

Etude des fonctions B-splines non-uniformes pour la reconstruction d'un signal discret à partir d'un échantillonnage irrégulier

N. Chihab, A. Zergainoh, J.-P. Astruc

L2TI, Institut Galilée, Université Paris 13,
99, Avenue Jean Baptiste Clément, 93 430 Villetaneuse France

E-mail : najat.chihab@l2ti.univ-paris13.fr

Résumé – Cet article traite le problème de la reconstruction d'un signal discret à partir de ses échantillons prélevés à des instants irréguliers. La méthode proposée est une méthode de reconstruction locale basée sur des fonctions B-splines non-uniformes. Sous certaines contraintes (multiplicité imposée aux nœuds, support minimal), nous généralisons la construction des éléments de la base de la fonction spline. Quel que soit le degré de la fonction spline, nous montrons que deux nœuds sont suffisants pour une reconstruction locale du signal. Nous généralisons le calcul des coefficients de la fonction spline. Une extension de la méthode à un signal bidimensionnel est proposée. Les résultats des simulations sont satisfaisants.

Abstract – This paper is concerned with the problem of recovering a discrete signal from a set of irregular spaced samples. The proposed method is a local reconstruction method based on non-uniform B-spline functions. Under specific constraints (multiplicity order imposed on the knots, minimal support), we generalize the construction of the basis elements of the spline function. Whatever the degree of the spline function, we show that, only two knots are enough for a local reconstruction of the signal. We provide a generalization to determine the spline function coefficients. An extension of the method to a two-dimensional signal is proposed. The results of simulation are satisfactory.

1. Introduction

Les outils théoriques développés dans le domaine du traitement numérique du signal sont basés sur un échantillonnage uniforme des données. Néanmoins, dans certaines situations l'échantillonnage associé au signal à traiter n'est pas uniforme. En effet, dans plusieurs domaines d'applications (géophysique, astronomie, météorologie, ...) l'échantillonnage non-uniforme des signaux se constitue naturellement puisqu'il n'est pas toujours possible de récupérer des mesures à des instants réguliers. Des facteurs externes font que la mesure ne peut pas être disponible à un instant précis. Citons un exemple dans le domaine de l'astronomie où les mesures régulières de la brillance d'une étoile peuvent être perturbées par la présence de nuages. En plus de l'indisponibilité du signal à des instants réguliers, la disparition brusque de l'information à des instants quelconques (par exemple dans le cas d'une transmission dans le domaine des télécommunications) transforme l'échantillonnage initial (uniforme) en un échantillonnage non-uniforme. Il est également possible, dans le cadre de la compression des données, de construire volontairement un échantillonnage composé d'échantillons extraits à des instants irréguliers. Cette procédure permet de réduire la redondance de l'information.

Il s'avère alors nécessaire de développer des méthodes de reconstruction de signaux discrets à partir d'un échantillonnage composé d'échantillons prélevés à des instants non-uniformes. Plusieurs méthodes d'interpolation ont été proposées dans le cadre de la reconstruction d'un signal continu à partir de données discrètes ([1], [2], [3]). Les fonctions d'interpolation, polynomiales par morceaux, basées sur les B-splines uniformes ont eu un grand succès ([4], [5]). Unser et al ont ensuite développé des méthodes de reconstruction de signaux discrets à partir d'un échantillonnage uniforme ([6], [7]). Dans cet article, nous

nous intéressons au problème de la reconstruction d'un signal discret à partir de ses échantillons prélevés à des instants irréguliers. Nous supposons que ces instants sont connus et sont des multiples entiers de la période d'échantillonnage du signal.

Cet article est organisé comme suit. Nous introduisons tout d'abord la méthode locale de reconstruction basée sur la fonction spline. Les fonctions B-splines non-uniformes sont ensuite décrites. Leurs propriétés fondamentales sont présentées. Dans la section 3, nous généralisons la construction des éléments de la base de la fonction spline. Le calcul des coefficients de la spline est présenté dans la section 4. Une extension des résultats au signal bidimensionnel est fournie dans la section 5. Nous terminons par des résultats de simulations.

