

# Étude des performances du modèle quaternionique en traitement d'antenne vectorielle

Sebastian MIRON, Nicolas LE BIHAN, Jérôme I. MARS

Laboratoire des Images et des Signaux  
961 rue de la Houille Blanche, BP 46, 38402 St. Martin d'Hères cedex, France  
Sebastian.Miron@lis.inpg.fr, Nicolas.Le-Bihan@lis.inpg.fr  
Jerome.Mars@lis.inpg.fr

**Résumé** – Nous analysons dans cette communication les performances du *modèle quaternionique* pour une onde polarisée captée par une antenne de capteurs vectoriels à deux composantes. La borne du Cramer-Rao est dérivée pour le modèle proposé et une comparaison avec le *modèle long-vecteur* est réalisée. Nous montrons que l'utilisation des quaternions permet de réduire le temps de calcul et améliore la résolution des algorithmes de type MUSIC.

**Abstract** – This paper analysis the performances of the *quaternion model* for a polarized wave recorded on a two-component vector-sensor array. The Cramer-Rao bound for the proposed model is derived and comparison with *long vector model* in presented. We show that the use of quaternions reduces memory requirements for data covariance representation and improves the resolution for MUSIC-like algorithms.

## 1 Introduction

Le remplacement des capteurs scalaires par des capteurs vectoriels dans divers domaines d'applications (sismique, télécommunication, médecine, etc.) rend possible l'estimation de la polarisation de la source. Des algorithmes de traitement d'antenne vectorielle ont été proposés dans la littérature ([4, 12]) et les performances de tels réseaux de capteurs ont été analysées dans [11, 6]. Néanmoins, toutes ces différentes techniques sont fondées sur la concaténation des signaux enregistrés, dans un vecteur de grande taille (long-vecteur), permettant l'utilisation des algorithmes classiques de traitement d'antenne scalaire basés sur des techniques matricielles. L'avantage d'une telle approche est la mise en œuvre facile, mais le passage d'une représentation 2D (distance-composante) à une représentation 1D (long vecteur) n'exploite pas d'une manière optimale l'information de polarisation.

Dans cet article nous proposons un modèle basé sur l'algèbre quaternionique, permettant de conserver la nature bimodale (*distance - composante*) des signaux enregistrés sur une antenne à deux composantes (2C). Les performances du modèle quaternionique sont comparées avec celles du modèle long vecteur dans le cadre d'un algorithme de type MUSIC permettant l'estimation des paramètres de polarisation et de la DDA d'une onde. Nous montrons que l'utilisation des quaternions améliore la résolution et rend l'algorithme moins sensible aux erreurs d'estimation du nombre de sources. Nous dérivons ensuite la borne de Cramer-Rao (BCR) pour le modèle quaternionique proposé dans le cas déterministe.

## 2 Quaternions

Un quaternion est un nombre hypercomplexe d'ordre quatre qui peut être écrit :

$$q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}, \quad (1)$$

où  $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$  et :

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1. \quad (2)$$

Le conjugué de  $q$  est donné par :  $\bar{q} = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}$  et son module  $|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ . Un quaternion est appelé *pur* si  $q_0 = 0$  et *unitaire* si  $|q| = 1$ . L'ensemble des quaternions, noté  $\mathbb{H}$ , forme un corps non-commutatif. Pour deux quaternions  $p, q \in \mathbb{H}$ ,  $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$  et en général  $pq \neq qp$ .

Un quaternion peut s'écrire sous la forme dite de Cayley-Dickson comme :

$$q = q^{(1)} + \mathbf{i}q^{(2)}, \quad (3)$$

avec :

$$q^{(1)} = q_0 + \mathbf{j}q_2 \quad (4)$$

$$q^{(2)} = q_1 + \mathbf{j}q_3 \quad (5)$$

$q^{(1)}, q^{(2)} \in \mathbb{C}^j$  (des nombres complexes en  $j$ ). La formule d'Euler s'étend aussi aux quaternions:  $q = |q| \exp \mu \theta$ , où  $\mu$  est un quaternion pur, unitaire avec  $\mu$  l'axe de  $q$  et  $\theta$  son angle. Une revue plus ample des propriétés des quaternions peut être trouvée dans [10].

