

# Etude Spectrale de l'Échantillonnage par Traversée de Niveaux

F. AESCHLIMANN, E. ALLIER, L. FESQUET, M. RENAUDIN

TIMA, Institut National Polytechnique de Grenoble, 46 avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex, France.

{fabien.aeschlimann, emmanuel.allier, laurent.fesquet, marc.renaudin}@imag.fr

**Résumé** – La tendance actuelle en microélectronique est d'intégrer des systèmes complexes sur une seule puce (« SoC » pour Systems on Chip) : capteur, convertisseur analogique-numérique (CAN), traitement numérique du signal, transmission de données. Ces systèmes doivent être peu coûteux, de taille réduite, faible bruit et surtout peu consommateur d'énergie parce qu'ils sont souvent alimentés par batteries. Parmi les étages cités, les CAN sont les plus difficiles à concevoir dans le respect du cahier des charges. Dans cette perspective, une nouvelle classe de convertisseur a été développée à partir de l'association de la technologie asynchrone et de l'échantillonnage non uniforme par traversée de niveaux. Le schéma d'échantillonnage est analysé pour les signaux périodiques mettant en évidence un repliement de spectre. Cependant l'étude de la reconstruction montre qu'un signal peut être reconstruit grâce à l'information portée par les intervalles de temps et ce malgré le repliement.

**Abstract** – *New microelectronic trends is to integrate complex systems on a single chip ("SoC" for System on Chip): sensor, analog-to-digital converter (ADC), digital signal processing, data transmission. These systems must be low-cost, reduced-sized, low-noise and especially low-power because they are often powered by batteries. Among all the existing blocks, ADCs are the most critical to design, respecting all these constraints. In this way, a new class of ADC has been developed combining asynchronous technology and non-uniform level-crossing sampling. The sampling scheme is analysed for periodic signal highlighting alias effects. However, the study of reconstruction showed that a signal can be recovered in spite of aliasing thanks to the information included in time intervals.*

## 1. Introduction

Notre travail contribue à un changement drastique des chaînes classiques de traitement numérique du signal. L'objectif principal est en effet de réduire leur consommation électrique par un, voire deux ordres de grandeur en repensant complètement leurs architectures et la théorie du signal associée. Dans cette perspective, il a été prouvé que la conception de circuits intégrés en technologie asynchrone [1], c'est-à-dire sans utilisation d'une horloge globale cadencant système, a permis d'améliorer les performances de convertisseurs analogique-numérique (CAN) classiques en les rendant plus sûrs vis-à-vis de la métastabilité et moins sensibles aux interférences électromagnétiques, en augmentant leur vitesse et en diminuant leur consommation électrique [2][3]. De plus, bien que la plupart des systèmes utilisant des CAN traite des signaux dont les propriétés statistiques sont intéressantes, aucune architecture de traitement du signal n'en tient vraiment compte. En réalité, ces signaux (comme la température, la pression, les électrocardiogrammes, la parole...) sont la plupart du temps constants mais peuvent varier fortement pendant une courte période. Ainsi, l'échantillonnage classique à pas constant, que l'on appellera *échantillonnage régulier*, et le système de conversion sont contraints par le théorème de Shannon : assurer que la fréquence d'échantillonnage soit au moins égale au double de la fréquence maximale du signal ; il s'agit là d'un pire cas d'échantillonnage.

De cette manière, notre approche du traitement du signal est de combiner la conception de circuits asynchrones avec des processus commandés par le signal lui-même afin de réduire l'activité dynamique et donc la consommation. Nous

souhaitons adapter dynamiquement l'échantillonnage à l'information présente dans le signal. Ainsi une nouvelle classe de CAN appelée CANA (pour *Asynchrone*) a été développée par le groupe CIS du laboratoire TIMA. Cette classe est fondée parallèlement sur une technique d'échantillonnage non uniforme par traversée de niveaux et sur une implémentation matérielle du circuit en technologie asynchrone.

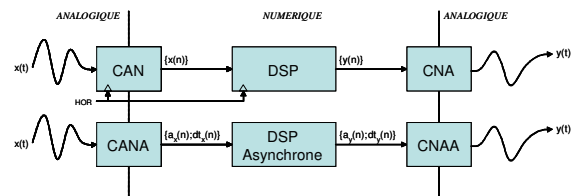


FIG. 1 : Approches parallèles d'une chaîne de traitement numérique du signal.