2. Reconstruction à partir de fonctions B-splines non-uniformes

La méthode de reconstruction choisie est basée sur des fonctions polynomiales par morceaux. Parmi la grande famille de fonctions polynomiales (Lagrange, Hermite, ...), nous choisissons les fonctions splines. En effet, ces fonctions présentent plusieurs propriétés intéressantes ([1], [3], [4]). Comparées aux polynômes de Lagrange, elles éliminent les effets indésirables liés aux oscillations.

Considérons un ensemble d'échantillons prélevés à des instants différents. Ces instants sont connus et ne sont pas nécessairement réguliers. Ils sont appelés nœuds. La fonction spline de degré n , calculée au nœud x , est donnée par l'équation :

$$s(x) = \sum_{j=i}^{i+n-1} a_j B_{j,k}(x) \quad (1)$$

C'est une combinaison linéaire de n fonctions $B_{j,k}(x)$, appelées B-splines non-uniformes, pondérées par des

coefficients a_j . Les n éléments $B_{j,k}(x)$ constituent la base de la fonction spline. Dans ce qui suit, nous présentons succinctement les propriétés fondamentales des fonctions B-splines dans le cas d'une répartition non-uniforme des échantillons.

2.1. Les B-splines non-uniformes

Considérons un ensemble de $k+2$ échantillons, déterminés à $k+2$ instants ou nœuds différents. Ces nœuds sont notés t_j avec $j \leq i \leq j+k+1$. Pour tout $x \in R$, on note la j -ème fonction B-spline non-uniforme d'ordre $k+1$ (ou de degré k) par $B_{j,k}(x)$. Elle est parfois notée $B_{j,k,t}(x)$. Celle-ci est construite à partir de l'opérateur des différences divisées noté $[t_j, \dots, t_{j+k+1}]$. Cet opérateur est appliqué à la fonction $t \rightarrow (t-x)_+^k$ où $(t-x)_+^k = (\max(t-x, 0))^k$ ([8]) :

$$B_{j,k}(x) = (t_{j+k+1} - t_j)[t_j, \dots, t_{j+k+1}](\cdot - x)_+^k \quad (2)$$

Rappelons la définition de l'opérateur des différences divisées appliqué à la fonction $t \rightarrow (t-x)_+^k$:

$$[t_j, \dots, t_{j+k+1}](\cdot - x)_+^k = (t_{j+k+1} - t_j)^{-1} ([t_{j+1}, \dots, t_{j+k+1}](\cdot - x)_+^k - [t_j, \dots, t_{j+k}](\cdot - x)_+^k)$$

Les B-splines peuvent être aussi définies par récurrence selon les équations ci-dessous ([8], [9]) :

$$B_{j,0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t_j \leq x < t_{j+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$B_{j,k}(x) = \omega_{j,k} B_{j,k-1} + (1 - \omega_{j+1,k}) B_{j+1,k-1}$$

sachant que :

$$\omega_{j,k}(x) = \frac{x - t_j}{t_{j+k} - t_j}, \text{ pour } k > 0.$$

Unser et al ([10]) ont montré que l'équation (2) s'écrit également :

$$B_{j,k}(x) = (t_{j+k+1} - t_j) \sum_{i=j}^{j+k+1} \frac{(x - t_i)_+^k}{\prod_{l=j, l \neq i}^{j+k+1} (t_l - t_i)}$$

pour tout $x \in [t_j, \dots, t_{j+k+1}]$ (3)

La B-spline $B_{j,k}(x)$ est représentée par un polynôme par morceaux de degré k . La figure 1 présente un exemple de fonction B-spline de degré 2. La courbe $B_{j,2}(x)$ est représentée, sur chacun des 3 segments $(\lambda_j, \lambda_{j+1})$, $(\lambda_{j+1}, \lambda_{j+2})$ et $(\lambda_{j+2}, \lambda_{j+3})$, par un polynôme de degré 2.