## 3 Le modèle quaternionique de la polarisation

Considérons une antenne linéaire formée de  $N$  capteurs 2C équidistants. Dans le domaine fréquentiel, chaque composante peut être représentée sous la forme d'un vecteur complexe d'observation  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{C}^N$ . En utilisant la représentation de Cayley-Dickson, on code les deux vecteurs complexes dans un vecteur quaternionique d'observation  $\mathbf{y} \in \mathbb{H}^N$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{i}\mathbf{y}_2$  où

$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{C}^{jN}$ . Si on utilise une représentation de type long-vecteur,  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_2$  sont concaténés dans un grand vecteur complexe  $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^{2N}$ ,  $\tilde{\mathbf{y}} = [\mathbf{y}_1^T | \mathbf{y}_2^T]^T$ .

Pour analyser le problème d'estimation des paramètres d'une source sur une antenne vectorielle, nous considérerons que la DDA d'une source  $k$  est donnée par son déphasage inter-capteurs  $\theta_k$  et l'ellipse de polarisation est caractérisée par le rapport d'amplitude entre les deux composantes  $\rho_k$  et le déphasage inter-composantes  $\varphi_k$ . Avec ces notations, le comportement global d'une onde plane  $k$  sur le réseau de capteurs est illustré par le vecteur quaternionique :

$$\mathbf{a}_k(\theta_k, \rho_k, \varphi_k) = \frac{p_k(\rho_k, \varphi_k) \mathbf{s}_k(\theta_k)}{|p_k(\rho_k, \varphi_k) \mathbf{s}_k(\theta_k)|} \quad (6)$$

où  $p_k$  est un quaternion donné comme:

$$p_k(\rho_k, \varphi_k) = 1 + \mathbf{i} \rho_k e^{j\varphi_k}$$

et le vecteur directionnel :

$$\mathbf{s}_k(\theta_k) = [1, e^{-j\theta_k}, \dots, e^{-j(N-1)\theta_k}]^T \quad (7)$$

L'expression d'une observation quaternionique  $\mathbf{y}$ , en présence de  $K$  sources est :

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_k x_k + \mathbf{b} \quad (8)$$

où  $\mathbf{b}$  est un vecteur de quaternions représentant la contribution du bruit additif sur les deux composantes et  $x_k$  est l'amplitude complexe de la source  $k$  sur la première composante. Notons

$$\mathbf{\Omega} = \mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^\dagger] \in \mathbb{H}^{N \times N} \quad (9)$$

la matrice de covariance correspondant au modèle quaternionique, et  $\tilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}^\dagger] \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$ , celle du long vecteur. En termes de coût de calcul,  $\tilde{\mathbf{\Omega}}$  contient  $8 \times N^2$  réels tandis que  $\mathbf{\Omega}$  a  $4 \times N^2$  entrées réelles ce qui représente une réduction de la moitié de la place mémoire et un gain important en temps de calcul. Compte-tenu de (8) et en faisant l'hypothèse de décorrélation entre les sources et entre les sources et le bruit,  $\mathbf{\Omega}$  peut s'exprimer en fonction des vecteurs source  $\mathbf{a}_k$ , comme :

$$\mathbf{\Omega} = \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^\dagger + \mathbf{B}, \quad (10)$$

avec  $\sigma_k^2 = \mathbb{E}[x_k x_k^*]$  (\* l'opérateur de conjugaison) et  $\mathbf{B} = \mathbb{E}[\mathbf{b}\mathbf{b}^\dagger]$ , la matrice de covariance du bruit sur les capteurs.

