y_i(n) = \sum_{k=1}^K [f_k(z)]s_k(n)$$

où  $\mathbf{f}(z) = [f_1(z), \dots, f_K(z)]$  est le filtre global  $\mathbf{f}(z) = \mathbf{g}(z)\mathbf{H}(z)$ . Le système est linéaire, donc le moment d'ordre 2 se décompose en série de Fourier avec des coefficients non nuls pour les fréquences cycliques décrites par l'ensemble  $I = \{0\} \cup \left\{\pm \frac{T_e}{T_k} \mid k = 1 \dots K\right\}$ :

$$\mathbb{E}(r(n)r^*(n-p)) = \sum_{\alpha \in I} R_r^{(\alpha)}(p) e^{-2i\pi\alpha n}$$

$R_r^{(\alpha)}(p)$  est appelée cyclo-corrélation de  $r(n)$  à la fréquence cyclique  $\alpha$  et nous notons  $S_r^{(\alpha)}(e^{2i\pi\nu})$  sa transformée de Fourier.

Il est utile d'exprimer la moyenne des cumulants d'ordre 4 de  $r(n)$ ,  $\langle c_4(r(n)) \rangle = \langle cum(r(n), r^*(n), r(n), r^*(n)) \rangle$ . Afin de simplifier la présentation de ce qui suit, nous allons supposer que les indices des modulations CPM utilisés ne sont ni entiers, ni demi-entiers. Les signaux  $(s_k)_{k=1,\dots,K}$  sont alors circulaires à l'ordre 2, de même que  $r(n)$ . Par conséquent,  $\mathbb{E}(r(n)r(n-p)) = 0$  pour tous  $n$  et  $p$ , et  $\langle c_4(r(n)) \rangle = \langle \mathbb{E}|r(n)|^4 \rangle - 2 \langle \mathbb{E}|r(n)|^2 \rangle^2$ . Appliquant l'égalité de Parseval et remarquant que  $R_r^{(\alpha)}(0) = (R_r^{(-\alpha)}(0))^*$  et  $\mathbb{E}(r(n)^2) = 0$ , nous pouvons écrire

$$\langle c_4(r(n)) \rangle = \langle \mathbb{E}|r(n)|^4 \rangle - 2|R_r^{(0)}(0)|^2 - 4 \sum_{\alpha \in I_+^*} |R_r^{(\alpha)}(0)|^2 \quad (2)$$

où  $I_+^*$  est l'ensemble des fréquences cycliques strictement positives. Toute la difficulté des problèmes de séparation de mélanges convolutifs de sources cyclostationnaires réside dans l'équation (2). En effet, le cumulants moyenné d'ordre 4 dépend de 3 termes: Les 2 premiers peuvent être simplement estimés, mais le troisième terme nécessite de connaître où d'estimer les fréquences cycliques pour être évalué. C'est la raison pour laquelle nous nous intéressons aux propriétés séparantes de la fonction de Godard (1) qui s'estime de façon consistante sans connaissance a priori sur les signaux par  $\hat{J}(r(n)) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (|r(n)|^2 - 1)^2$ .

Pour étudier la fonction de Godard, commençons par définir la norme de  $f_k(z)$  par  $\|f_k\|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |f_k(e^{2i\pi\nu})|^2 S_{s_k}^{(0)}(e^{2i\pi\nu}) d\nu$ . Notons que cette norme dépend de l'indice  $k$ , et qu'il serait en toute rigueur nécessaire de faire apparaître cette dépendance dans la notation la symbolisant. Pour ne pas trop compliquer les notations, nous préférons nous contenter de la notation  $\|f_k\|^2$ . Comme dans [5], nous écrivons  $r(n)$  sous la forme:

$$r(n) = \sum_{k=1}^K \|f_k\| \tilde{s}_k(n)$$

où  $\tilde{s}_k(n) = \left[ \frac{f_k(z)}{\|f_k\|} \right] s_k(n)$ . Notons que  $R_{\tilde{s}_k}^{(0)}(0) = 1$  et que si  $\forall k \neq k_0, \|f_k\| = 0$  et  $\|f_{k_0}\| \neq 0$  alors le signal  $r(n)$  est égal à une version filtrée de  $s_{k_0}(n)$ . Dès lors, en posant  $\beta_{\tilde{s}_k} = \langle \mathbb{E}|\tilde{s}_k(n)|^4 \rangle$  et  $\lambda(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2}) = \sum_{\alpha \in I_+^*} Re \left( R_{\tilde{s}_{k_1}}^{(\alpha)}(0) R_{\tilde{s}_{k_2}}^{(\alpha)*}(0) \right)$ ,