Par ailleurs, il est connu qu'échantillonner un signal et quelle que soit la technique utilisée induit des modifications spectrales pouvant parfois amener une perte d'information telle qu'il est impossible de retrouver les caractéristiques du signal. Dans cet article, nous nous focalisons donc sur le schéma d'échantillonnage par traversée de niveaux afin d'étudier ces modifications. Comme l'échantillonnage dépend du signal, et de ses variations, seuls seront considérés les signaux périodiques (et plus particulièrement les signaux sinusoïdaux) car leurs dérivées possèdent la propriété intéressante d'être elles-mêmes périodiques.

## 2. Conversion analogique-numérique asynchrone

Nous présentons succinctement dans cette partie la conversion asynchrone ainsi que la technique d'échantillonnage par traversée de niveaux.

En considérant un convertisseur dont la résolution est de  $M$  bits,  $L = 2^M - 1$  niveaux de quantification sont uniformément répartis le long de la dynamique  $E$  du signal d'entrée avec un pas de quantification (appelé *quantum*) :

$$q = \frac{E}{2^M - 1} \quad (1)$$

Un échantillon est alors prélevé lorsque le signal à temps continu  $x(t)$  traverse l'un des niveaux. Ainsi contrairement à l'échantillonnage régulier, les échantillons ne sont plus uniformément espacés dans le temps parce qu'ils dépendent des variations du signal (cf figure 2). Par conséquent, en plus de la valeur de l'échantillon  $ax_n$ , le temps  $tx_n$  écoulé depuis l'échantillon précédent  $ax_{n-1}$  doit être mesuré. Un timer de période  $T_C$  est donc dédié à cette tâche. L'amplitude de l'échantillon est alors précise mais l'intervalle de temps entre deux échantillons est quantifié en fonction de la précision  $T_C$  du timer. Le rapport signal sur bruit (RSB) ne dépend plus du nombre de niveaux de quantification mais uniquement de la valeur de  $T_C$ . Ainsi, pour une implémentation donnée du convertisseur, c'est-à-dire pour un nombre de niveaux fixé, le RSB peut être commandé en variant la valeur de la période du timer.

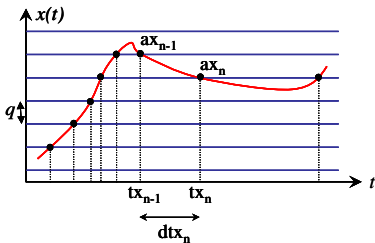


FIG. 2 : Echantillonnage non uniforme par traversée de niveaux.

Bien qu'il ne soit jamais disponible, nous supposons qu'à partir d'un temps initial  $t_0$ , l'instant d'échantillonnage du  $n^{\text{ième}}$  point noté  $tx_n$  peut être reconstruit par la relation :

$$tx_n = tx_{n-1} + dtx_n \quad (2)$$

## 3. Echantillonnage par traversée de niveaux d'un signal périodique

Dans cet article nous considérons un signal périodique  $x(t)$  définie par sa période fondamentale  $T_0 = 1/f_0$ .

### 3.1 Etude des intervalles de temps

L'échantillonnage par traversée introduit, par rapport à l'échantillonnage régulier classique, une nouvelle donnée : les intervalles de temps séparant les points prélevés. Bien qu'ils ne soient pas explicitement calculables car dépendant à la fois

des paramètres du signal et du convertisseur, ils peuvent être approché au 1<sup>er</sup> ordre par la relation suivante :

$$dtx_n \approx \frac{q}{\left| \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=tx_n}} \quad (3)$$

Les intervalles de temps sont liés à la valeur absolue de la dérivée du signal. Or la dérivée d'un signal périodique possède deux propriétés intéressantes :

- Elle est périodique de période  $T_0$  ;
- Elle est proportionnelle à la fréquence fondamentale du signal  $f_0$ .

De cette manière, les intervalles de temps sont également périodiques de période  $T_0$  et proportionnel à  $f_0$ .