## 4 L'orthogonalité des vecteurs des quaternions

La contrainte d'orthogonalité des vecteurs propres quaternioniques (issus de la décomposition en valeurs propres de  $\mathbf{\Omega}$ ) n'est pas la même que l'orthogonalité de type long-vecteur. Considérons deux vecteurs à valeurs quaternioniques  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}^{N \times N}$ , donnés par  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{i} \mathbf{p}_2$  et  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{i} \mathbf{q}_2$ , et les long-vecteurs associés  $\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{C}^{2N}$  :  $\tilde{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}_1^T | \mathbf{p}_2^T]^T$  et  $\tilde{\mathbf{q}} = [\mathbf{q}_1^T | \mathbf{q}_2^T]^T$ . Si on impose l'orthogonalité aux vecteurs de quaternions  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ , on obtient les relations suivantes :

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1 \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2 \rangle_{\mathbb{C}} = 0 \quad (11)$$

$$\text{et } \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1^* \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2^* \rangle_{\mathbb{C}} \quad (12)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$  représente le produit scalaire des vecteurs complexes et  $*$  est l'opérateur de conjugaison, tandis que la contrainte d'orthogonalité des vecteurs  $\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{C}^{2N}$  est équivalente à la relation (11) seulement. Pour illustrer l'effet de cette contrainte supplémentaire sur la décomposition en sous-espaces propres, nous avons calculé les erreurs d'approximation par troncature de rang pour ces deux approches, sur une matrice aléatoire  $\mathbf{M}$  de rang plein. Une moyenne sur 100 réalisations aléatoires de cette matrice a été effectuée pour le calcul des erreurs. L'erreur d'approximation<sup>1</sup> pour la représentation long-vecteur est plus importante que pour l'approche quaternionique comme on peut la voir sur la Fig. 1. En utilisant le modèle quaternionique, on obtient une meilleure approximation de rang de la matrice  $\mathbf{M}$ . Ce résultat est utile en traitement

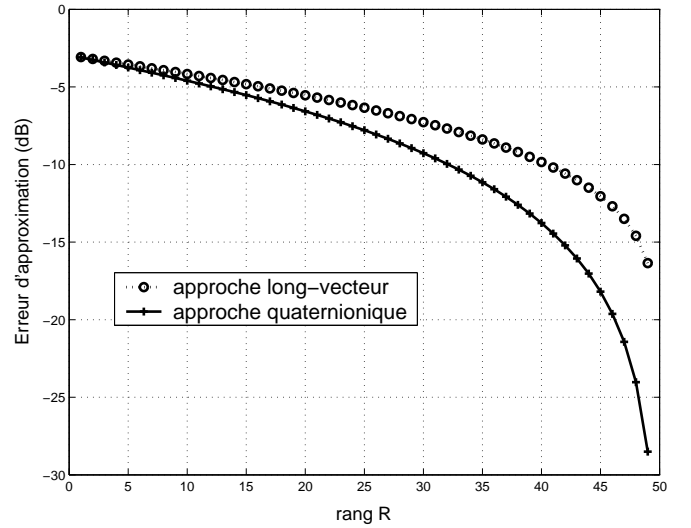


Figure 1: L'approximation de rang

d'antenne à haute résolution, lorsqu'on est amené à estimer les sous-espaces signal et bruit par troncature de rang de la matrice de covariance des observations. Nous illustrons dans la suite l'utilisation du modèle quaternionique dans le cadre d'un algorithme de type MUSIC basé sur la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance des observations.

## 5 MUSIC quaternionique

En traitement du signal, des algorithmes quaternioniques ont déjà été proposés pour les images couleur [2, 7], signaux sismiques [3, 5] ou pour étendre la notion de signal analytique aux signaux multidimensionnels [1].

