

# Factorisation spectrale: le cas non rationnel

Philippe MOUYON, Nicole IMBERT

ONERA/Département de Commande des Systèmes et Dynamique du vol  
B.P. 4025, 31055 Toulouse, France

Philippe.Mouyon@cert.fr, Nicole.Imbert@cert.fr

**Résumé** – L'article présente une procédure de factorisation spectrale pour les signaux aléatoires de spectre non rationnel. Elle repose sur une représentation stochastique diffusive de dimension infinie du signal. Son calcul fait intervenir la résolution d'une équation de Riccati non standard pour laquelle on prouve l'existence d'une solution. Les approximations d'ordre fini proposées permettent la simulation sous forme Markovienne du signal dans une bande fréquentielle librement choisie. La méthode s'applique aux modèles spectraux connus sous forme analytique mais aussi à ceux calculés par analyse spectrale. Une application à la simulation de la turbulence vu par un avion est présentée.

Les points clefs sont : la représentation stochastique diffusive des processus aléatoires, son approximation d'ordre fini sur une bande fréquentielle, le contrôle de la précision via le choix de la dimension.

**Abstract** – This paper presents a procedure for the spectral factorization of non rational spectra. It is based on an infinite dimensional stochastic diffusive representation of the signal. The algorithm involves a non standard Riccati equation for which the existence of a solution is proved. Markovian finite dimensional approximations are proposed that allow the efficient simulation of such processes over a freely chosen frequency band. The approach applies to analytic or experimental spectra as well. An application to the simulation of the turbulence encountered by an aircraft is presented.

## 1 Introduction

### 1.1 Motivation

Les travaux présentés dans cet article ont pour finalité pratique l'amélioration de la représentativité des simulateurs d'avions en présence de turbulence. Pour ce faire on est amené à développer des modèles Markoviens des perturbations aérodynamiques dont les spectres ne sont pas rationnels. Dans le cas présent on s'intéresse en particulier à un couple perturbateur en roulis, noté  $p_{vent}$ , qui est induit par une répartition non uniforme du vent le long de l'aile.

Notre objectif est donc de construire un simulateur permettant de générer des signaux aléatoires  $p_{vent}$  ayant les mêmes caractéristiques spectrales que les signaux estimés à partir des mesures faites en vol. Pour atteindre cet objectif la démarche proposée consiste en trois points: Reconstituer les signaux  $p_{vent}$  par une analyse des essais en vol, réaliser une analyse spectrale de ces signaux, et enfin générer le modèle Markovien correspondant.

### 1.2 Méthode

Des essais spécifiques de l'étude des signaux  $p_{vent}$  ont été réalisés. Pour ces essais la composante verticale de la turbulence  $W(t, \Delta y)$  est mesurée en différents points de l'aile (le bras de levier par rapport à l'axe longitudinale de l'avion est noté  $\Delta y$ ). On peut alors estimer le signal  $p_{vent}(t)$  à partir des mesures  $W_i(t)$  réparties sur l'aile selon la formule:

$$p_{vent}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{W_i(t)}{\Delta y_i} \quad (1)$$

où  $N$  est le nombre de mesure. Cette formule se justifie en assimilant le profil de turbulence à un gradient de vent, c'est-à-dire

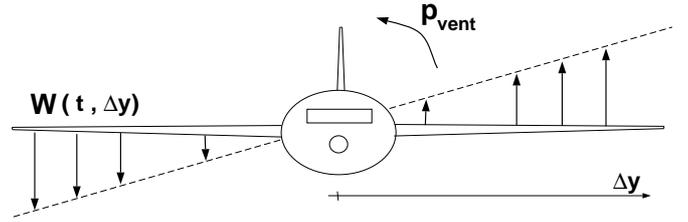


FIG. 1 – Couple induit par le vent vertical non uniforme

en supposant que  $W(t, \Delta y) = p_{vent}(t) \Delta y$ . L'origine principale du couple  $p_{vent}$  est en effet à rechercher dans le gradient, le long de l'aile, de la composante verticale du vent turbulent (figure 1).