1. le suffixe "a" précise que la fonction en question est à temps continu

la fonction de Godard (1) admet comme expression :

$$J(r(n)) = \sum_{k=1}^K \|f_k\|^4 \beta_{\tilde{s}_k} - 2 \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2 + 1 \quad (3)$$

$$+ 4 \sum_{k_1 \neq k_2} \|f_{k_1}\|^2 \|f_{k_2}\|^2 (1 + 2\lambda(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2}))$$

La forme générale de cette expression rend très difficile l'étude directe du minimum global de  $J(r(n))$ . Dans la suite, nous allons donc utiliser le lemme suivant, et mettre en évidence des minorants bien choisis de  $J$ .

**Lemme 3.1** Soit  $m(r)$  une fonction positive vérifiant:

$$\forall r, J(r) \geq m(r)$$

Alors, si le minimum global de la fonction  $m(r)$  est atteint si et seulement si le signal  $r(n)$  ne dépend que d'une des sources constituant le mélange, et que  $\min_r m(r) = \min_r J(r)$ , alors le minimum global de la fonction  $J(r)$  est atteint si et seulement si le signal  $r(n)$  ne dépend que d'une des sources.

### 3.1 Cas n°1 : les signaux sources ont des fréquences cycliques différentes

Nous commençons par considérer le cas où les différents émetteurs utilisent des débits différents. Dans ce cas, les différents signaux sources ne partagent pas les mêmes fréquences cycliques, et les termes de corrélation cycliques croisées s'annulent:

$$\forall k_1 \neq k_2, R_{\tilde{s}_{k_1}}^{(\alpha)}(0) R_{\tilde{s}_{k_2}}^{(-\alpha)}(0) = \lambda(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2}) = 0$$

La fonction de Godard (3) se simplifie et on peut remarquer que son expression est la même que dans un contexte stationnaire. Afin d'étudier son minimum global, nous posons

$$\beta_m = \min_k \inf_{f_k} \beta_{\tilde{s}_k} = \min_k \inf_{f_k} \langle \mathbb{E} |\tilde{s}_k(n)|^4 \rangle \quad (4)$$

et  $m(r) = \beta_m \left( \sum_{k=1}^K \|f_k\|^4 \right) + 4 \sum_{k_1 \neq k_2} \|f_{k_1}\|^2 \|f_{k_2}\|^2 - 2 \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2 + 1$ . Il s'agit d'une fonction beaucoup plus simple que  $J$ , puisqu'elle ne dépend en particulier que des  $(\|f_k\|)_{k=1, \dots, K}$ . Il est clair que  $J(r) \geq m(r)$ . Par ailleurs, il est aisé d'établir que si  $\beta_m < 2$ , alors, le minimum de  $m$ , considéré en tant que fonction des paramètres  $(\|f_k\|)_{k=1, \dots, K}$ , est égal à  $1 - \frac{1}{\beta_m}$ , et est atteint si et seulement si tous les  $(\|f_k\|)_{k=1, \dots, K}$  sont nuls sauf 1. Ceci permet de montrer que le minimum global de  $m$  est atteint si et seulement si  $r(n)$  coïncide avec la version filtrée de la source réalisant le minimum de (4). Dans ces conditions,  $\min_r m(r) = \min_r J(r)$ , et le lemme (3.1) assure que  $J$  est un contraste dès que  $\beta_m < 2$ . Les signaux CPM sont des signaux de module constant, et donc leur moment d'ordre 4 vaut 1. Néanmoins, nous avons supposé qu'un filtre passe-bas est appliqué en émission pour contrôler la bande passante du signal transmis. On peut raisonnablement supposer que le filtre passe-bas n'affecte pas trop la propriété de module constant et que le minimum des moments d'ordre 4 moyennés reste proche de 1, et en tous les cas, inférieure à 2. Cette affirmation est illustrée par quelques applications numériques : voir la courbe de gauche de la figure 3.1. Les filtres de mise en forme sont des fonctions portes (REC) ou des cosinus surélevés (RC) de durée  $T_s$  (1) ou  $3T_s$  (3), et le facteur d'excès de bande des filtres d'émission varie entre 0 et 1.