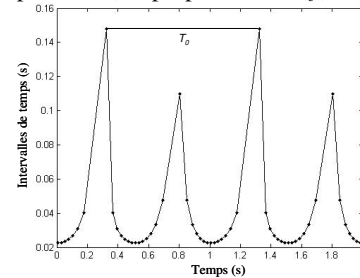


FIG. 3 : Intervalles de temps d'un signal sinusoïdal de fréquence 1Hz. Les intervalles ont une période de 1s.

### 3.2 Schéma d'échantillonnage

Dans le domaine temporel, il est connu que l'échantillonnage est équivalent à une multiplication entre le signal analogique et un peigne de Dirac, c'est-à-dire un train d'impulsions placées aux instants d'échantillonnage [5]. Dans le cadre de l'échantillonnage par traversée de niveaux, le peigne de Dirac noté  $S_F(t)$  dépend du signal :

$$S_F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - tx_n) \quad (4)$$

Ainsi le signal échantillonné s'écrit :

$$x_E(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ax_n \delta(t - tx_n) \quad (5)$$

En revanche dans le domaine fréquentiel, le spectre du signal analogique  $X(f)$  est convolué par la transformée de Fourier du peigne de Dirac notée  $S_E(f)$  et appelée *Schéma d'échantillonnage*. Comme les intervalles de temps sont périodiques de période  $T_0$ , le peigne est également périodique de période  $T_0$ . Par conséquent,  $S_E(f)$  peut être calculée par série de Fourier : il s'agit alors d'une somme d'harmoniques de fondamental  $f_0$  dont les amplitudes  $\hat{h}_n$  dépendent des caractéristiques du signal :

$$S_E(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{h}_n \delta(f - nf_0) \quad (6)$$

Le symbole  $\hat{\ }^{\wedge}$  est utilisé pour représenter la quantification du temps. En effet, comme les coefficients dépendent des

instants d'échantillonnage qui varient en fonction de la résolution du timer, il permet de généraliser la notation. De plus il a été démontré [4] que si tous les intervalles de temps étaient multiples d'une valeur (en l'occurrence la résolution du timer  $T_C$ ), le schéma d'échantillonnage était périodique de période l'inverse de cette valeur i.e  $1/T_C$ .

Au final  $S_E(f)$  est un spectre d'harmoniques de fréquence fondamentale  $f_0$  et de période  $1/T_C$ .

Le spectre du signal analogique étant lui-même un spectre d'harmoniques de fréquence fondamentale  $f_0$ . Le spectre du signal échantillonné  $X_E(f)$  est alors un spectre d'harmoniques repliés de fréquence fondamentale  $f_0$  et de période  $1/T_C$ :

$$\begin{aligned} X_E(f) &= X(f) * S_E(f) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \delta(f - nf_0) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{h}_m \delta(f - mf_0) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_n \hat{h}_m \delta(f - (n+m)f_0) \end{aligned} \quad (7)$$

L'équation 7 montre effectivement que l'amplitude de chaque harmonique du spectre du signal échantillonné est une combinaison linéaire de toutes les amplitudes du signal analogique. Le spectre est replié : il y a donc perte d'information.

### 3.3 Transformée de Fourier discrète Généralisée

Nous proposons de retrouver le résultat décrit par l'équation 7 grâce à la Transformée de Fourier Généralisée [4]. En effet, dérivée de la traditionnelle Transformée de Fourier Discrète, elle permet de calculer le spectre d'un signal échantillonné non uniformément à partir d'une séquence de  $N$  points consécutifs :

$$\tilde{X}_E(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N a x_n e^{-j2\pi f x_n} \quad (8)$$

A titre d'exemple, un signal sinusoïdal de fréquence 1Hz est échantillonné par un convertisseur 4 bits (15 niveaux) utilisant un timer de résolution 100Hz. Le fenêtrage est effectué par une fonction porte dont la largeur est un multiple entier de la période afin de limiter les effets de fuite d'énergie. Le schéma d'échantillonnage calculé en simulation est conforme à celui obtenu en théorie puisqu'il est de fréquence fondamentale 1Hz et périodique de période 100Hz.

Parallèlement, les simulations montrent que le spectre du signal échantillonné est systématiquement replié. Ainsi d'une part l'erreur introduite sur les harmoniques du signal empêche de retrouver ses caractéristiques et d'autre part les amplitudes élevées des harmoniques parasites induisent une indétermination sur le nombre exacte de composantes présentes dans le signal. Dans notre exemple, l'erreur sur le fondamental est de 4,2dB tandis que la première harmonique parasite est 1,5dB plus grande que le fondamental.