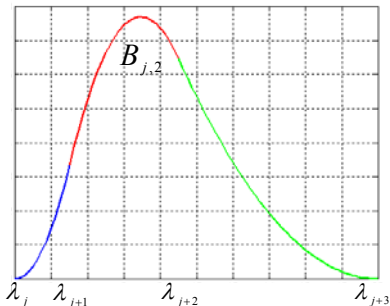


Fig. 1 : La j -ème B-Spline non-uniforme de degré 2.

2.2. Propriétés fondamentales des B-splines non-uniformes

La fonction B-spline présente de nombreuses propriétés intéressantes ([4]). Nous présentons dans ce paragraphe quelques-unes de ses propriétés. Considérons la j -ème B-spline $B_{j,k}$.

- Son support est fini : $B_{j,k}(x) = 0$ pour tout $x \notin [t_j, \dots, t_{j+k+1}]$.
- Elle est positive : $B_{j,k}(x) > 0$ pour tout $x \in]t_j, \dots, t_{j+k+1}[$.
- La fonction B-spline $B_{j,k}(x)$ est continue et indéfiniment dérivable à droite, pour tout $x \in R$. La dérivée de $B_{j,k}(x)$ est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{dB_{j,k}(x)}{dx} = k \left[\frac{B_{j,k-1}(x)}{t_{j+k} - t_j} - \frac{B_{j+1,k-1}(x)}{t_{j+k+1} - t_{j+1}} \right] \quad (4)$$

- La fonction B-spline est intégrable ([8], [9]).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B_{j,k}(x) dx = \frac{1}{k+1} (t_{j+k+1} - t_j) \quad (5)$$

- La fonction B-spline normalisée, notée $M_{j,k}(x)$, est donnée par :

$$M_{j,k}(x) = \frac{k+1}{(t_{j+k+1} - t_j)} B_{j,k}(x) \quad (6)$$

- Un nœud est dit de multiplicité r si les r nœuds sont confondus ($t_j = t_{j+1} = \dots = t_{j+r-1}$). La j -ème B-spline calculée au nœud t_j (de multiplicité simple) est nulle ($B_{j,k}(t_j) = 0$). Par contre si le nœud t_j est de multiplicité $k+1$ ([8], [9]), la B-spline calculée au nœud t_j vérifie $B_{j,k}(t_j) = 1$. En effet, ce résultat est obtenu en appliquant l'équation (7) des différences divisées dans le cas de nœuds multiples [8].

$$[t_0, \dots, t_r]f = \frac{f^{(r)}(t_0)}{r!} \text{ si } t_0 = \dots = t_r \quad (7)$$

- Si on suppose que le nœud t_j est un nœud de multiplicité μ , alors la j -ème B-spline est de classe $C^{k-\mu}$ en t_j .

- Si t_j est un nœud de multiplicité $\geq k+2$, alors $B_{j,k}(x)$ est nulle.

- Soient t une séquence croissante $\{t_1, \dots, t_{l+1}\}$ et r une séquence d'entiers positifs $\{r_2, \dots, r_l\}$ avec $r_j \leq k$ pour $j = 2, \dots, l$. On note $\Pi_{k,t,r}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré k , ayant un raccord de classe C^{r-1} au nœud t_j . La dimension de cet espace vectoriel est alors donnée par :

$$\dim(\Pi_{k,t,r}) = n = (k+1)l - \sum_{j=2}^l r_j \quad (8)$$

avec $0 \leq r_j \leq k$

Le choix de la multiplicité d'un nœud impose des contraintes sur la continuité de la fonction spline en ce nœud. En effet, l'équation (9) donne la relation qui lie la continuité des dérivées successives (r_j) d'un nœud t_j à sa multiplicité (μ_j) :

$$r_j + \mu_j = k+1 \quad (9)$$

- Les fonctions B-splines constituent une base de l'espace vectoriel $\Pi_{k,t,r}$.