Nous présentons dans cette section un algorithme de traitement d'antenne vectorielle permettant d'estimer la direction d'arrivée (DDA)  $\theta$  et les paramètres de polarisation  $\rho$  et  $\varphi$  du modèle quaternionique (présenté dans la section 3) d'une onde. L'algorithme est basé sur la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance des observations quaternioniques, définie par (9). Soit

$$\mathbf{\Omega} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^\dagger \quad (13)$$

<sup>1</sup>L'erreur d'approximation par troncature de rang  $R$  d'une matrice  $\mathbf{M}$ , est calculée suivant la formule  $err(R) = \frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_R\|}{\|\mathbf{M}\|}$ , avec  $\mathbf{M}_R$  la troncature de rang  $R$  de la matrice  $\mathbf{M}$  et  $\|\cdot\|$  la norme de Frobenius d'une matrice.

la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance des observations ( $\lambda_k \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{H}^N$ ). Par identification avec (10), nous associons les premières  $K$  valeurs propres à la partie signal des observations et les  $N - K$  valeurs qui restent à la partie bruit. Nous construisons ensuite le projecteur sur le sous-espace bruit :

$$\mathbf{\Pi}_B = [\mathbf{u}_{K+1}, \dots, \mathbf{u}_N][\mathbf{u}_{K+1}, \dots, \mathbf{u}_N]^\dagger \quad (14)$$

La fonctionnelle MUSIC quaternionique est ensuite calculée par projection du *vecteur directionnel quaternionique*  $\mathbf{d} \in \mathbb{H}^N$  :

$$\mathbf{d}(\theta, \rho, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 + i\rho e^{j\varphi} \\ e^{-j\theta} + i\rho e^{j(\varphi-\theta)} \\ \vdots \\ e^{-j(N-1)\theta} + i\rho e^{j(\varphi-(N-1)\theta)} \end{pmatrix} \quad (15)$$

sur le sous-espace bruit :

$$Q(\theta, \rho, \varphi) = \frac{1}{\mathbf{d}^\dagger(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{\Pi}_B\mathbf{d}(\theta, \rho, \varphi)} \quad (16)$$

La fonctionnelle (16) présente des maxima locaux pour des valeurs  $(\theta, \rho, \varphi)$  correspondant aux sources présentes dans le signal. Nous présentons dans la suite une comparaison entre les estimateurs MUSIC long-vecteur et MUSIC quaternionique pour le cas d'une seule source polarisée présente dans le signal. Sur la figure 2 nous avons représenté les courbes de détection en  $\theta$ , supposant les paramètres de polarisation de la source connus:  $\rho = 2, \varphi = 20^\circ$ . Les courbes pour les deux algorithmes

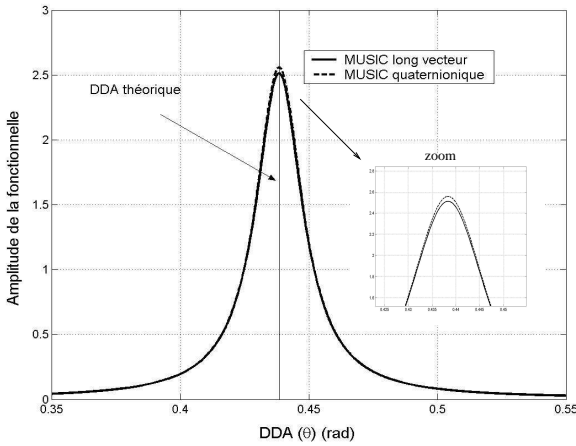


Figure 2: Une seule source (nombre de sources correctement estimé)

sont quasi-superposées, l'amplitude du pic de détection étant légèrement plus importante pour MUSIC quaternionique. Cela signifie un meilleur pouvoir de résolution pour cette approche. Pour la figure 3, nous avons considéré, sous les mêmes hypothèses, que le nombre de sources a été mal estimé (le nombre estimé de sources est égal à deux). Dans ce cas, la différence d'amplitude entre les pics de détection de deux algorithmes est encore plus accentuée. D'une façon générale, l'utilisation du modèle quaternionique améliore la résolution de l'algorithme, et le rend moins sensible à l'estimation du nombre de sources par rapport au modèle long vecteur. L'explication est la contrainte d'orthogonalité quaternionique, différente de celle long-vecteur (voir section 4), utilisée lors de la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance des observations.