Par ailleurs nous disposons aussi d'autres essais, non spécifiques de l'étude du  $p_{vent}$ , pour lesquels l'utilisation d'une technique d'inversion [1] donne des estimations du couple perturbateur  $p_{vent}$ .

L'analyse spectrale de tous ces signaux montre que, comme pour les modèles théoriques [2, 3], les spectres ne sont pas rationnels. L'approximation par des modèles rationnels via une étape d'identification posent des problèmes de contrôle de la stabilité et de la précision souvent difficiles à maîtriser dans un contexte industriel. Nous proposons ici une méthode qui ne présente pas ces inconvénients. Son caractère systématique est cependant obtenu au détriment de la dimension du modèle qui peut être relativement élevée.

D'un point de vue méthodologique, l'approche repose sur une technique de factorisation spectrale pour les spectres non rationnels. Ce problème est présenté dans la section 2. Dans la section 3 nous développons une solution approchée dans une bande de fréquence. Quelques points particuliers sont ensuite discutés (section 4), avant de présenter l'application.

## 2 La factorisation spectrale

### 2.1 Etat de l'art

Pour générer un signal  $y$  de spectre  $\Phi(\omega)$  donné, on cherche un système dynamique  $y(t) = \int h(t - \tau)b(\tau)d\tau$  tel que, si  $b(\tau)$  est un bruit blanc normalisé,  $y$  a pour spectre  $\Phi(\omega)$ . C'est un problème de dit de factorisation spectrale. En effet, le spectre de  $y$  est  $\Phi_{yy}(\omega) = |H(j\omega)|^2$ , où  $H$  est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle  $h$  du filtre cherché :  $H(j\omega) = \mathcal{F}(h)$ . On trouve donc  $h(t)$  tel que  $\Phi_{yy} = \Phi$  en factorisant  $\Phi$ .

Pour une classe assez générale de signaux aléatoires on connaît une condition nécessaire et suffisante pour que cette factorisation existe. C'est la *Condition de Paley-Wiener*: le spectre  $\Phi(\omega) \in L_1$  d'un processus continu du second ordre stationnaire admet une factorisation sous forme d'un filtre linéaire si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Log}\Phi(\omega)}{1 + \omega^2} d\omega > -\infty \quad (2)$$

Un autre cas bien connu est celui des spectres rationnels: le spectre  $\Phi(\omega)$  admet une factorisation sous la forme d'un filtre linéaire de dimension finie si et seulement si il est rationnel. Hors de ce cadre rationnel, le problème de la factorisation spectrale n'est pas résolu dans sa généralité.

### 2.2 Modèle diffusif

Les modèles diffusifs permettent la représentation sous forme d'état de filtres linéaires dont la fonction de transfert n'est pas rationnelle [4]. Notre objectif est d'étendre cette approche à la représentation spectrale. Nous avons donc cherché si, pour un spectre non rationnel  $\Phi$  donné, une factorisation sous la forme d'un modèle diffusif pouvait exister.

Un filtre diffusif est un filtre linéaire de dimension infinie, de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}(\xi, t) = -\xi x(\xi, t) + b(\xi, t) \\ y(t) = \int_0^\infty x(\xi, t) d\xi \end{cases} \text{ avec } b \text{ bruit blanc, et } \text{cov}(b) = Q(\xi_1, \xi_2) \delta(t_2 - t_1)$$

La variable  $\xi$  indice l'état. C'est une variable continue qui parcourt tout  $\mathcal{R}^+$ . La dimension du vecteur d'état est donc infinie. La dérivée est naturellement prise par rapport au temps (variable  $t$ ).