- Les éléments de la base $B_{j,k}$ forment une partition de l'unité :

$$\sum_{j=i}^{i+n-1} B_{j,k}(x) = 1 \text{ pour tout } x \in [t_j, \dots, t_{j+k+n}[$$

3. Construction des B-splines non-uniformes

Nous proposons dans ce paragraphe d'adapter les éléments de la base à notre application. Rappelons que si un nœud est de multiplicité simple ($x = t_j$) alors $B_{j,k}(t_j) = 0$. D'après les équations (1) et (3), nous en déduisons que $s(t_j) = 0$. Cette situation n'est pas réaliste. Pour y remédier, il est nécessaire d'imposer une multiplicité au nœud t_j égale à $k+1$ (voir propriétés). Chaque fonction B-spline $B_{j,k}(x)$ nécessite $k+2$ nœuds (voir équation). Pour définir la fonction spline sur un support minimal, les n B-splines ne doivent utiliser que $n+k+1$ nœuds. Pour maintenir la dimension de l'espace de la base, nous devons satisfaire l'équation (8). Nous montrons, dans ce cas, que les n nœuds restant doivent être confondus.

Pour imposer les contraintes citées ci-dessus à l'équation (2), notons les $k+1$ premiers nœuds confondus par λ_j ($\lambda_j = t_j = t_{j+1} = \dots = t_{j+k}$) et les n derniers nœuds confondus par λ_{j+1} ($\lambda_{j+1} = t_{j+k+1} = \dots = t_{j+k+n}$). Nous fournissons alors la généralisation des éléments de la base par l'équation suivante :

$$B_{i,k}(x) = \binom{k}{i} \left(1 - \frac{x - \lambda_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j}\right)^{k-i} \left(\frac{x - \lambda_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j}\right)^i$$

pour $0 \leq i \leq k$ et $\lambda_j \leq x \leq \lambda_{j+1}$ (10)

où $\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$ représente le coefficient binomial.

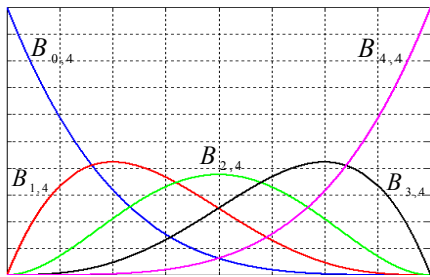


Fig. 2 : Eléments de la base de la fonction spline de degré 4.

La figure 2 présente les 5 éléments $\{B_{i,4}(x)\}$ de la base de la fonction spline de degré 4 pour une répartition non-uniforme $\{\lambda_j = 1, \lambda_{j+1} = 5\}$.

Pour le cas particulier où les nœuds $\lambda_j = 0$ et $\lambda_{j+1} = 1$, nous remarquons que les fonctions de la base, données par l'équation (10), se ramènent aux polynômes de Bernstein :

$$B_i^k(x) = \binom{k}{i} (1-x)^{k-i} x^i \quad (0 \leq i \leq k) \text{ et } 0 \leq x \leq 1$$

4. Calcul des coefficients de la fonction spline

La fonction spline construite à partir des éléments de la base spécifiée au paragraphe précédent est donnée par :

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i B_{i,k}(x) \text{ pour } \lambda_j \leq x \leq \lambda_{j+1}$$

Dans le cadre de notre application nous avons imposée une multiplicité de $k+1$ en chaque nœud $\{\lambda_j, \lambda_{j+1}\}$. D'après l'équation (8), nous déduisons que la dimension de l'espace vectoriel se ramène à $n = k+1$.