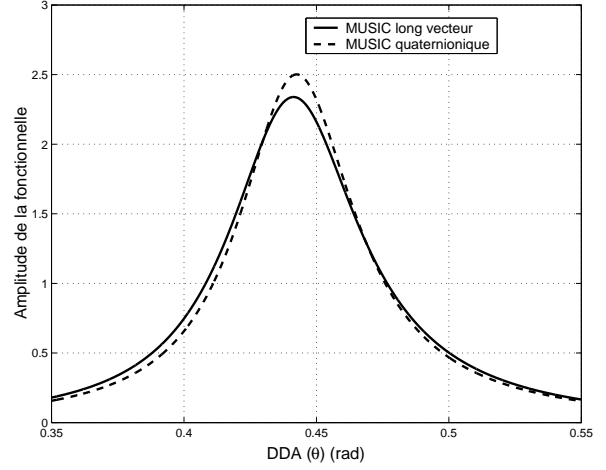


Figure 3: Une seule source (nombre de sources mal estimé)

## 6 La borne de Cramer-Rao du modèle quaternionique

Le modèle (8) peut se réécrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (17)$$

où  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{N \times K}$ , ses colonnes sont les vecteurs  $\mathbf{a}_k$  (6), et  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_K]^T$ . Considérons  $\Omega$  réalisations indépendantes du vecteur des observations  $\mathbf{y}(\nu)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, \Omega$ . Pour simplifier la dérivation, nous allons considérer le vecteur  $\mathbf{x}$  comme certain, connu. Cela n'empêche pas  $\mathbf{x}(1) \dots \mathbf{x}(\Omega)$  d'être des réalisations particulières d'un processus aléatoire. Nous faisons également l'hypothèse que le bruit et le signal sont décorrélés. Le bruit reste donc le seul mécanisme aléatoire et il sera soumis aux hypothèses suivantes:  $\mathbf{b}$  présente une distribution Gaussienne de moyenne nulle,  $E[\mathbf{b}(\nu)\mathbf{b}^\dagger(\xi)] = 2\sigma\mathbf{I}_N$  pour  $\nu = \xi$ , 0 pour  $\nu \neq \xi$  et  $E[\mathbf{b}(\nu)\mathbf{b}^T(\xi)] = 0$  pour tout  $\nu, \xi$ . La puissance du bruit sur une composante d'un capteur  $\sigma$  est considérée connue. Ces hypothèses ont déjà été utilisées pour ce type de problème (voir [8, 11]). Dans la suite nous dérivons la borne de Cramer-Rao pour le vecteur des paramètres  $\mathbf{p} = [\theta^T, \rho^T, \varphi^T]$ , avec  $\theta^T = [\theta_1, \dots, \theta_K]$ ,  $\rho^T = [\rho_1, \dots, \rho_K]$  et  $\varphi^T = [\varphi_1, \dots, \varphi_K]$ .

Avec ces hypothèses, pour une observation  $\nu$  la fonction de vraisemblance est :

$$V(\mathbf{y}(\nu)) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(\Gamma_{\mathbf{y}})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}[\mathbf{y}(\nu) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{x}]^\dagger \Gamma_{\mathbf{y}}^{-1} [\mathbf{y}(\nu) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{x}]\right) \quad (18)$$

Compte tenu de l'hypothèse sur le caractère déterministe des sources, la matrice de covariance des observations  $\Gamma_{\mathbf{y}} = \Gamma_{\mathbf{b}} = 2\sigma\mathbf{I}_N$  et son déterminant  $\det(\Gamma_{\mathbf{y}}) = 2^N\sigma^N$ . Si on prend en compte les  $\Omega$  réalisations, la fonction de vraisemblance des observations devient :

$$V(\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(\Omega)) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N\Omega}{2}} \sigma^{\frac{N\Omega}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{4\sigma} \sum_{\nu=1}^{\Omega} ([\mathbf{y}(\nu) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{x}]^\dagger [\mathbf{y}(\nu) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{x}])\right) \quad (19)$$