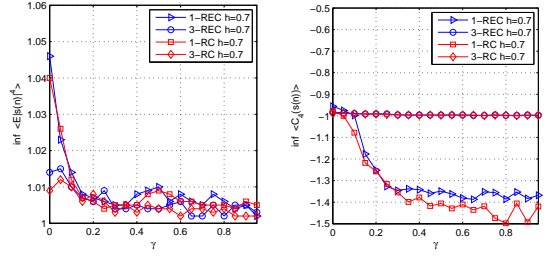


FIG. 1: Statistiques d'ordre 4 pour un ensemble de modulation CPM

### 3.2 Cas n°2: les signaux sources ont tous les mêmes fréquences cycliques

Nous considérons à présent le cas où les sources peuvent partager des fréquences cycliques. Certains termes  $\{\lambda(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2})\}$  ne s'annulent pas, ce qui complique considérablement le problème. Pour simplifier notre étude, nous supposons dans un premier temps que toutes les sources ont le même débit. Le signal reçu ne possède donc qu'une seule fréquence cyclique strictement positive  $\alpha$ . Afin d'étudier le minimum global de  $J(r)$ , nous allons de nouveau utiliser le lemme 3.1. La mise en évidence d'un minorant permettant de conclure est toutefois délicate, et nous nous contentons d'esquisser dans la suite les principaux éléments de notre démarche.

Pour construire un minorant de  $J(r)$  (1), nous introduisons  $\Lambda(x) = |R_x^{(\alpha)}(0)|$ , et constatons que  $\lambda(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2}) > -\Lambda(\tilde{s}_{k_1})\Lambda(\tilde{s}_{k_2})$ . Par ailleurs, il est possible d'établir que pour tout  $k$ , et pour tout filtre SISO  $\tilde{f}_k$  de norme 1, alors

$$\Lambda([\tilde{f}_k(z)]_{s_k}) \leq \frac{1}{2}$$

Puisque les signaux  $(\tilde{s}_k)_{k=1, \dots, K}$  sont construits à partir de filtres de norme 1, on peut constater que  $J(r)$  est minorée par la fonction  $\beta_m \left( \sum_{k=1}^K \|f_k\|^4 \right) + 2 \sum_{k_1 \neq k_2} \|f_{k_1}\|^2 \|f_{k_2}\|^2 - 2 \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2 + 1$ . Malheureusement, considérée en tant que fonction des  $(\|f_k\|)_{k=1, \dots, K}$ , cette fonction n'atteint son minimum en un point du type  $\|f_k\| = \delta(k - k_0) \|f_{k_0}\|$  que dans le cas où  $\beta_m < 1$ . Puisque  $\beta_m$  est bien sur plus grand que 1, il convient d'utiliser un minorant moins grossier. Pour ceci, il faut remarquer que si un filtre de norme 1  $\tilde{f}_k$  est tel que  $\Lambda([\tilde{f}_k(z)]_{s_k})$  est proche de sa valeur maximale 1/2, alors, la moyenne temporelle du moment d'ordre 4 de  $[\tilde{f}_k(z)]_{s_k}(n)$  s'écarte très notablement de 1. Les paramètres  $\beta_{\tilde{s}_k}$  et  $\Lambda(\tilde{s}_k)$  sont donc reliés, et ceci peut être utilisé pour construire un minorant bien adapté. Plus formellement, on peut montrer le lemme suivant.

**Lemme 3.2** Soit  $F_k$  l'ensemble des filtres SISO de norme 1, i.e.  $\tilde{f}_k(z) \in F_k \Leftrightarrow \|\tilde{f}_k\| = 1$ . Soit  $\Lambda_* \in ]0, 1/2[$ ,  $F_k = F_{1,k}(\Lambda_*) \cup F_{2,k}(\Lambda_*)$  avec :

$$F_{1,k}(\Lambda_*) = \left\{ \tilde{f}_k \in F / \Lambda([\tilde{f}_k(z)]_{s_k}) < \Lambda_* \right\}$$

$$F_{2,k}(\Lambda_*) = \left\{ \tilde{f}_k \in F / \Lambda([\tilde{f}_k(z)]_{s_k}) \geq \Lambda_* \right\}$$