Ce paragraphe propose de calculer les $k+1$ coefficients $\{a_i, i=0, \dots, k\}$ de la fonction spline. Le premier coefficient a_0 et le dernier coefficient a_k de la fonction spline sont déterminés par interpolation puisque $a_0 = s(\lambda_j)$ et que $a_k = s(\lambda_{j+1})$. Les coefficients intermédiaires sont déterminés à partir des dérivées d'ordre successif de la fonction spline. L'équation (11) généralise le calcul de la dérivée d'ordre p ([9]) :

$$s^{(p)}(x) = \frac{k!}{(k-p)! (\lambda_{j+1} - \lambda_j)^p} \sum_{i=0}^{k-p} B_{i,k-p}(x) \Delta^{(p)} a_i \quad (11)$$

$$\text{où } \Delta^{(p)} a_i = \sum_{j=0}^p (-1)^{p-j} \binom{p}{j} a_{i+j}.$$

Les différentes étapes nécessaires pour la reconstruction d'un signal sont résumées par le schéma bloc de la figure 3.

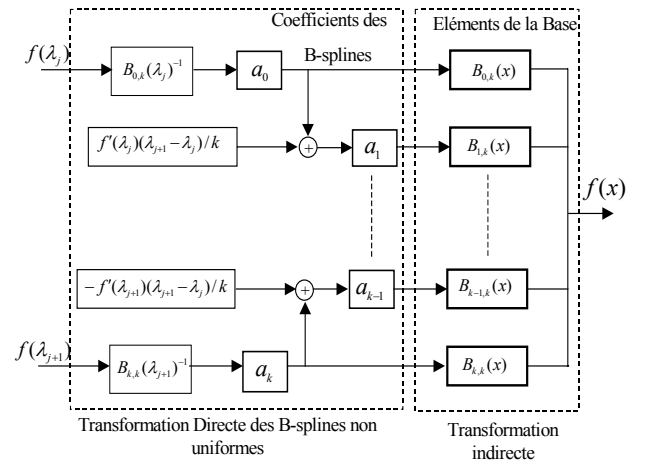


Fig. 3 : Reconstruction par des B-splines non-uniformes

5. Extension à une surface spline

L'extension de la méthode de reconstruction au cas bidimensionnel est présentée dans cette partie. Considérons deux suites de nœuds $u = (u_i)_{0 \leq i \leq m+k}$, $v = (v_j)_{0 \leq j \leq n+l}$ vérifiant $u_i \leq u_{i+1}$ et $v_j \leq v_{j+1}$. Soient $B_{i,k}(u)$ et $B_{j,l}(v)$ les B-splines relatives aux séquences $u = (u_i)_{0 \leq i \leq m+k}$ et $v = (v_j)_{0 \leq j \leq n+l}$.

La surface spline, notée $S(u, v)$, est définie par :

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} P_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,l}(v) \quad (12)$$

La surface spline $S(u, v)$ est construite à partir de polynômes de degré $k+l$. Le sous-espace vectoriel des fonctions sur $[a, b] \times [c, d]$, engendré par les $B_{i,k}(u) B_{j,l}(v)$ tel que $(0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1)$, s'appelle le produit tensoriel des espaces $\Pi_{k,u}$ et $\Pi_{l,v}$.

$\Pi_{k,u}$ (respectivement $\Pi_{l,v}$) désigne l'espace vectoriel des fonctions polynomiales par morceaux de degré k (respectivement l) sur l'intervalle $[a, b]$ (respectivement $[c, d]$). De ce fait, le calcul des coefficients de la surface spline $P_{i,j}$ se calque sur les calculs des coefficients de la fonction spline unidimensionnel présenté par le paragraphe précédent.

6. Discussions et simulations

Les tests de la simulation de notre méthode de reconstruction sont réalisés tout d'abord sur un signal unidimensionnel (sur un profil horizontal quelconque d'une image). L'échantillonnage irrégulier est constitué de 45% d'échantillons. La figure 4 présente le signal reconstruit pour un degré de la fonction spline égal à 4.