La log-vraisemblance de  $\mathbf{y}$  prend alors la forme suivante :

$$\ln(V(\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(\Omega))) = \ln(V(\mathbf{y})) = C - \frac{N\Omega}{2}$$

$$\frac{1}{4\sigma} \sum_{\nu=1}^{\Omega} [\mathbf{y}(\nu) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{x}]^\dagger [\mathbf{y}(\nu) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{x}] \quad (20)$$

où  $C$  est une constante.

Avec ces notations la matrice d'information de Fisher (MIF) [9] est donnée par :

$$f_{kl} = \mathbb{E} \left[ \frac{\partial \ln(\mathbf{V}(\mathbf{y}))}{\partial p_k} \frac{\partial \ln(\mathbf{V}(\mathbf{y}))}{\partial p_l} \right] \quad (21)$$

où  $p_k, p_l$  sont deux éléments du vecteur des paramètres. En remplaçant (20) dans (21) et après simplifications, l'expression de la MIF devient :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\theta\theta} & \mathbf{F}_{\theta\rho} & \mathbf{F}_{\theta\varphi} \\ \mathbf{F}_{\rho\theta} & \mathbf{F}_{\rho\rho} & \mathbf{F}_{\rho\varphi} \\ \mathbf{F}_{\varphi\theta} & \mathbf{F}_{\varphi\rho} & \mathbf{F}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (22)$$

où  $\mathbf{F}_{\theta\theta} = \frac{\Omega}{4\sigma} \text{Re} \left[ \mathbf{X}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{A}_\theta \mathbf{X} \right]$ ,  $\mathbf{F}_{\theta\rho} = \frac{\Omega}{4\sigma} \text{Re} \left[ \mathbf{X}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{A}_\rho \mathbf{X} \right]$ ,  $\mathbf{X} = \text{diag}\{x_1, x_2, \dots, x_K\}$  et  $\mathbf{A}_\theta = \sum_{k=1}^K \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_k}$ . La BCR de tout estimateur non-biaisé du  $l$ ème paramètre  $p_l$  du vecteur des paramètres  $\mathbf{p}$  est :

$$E[(\hat{p}_l - p_l)^2] \geq (\mathbf{F}^{-1})_{ll} \quad (23)$$

où  $(\mathbf{F}^{-1})_{ll}$  est le  $l$ ème élément sur la diagonale principale de la matrice inverse de  $\mathbf{F}$ .

Pour illustrer ce résultat théorique, nous présentons un exemple numérique. Considérons deux sources polarisées enregistrées sur une antenne formée de six capteurs à deux composantes. La première source est le signal utile et la deuxième est vue comme une interférence. Les paramètres des sources sont:  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\rho_1 = 1$ ,  $\varphi_1 = 60^\circ$  pour le signal d'intérêt et  $\rho_2 = 2$ ,  $\varphi_2 = -30^\circ$  pour l'interférence. La DDA de la deuxième source  $\theta_2$  varie autour de  $\theta_1$ . Les autres paramètres  $\Omega$ ,  $\sigma$  sont considérés unitaires et  $\mathbf{X}$  est normalisé. Dans la Fig. 4