Définissons  $\delta$  par  $\delta = \min_k \min_{\tilde{f}_k} \langle c_4(\tilde{s}_k(n)) \rangle$  où  $\tilde{s}_k(n) = [\tilde{f}_k(z)]_{s_k}(n)$ , et posons  $\beta_* = \delta + 2 + 4\Lambda_*^2$ . Alors, si  $\tilde{f}_k \in F_{2,k}(\Lambda_*)$ ,  $\beta_{\tilde{s}_k} \geq \beta_*$ , où  $\tilde{s}_k(n) = [\tilde{f}_k(z)]_{s_k}(n)$ .

A chaque valeur de  $\Lambda_* \in ]0, 1/2[$  va correspondre un minorant, et nous avons établi qu'il existe des valeurs de  $\Lambda_*$  pour

lesquelles le minorant correspondant satisfait les conditions du lemme 3.1 (voir plus loin). Il convient de noter que pour calculer  $\beta_*$ , il est nécessaire d'évaluer le terme  $\delta$ . Son évaluation analytique est malheureusement impossible, et nous avons donc procédé numériquement en l'évaluant en fonction du facteur d'excès de bande  $\gamma$  pour diverses modulations CPM. Sur l'ensemble des cas traités (voir la courbe de droite de la figure 3.1), nous pouvons constater que  $\delta \simeq -1.5$ .

Soit  $\mathbf{f}(z) = (f_1(z), \dots, f_K(z))$  une fonction de transfert, et posons  $\tilde{f}_k(z) = \frac{f_k(z)}{\|f_k\|}$ . Si  $P$  composantes (les  $P$  premières sans restriction) de  $(\tilde{f}_1(z), \dots, \tilde{f}_K(z))$  appartiennent à  $(F_{1,k}(\Lambda_*))_{k \leq P}$  et que les  $K - P$  restantes (les  $K - P$  dernières) appartiennent à  $(F_{2,k}(\Lambda_*))_{k=P+1, \dots, K}$ , alors, il est facile de constater que  $J(r) \geq m_P(r)$  où  $m_P(r)$  est défini par

$$\begin{aligned} m_P(r(n)) &= \beta_m \sum_{k=1}^P \|f_k\|^4 + \beta_* \sum_{k=P+1}^K \|f_k\|^4 \\ &+ 4 \sum_{k_1 \neq k_2 \in [1 \dots P]^2} \|f_{k_1}\|^2 \|f_{k_2}\|^2 (1 - 2\Lambda_*^2) \\ &+ 8 \sum_{k_1 \neq k_2 \in [1 \dots P] \cup [P+1 \dots K]} \|f_{k_1}\|^2 \|f_{k_2}\|^2 (1 - \Lambda_*) \\ &+ 4 \sum_{k_1 \neq k_2 \in [P+1 \dots K]^2} \|f_{k_1}\|^2 \|f_{k_2}\|^2 \left(\frac{1}{2}\right) \\ &- 2 \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2 + 1 \end{aligned} \quad (5)$$

On peut alors constater que  $m_P(r)$  ne dépend que des  $(\|f_k\|)_{k=1, \dots, K}$ . Pour chaque valeur de  $P$ , on peut calculer ses points stationnaires, et les valeurs qu'elle y prend. Après quelques calculs, on peut alors montrer que si

$$\beta_m < 2(1 - 2\Lambda_*^2) \quad (6)$$

$$\beta_m < \frac{\beta_* - 1}{K} + 1 \quad (7)$$

$$\beta_m < \frac{4(K-1)(1-\lambda_*)^2}{K-2+\beta_*} \quad (8)$$

alors, pour tout  $0 \leq P \leq K$ ,  $m_P(r) \geq (1 - \frac{1}{\beta_m})$ , l'égalité ayant lieu si et seulement si tous les  $\|f_k\|$  sont nuls, sauf l'un des  $P$  premiers. On rappelle que  $\beta_* = \delta_* + 2 + 4\Lambda_*^2$ , et que ces 3 inégalités expriment donc des contraintes sur  $(\beta_m, \delta_*, \Lambda_*)$ . Il convient de noter que les inégalités mettent également en jeu le nombre de sources  $K$ , et que plus  $K$  est grand, plus les conditions (6, 7, 8) sont sévères. A titre d'exemple, sur la "base de données" de modulations CPM utilisées dans les figures 1 et 2,  $\beta_m = 1.05$ ,  $\delta_* = -1.5$ , et la quantité  $\Lambda_* = 0.477$  permet aux 3 conditions d'être vérifiées jusqu'à  $K = 8$ . Le lemme 3.1 permet alors de montrer que la minimisation de  $J$  permet de séparer jusqu'à 8 sources de la base de données.