Ceci prouve que la Transformée de Fourier Généralisée ne peut pas être utilisée pour analyser le spectre d'un signal à partir de ses échantillons obtenus par traversée de niveaux. En effet, cette technique attribue implicitement la même valeur

informative à chaque point sans tenir compte des intervalles de temps pourtant porteurs d'information (cf équation 7).

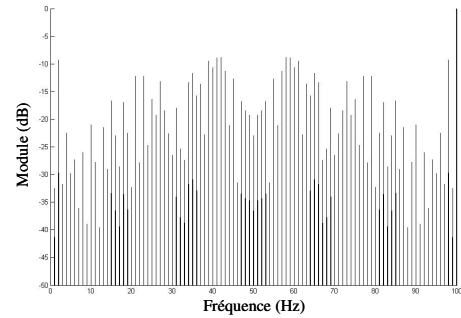


FIG. 4 : Schéma d'échantillonnage d'un signal sinusoïdal de 1Hz échantillonné par un convertisseur 4 bits utilisant un timer à 100Hz

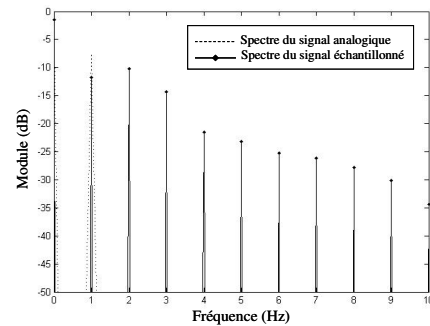


FIG. 5 : Transformée de Fourier Généralisée d'un signal sinusoïdal de 1Hz échantillonné par un convertisseur 4 bits.

## 4. Analyse spectrale du signal reconstruit

Pour que l'analyse spectrale d'un signal analogique à partir de ses échantillons soit efficace, il faut que l'information portée dans les intervalles de temps soit utilisée. L'idée consiste donc à pondérer, dans la Transformée de Fourier Généralisée, chaque échantillon  $a x_n$  par une fonction particulière dont l'unique paramètre est l'intervalle de temps  $dx_n$ . Dans ce but, il suffit de considérer l'opération de reconstruction car le signal étant échantillonné non uniformément, elle doit obligatoirement être adaptée aux intervalles de temps. Dans cet article seul le bloqueur d'ordre 0 est analysé car il représente la technique la plus utilisée en conversion numérique-analogique.

### 4.1 Reconstruction par bloqueur d'ordre 0

Avec un bloqueur d'ordre 0, le signal reconstruit est obtenu par convolution entre le signal échantillonné  $x_E(t)$  et des fonctions rectangulaires dont les largeurs dépendent des intervalles de temps :

$$x_o(t) = x_E(t) * \Pi(t) \quad (9)$$

Une fonction rectangulaire est définie pour n'importe quel réel  $\theta$  par :

$$\Pi_{\theta}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in \left[-\frac{\theta}{2}; \frac{\theta}{2}\right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (10)$$

En centrant chaque fonction porte entre les points  $ax_n$  et  $ax_{n-1}$ , le signal reconstruit peut alors s'écrire :

$$x_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ax_n \Pi_{\theta} \left( t - tx_n + \frac{dtx_n}{2} \right) \quad (11)$$

Puis grâce aux propriétés de linéarité et de translation de la transformée de Fourier, le spectre du signal reconstruit est déduit de l'équation 11 :

$$X_o(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ax_n W_n^0(f) e^{-j2\pi f tx_n} \quad \text{pour tout } f \in \mathfrak{R} \quad (12)$$

où  $W_n^0(f)$  représente la pondération à l'ordre 0 du n<sup>ième</sup> échantillon :

$$W_n^0(f) = dtx_n e^{-j\pi f dtx_n} \text{sinc}(\pi f dtx_n) \quad (13)$$

En simulation, le signal échantillonné est tronqué par une fenêtre rectangulaire de largeur  $T$  permettant le traitement d'une séquence de  $N$  points consécutifs :

$$\tilde{X}_o(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} ax_n W_n^0(f) e^{-j2\pi f tx_n} \quad (14)$$

## 4.2 Résultats et discussion

Le même exemple traitant un signal sinusoïdal est analysé. Les résultats montrent que l'erreur sur l'amplitude du fondamental passe de 4,2dB à 0,2dB tandis que l'harmonique 2 est rejetée à -39,7dB au lieu de +1,5dB avec la Transformée de Fourier Généralisée.