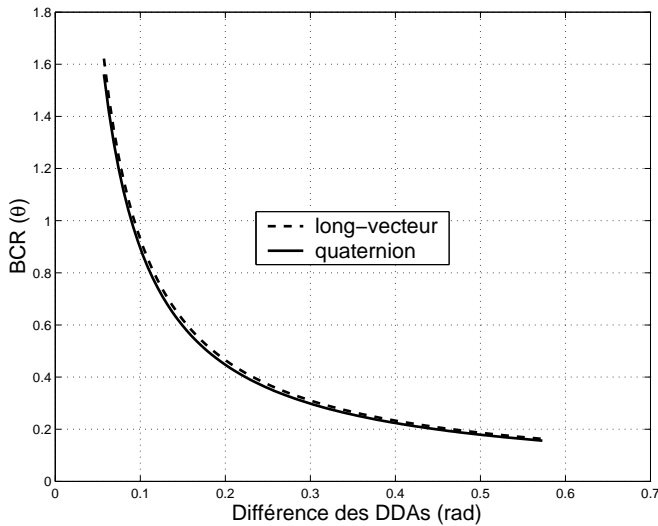


Figure 4: La borne de Cramer-Rao

nous avons représenté  $\sqrt{BCR(\theta_1)}$  (calculé à l'aide de la relation (23)) en fonction de la différence des DDAs ( $\theta_2 - \theta_1$ ) pour le modèle quaternionique et pour le long-vecteur. Pour le modèle long-vecteur nous avons utilisé la formule de la BCR calculée par Nehorai [6] qui a été adaptée aux paramètres du modèle. Les deux courbes sont très proches signifiant que les performances statistiques de deux approches sont équivalentes.

## 7 Conclusions

Nous avons proposé un modèle quaternionique pour le traitement d'antenne à deux composantes. Ce modèle permet de gérer l'information de polarisation tout en gardant l'organisation bimodale des données. L'approche quaternionique réduit le coût du calcul et permet une meilleure séparation des sous-espaces signal et bruit lors de la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance associée. Dans le cadre d'un algorithme de type MUSIC, l'utilisation d'un modèle quaternionique permet d'améliorer le pouvoir de résolution par rapport au modèle long-vecteur. Pour des performances statistiques équivalentes, l'approche quaternionique permet un gain important en termes de place mémoire et temps de calcul.

## References

- [1] T. Bülow and G. Sommer. Hypercomplex signals - a novel extension of the analytic signal to the multidimensional case. *IEEE Trans. Signal Processing*, 49(11):2844–2852, 2001.
- [2] T. A. Ell. *Hypercomplex spectral transformation*. PhD thesis, University of Minnesota, 1992.
- [3] N. Le Bihan and J. Mars. Singular value decomposition of matrices of quaternions: A new tool for vector-sensor signal processing. *Signal Processing*, 84(7):1177–1199, 2004.
- [4] J. Li and Jr. R.T. Compton. Angle and polarization estimation using ESPRIT with a polarization sensitive array. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 39(9):1376–1383, Sept. 1991.
- [5] S. Miron, M. Guillon, N. Le Bihan, and J. Mars. Multidimensional signal processing using quaternions. *3rd Workshop on Physics in Signal and Image Processing, Grenoble, France*, pages 57–60, Jan. 2003.
- [6] A. Nehorai and E. Paldi. Vector-sensor array processing for electromagnetic source localisation. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42(2):376–398, Feb. 1994.
- [7] S. J. Sangwine. Fourier transforms of color images using quaternions, or hypercomplex numbers. *Electronics letters*, 32(21):1979–1980, 1996.
- [8] P. Stoica and A. Nehorai. MUSIC, maximum likelihood, and Cramér-Rao bound. *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, 37(5):720–741, 1989.
- [9] H. L. Van Trees. *Detection, Estimation and Modulation Theory*, volume 1. John Wiley & Sons, 1968.
- [10] J. P. Ward. *Quaternions and Cayley Numbers, Algebra and applications*. Kluwer Academic, 1997.
- [11] A. J. Weiss and B. Friedlander. Performance analysis of diversely polarized antenna arrays. *IEEE Trans. Signal Processing*, 39(7):1589–1603, July 1991.
- [12] K. T. Wong and M. D. Zoltowski. Self-initiating MUSIC direction finding and polarization estimation in spatio-polarizational beamspace. *IEEE Trans. Antennas Propagation*, 48(8):1235–1245, Sept. 2000.