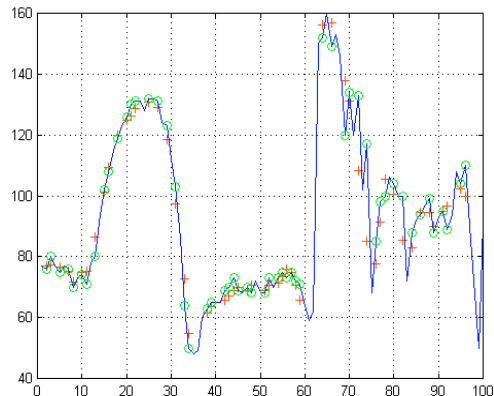


Fig. 4 : Reconstruction par la fonction spline d'ordre 4. Trait continu : signal initial; o : Echantillons supprimés; + : Echantillons reconstruits.

Nous présentons des simulations de l'extension de cette méthode au cas bidimensionnel. Les figures 5, 6 et 7 présentent respectivement l'image initiale (Lena, de taille 256×256 pixels), l'image sous-échantillonnée (50 % de points retenus) et l'image reconstruite. Pour cet exemple, le degré de la surface spline est égal à 2. La qualité visuelle de l'image reconstruite est satisfaite pour ce taux de pixels retenus.



Fig. 5 : Image initiale « Lena »

La méthode proposée sur les fonctions B-splines non-uniformes est une méthode de reconstruction locale. Elle est adaptée à des signaux discrets dont l'échantillonnage n'est pas régulier. Quel que soit le degré de la fonction B-spline, deux nœuds suffisent pour la reconstruction d'un point. Le calcul des coefficients des B-splines est très simple.

Dans le cadre d'une application en compression des images, il serait intéressant d'étudier le comportement de la méthode de reconstruction lorsque l'image sous-échantillonnée est représentée par très peu de pixels (taux de compression élevé). Pour améliorer la qualité de l'image reconstruite, on pourrait également agir sur le degré de la spline bidimensionnelle. Le choix des pixels pourrait être conditionné par la méthode de reconstruction. En effet, les pixels à retirer de l'image initiale sont ceux qui introduisent une erreur de reconstruction très faible.



Fig. 6 : Image sous-échantillonnée (50% de pixels retenus)



Fig. 7 : Image reconstruite

References

- [1] P. Thévenaz, T. Blu, M. Unser. Interpolation Revisited. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 19, no. 7, pp. 739-758, July 2000.
- [2] T. M. Lehmann. Survey : Interpolation methods in medical image processing. *IEEE transactions on medical imaging*. vol. 18 no 11, November 1999.
- [3] P. Thévenaz, T. Blu, M. Unser. Image Interpolation and Resampling. *Handbook of Medical Imaging, Processing and Analysis*, I.N. Bankman, Ed., Academic Press, San Diego CA, USA, pp. 393-420, 2000.
- [4] M. Unser. Ten Good Reasons for Using Spline Wavelets. *Proceedings of the SPIE Conference on Mathematical Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing V*, San Diego CA, USA, vol. 3169, pp. 422-431, July 30-August 1, 1997.
- [5] M. Unser. Splines : A Perfect Fit for Signal and Image Processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 16, no. 6, pp. 22-38, November 1999.
- [6] M. Unser, A. Aldroubi, M. Eden. B-Spline Signal Processing : Part I—Theory. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 2, pp. 821-833, February 1993.
- [7] M. Unser, A. Aldroubi, M. Eden. B-Spline Signal Processing : Part II—Efficient Design and Applications. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 2, pp. 834-848, February 1993.
- [8] C. De Boor. A practical guide to splines, revised edition. Ed. Newyork, springer- verlag, 2001.
- [9] J.-J. Risler. Méthodes mathématiques pour la CAO. Masson, Paris, 1991.
- [10] M. Barrutia, T. Blu, M. Unser. Non-Uniform to Uniform Grid Conversion Using Least-Squares Splines. *Proceedings of the Tenth European Signal Processing Conference (EUSIPCO'00)*, vol. IV, pp. 1997-2000, Tampere, Finland, September 4-8, 2000.