### 3.3 Cas n°3: Si chaque émetteur a le même débit qu'au plus un autre émetteur

Ce cas peut se traiter comme le précédent. Pour ceci, on partitionne les sources par groupe, un groupe étant défini comme un ensemble de sources partageant le même débit. Les termes de corrélation croisés inter-groupes s'annulent (cas n°1), et les

termes de corrélation croisés intra-groupes dépendent de la répartition des sources dans  $F_1(\Lambda_*)$  et  $F_2(\Lambda_*)$  (cas n°2). On obtient comme dans le cas n°2 un certain nombre de fonctions similaires à  $m_P(r)$ , dont on peut étudier les points stationnaires. De nouveau, on peut mettre en évidence des conditions sous lesquelles la minimisation du critère de Godard permet la séparation.

## 4 Illustrations

Nous avons simulé un mélange de 4 signaux CPM: chaque signal a un débit choisi aléatoirement qui vaut  $T_s = 3$  ou  $T_s = 4$ , un filtre de mise en forme choisi parmi les suivants: 1-REC, 3-REC, 1-RC, 3-RC et un indice de modulation  $h$  qui vaut 0.7. Le canal de propagation simulé est un canal multi-trajets avec au plus 3 trajets présentant chacun une atténuation de Rayleigh et les observations sont échantillonnées au rythme  $T_e = 1$ .

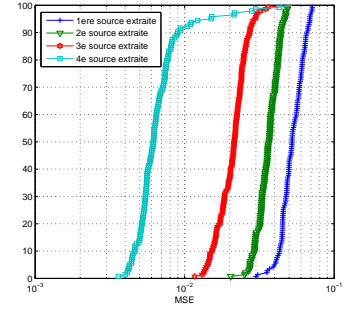


FIG. 2: Performance de l'algorithme de séparation pour un mélange de 4 CPM

utilisons le critère suivant:

$$MSE(k) = \sum_{l=1}^N \frac{\langle |c_{k,l}(n) - \hat{c}_{k,l}(n)|^2 \rangle}{\langle |y_l(n)|^2 \rangle}$$

où  $c_{k,l}(n)$  est la contribution de la source  $k$  sur le capteur  $l$ , et  $\hat{c}_{k,l}(n)$  sa version estimée calculée par l'algorithme de séparation. Les résultats obtenus, très concluants, sont illustrés par la figure 1, où nous avons représenté la fonction de répartition des MSE en fonction du numéro de la source extraite.

## Références

- [1] P. Comon. Contrasts for multichannel blind deconvolution. *IEEE Trans. Signal Processing*, 3:209–211, July 1996.
- [2] Pierre Jallon, Antoine Chevreuil, Philippe Loubaton, and Pascal Chevalier. Separation of convolutive mixtures of cyclostationary sources: a contrast function based approach. In *proc. ICA'04*, Grenade, Spain, September 2004.
- [3] Pierre Jallon, Antoine Chevreuil, Philippe Loubaton, and Pascal Chevalier. Separation of convolutive mixtures of linear modulated signals using constant modulus algorithm. In *ICASSP 2005*, Philadelphia, USA, 2005.
- [4] P.A. Regalia. On the equivalence between the godard and shalvi-weinstein schemes of blind equalization. *Signal Processing*, 73:185–190, 1999.
- [5] C. Simon, Ph Loubaton, and C. Jutten. Separation of a class of convolutive mixtures: a contrast function approach. *Signal Processing*, 81:883–887, 2001.
- [6] J.K. Tugnait. Blind spatio-temporal equalization and impulse response estimation for mimo channels using a godard cost function. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1997.
- [7] J.K. Tugnait. Adaptive blind separation of convolutive mixtures of independent linear signals. *Signal Processing*, 1999.