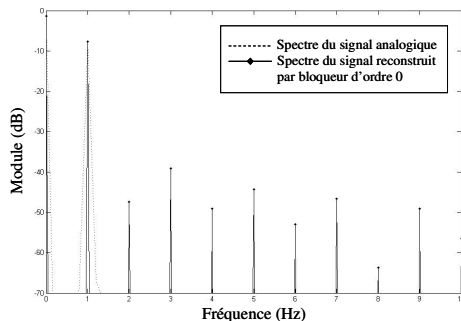


FIG. 6 : Transformée de Fourier d'un signal sinusoïdal de 1Hz échantillonné par un convertisseur 4 bits puis reconstruit.

Le spectre du signal reconstruit permet donc de retrouver toutes les caractéristiques du signal (amplitudes, fréquence) avec une précision acceptable grâce à la pondération. La perte d'information générée lors l'échantillonnage par traversée de niveaux n'est en fait qu'apparente car le processus de reconstruction est non linéaire. En effet, dans le cas classique de l'échantillonnage régulier, la reconstruction est un système linéaire et invariant dans le temps [5]. Il y a donc une réponse impulsionnelle unique (une fonction rectangulaire de largeur

la période d'échantillonnage par exemple pour le bloqueur d'ordre 0) et donc une seule réponse en fréquence filtrant le spectre du signal échantillonné. Dans cette situation, le repliement est préjudiciable. En revanche, avec l'échantillonnage par traversée de niveaux, la reconstruction utilise plusieurs réponses impulsionnelles. En fréquence, elle n'est donc plus assimilable à une opération de filtrage ; l'étude préalable du repliement devient alors secondaire. En revanche, la précision de la reconstruction devient une étude prioritaire : en effet, la précision fluctue en fonction des intervalles de temps, et donc des variations du signal. Or les variations dépendent des composantes du signal et de leurs amplitudes. Le choix du quantum détermine donc la précision. Nous pensons sur ce point qu'il existe un critère théorique, reliant le quantum au signal, permettant de borner l'erreur de reconstruction.

Ainsi sous couvert de respecter ce critère, il est possible de concevoir une chaîne de traitement du signal basé sur l'échantillonnage non uniforme par traversée de niveaux pour échantillonner un signal, le traiter, le reconstruire avec une précision garantie.

## 5. Conclusion

Dans cet article, nous présentons une nouvelle classe de convertisseurs analogique-numérique basée sur un principe d'échantillonnage non uniforme appelé traversée de niveaux. Nous prouvons que le spectre de signaux périodiques échantillonnés est replié. Cependant en étudiant la reconstruction, nous montrons que la perte d'information peut être compensée par l'utilisation des intervalles de temps mesurés lors de l'échantillonnage. Une chaîne complète est en cours de réalisation pour montrer que notre approche conduit à une réduction significative de la consommation électrique, rendant cette technologie très attractive pour le domaine de la conception des systèmes sur puces.

## Références

- [1] M. Renaudin, "Asynchronous Circuits and Systems: a Promising Design Alternative", *Journal of Microelectronic Engineering*, Vol. 54, pp. 133-149, 2000.
- [2] E. Allier, L. Fesquet, G. Sicard, M. Renaudin, "Low Power Asynchronous A/D Conversion", *Proceedings of the 12th International Workshop on Power and Timing, Modeling, Optimization and Simulation (PATMOS'02)*, September 11-13 2002, Sevilla, Spain.
- [3] E. Allier, G. Sicard, L. Fesquet, M. Renaudin, "A New Class of Asynchronous A/D Converters Based on Time Quantization", *ASYNC Proceedings*, pp. 197-205, May 12-16 2003, Vancouver, Canada.
- [4] P.C. Bagshaw, M. Sarhadi, "Analysis of samples of wideband signals taken at irregular sub-Nyquist intervals", *IEE Electronic Letters*, Vol. 27, n°14, pp. 1228-1230, July 1991.
- [5] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, I.T. Young, "Signals and Systems", *Prentice-Hall Signal Processing Series*, 1995.