Le spectre complexe de  $y$  est la transformée de Laplace bilatérale de sa fonction d'autocorrélation. Il s'écrit ici (on note  $s$  la variable de Laplace) :

$$\Phi_{yy}(s) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{Q(\xi, \eta)}{(\xi + s)(\eta - s)} d\xi d\eta$$

En choisissant  $b(\xi, t) = \mu(\xi)b(t)$  (avec  $b(t)$  scalaire), on a  $Q(\xi, \eta) = \mu(\xi)\mu(\eta)$ . Cependant le choix de  $\mu$  pour retrouver  $\Phi$  n'est alors pas évident. Par contre en choisissant des bruits  $b(\xi, t)$  décorrelés en la variable  $\xi$ , on récupère une forme rationnelle, certes infinie:

$$Q(\xi, \eta) = \nu(\xi) \delta(\xi - \eta) \implies \Phi_{yy}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\nu(\xi)}{\xi^2 - s^2} d\xi$$

Quelques manipulations sur les intégrales montrent alors que  $\nu(\xi)$  se déduit de spectre  $\Phi_{yy}(s)$ . Et on a  $\Phi_{yy} = \Phi$  si :

$$\nu(\xi) = 2\xi \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}_{II}^{-1}(\Phi))(\xi)$$

où  $\mathcal{L}$  désigne la transformée de Laplace et  $\mathcal{L}_{II}$  la transformée de Laplace bilatérale.

Il est malheureusement clair que cette approche simple n'est valide que si  $\nu(\xi) \geq 0$ , puisque  $\nu(\xi)$  est la variance de  $b(\xi, t)$  (à  $\xi$  fixé). Or dans ce cas le spectre de puissance  $\Phi_{yy}(j\omega)$  décroît avec la pulsation  $\omega$ . On ne peut donc pas factoriser par cette approche un spectre quelconque. Il faut trouver une approche plus générale. Pour ce faire nous considérons ci-après une séquence d'approximations de  $\Phi(\omega)$ . La limite de cette séquence est la solution théorique du problème de factorisation, et les diverses approximations en sont des solutions rationnelles approchées.

## 3 Approximation spectrale diffuse

### 3.1 Identification

L'approche que nous avons développée pour calculer le filtre repose sur une identification de  $\Phi(\omega)$  par d'une approximation rationnelle finie:

$$\begin{cases} \{\nu_k\} = \arg \min \|\Phi(\omega) - \Phi_{app}(\omega)\| \\ \text{où } \Phi_{app}(\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{\nu_k}{\xi_k^2 + \omega^2} \end{cases} \quad (3)$$

et où:

- Les  $\xi$  forment un maillage large de la plage fréquentielle  $[f_{min}, f_{max}]$  où l'approximation est recherchée.
  - La norme est évaluée sur un maillage fin en  $\omega$ .
- On réalise ainsi une approximation faible de  $\Phi(\omega)$ .

Il est important que l'approximation soit aussi un spectre, donc une fonction positive. Pour cela le calcul des  $\nu_k$  se fait par minimisation au sens des moindres carrés, sous la contrainte:

$$\sum_{k=1}^N \nu_k \geq 0 \quad (4)$$

Cette inégalité est une condition nécessaire pour que  $\Phi_{app}$  soit positif puisque  $\sum_{k=1}^N \nu_k = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \Phi_{app}(\omega)$ . La procédure développée ci-après prouve que c'est aussi une condition suffisante. Le passage par la dimension finie permet donc de lever la contrainte de positivité de  $\nu$  en tout point qui apparaissait initialement.

### 3.2 Factorisation

La représentation spectrale diffuse approchée correspondant à  $\Phi_{app}$  s'écrit avec  $b_i(t) = b(\xi_i, t)$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -\xi_i x_i + b_i & i = 1, \dots, N \\ y(t) = \sum_1^N x_i \end{cases} \quad (5)$$

Comme nous l'avons dit dans la section précédente, la matrice de covariance du vecteur de bruit d'état introduit dans ce modèle,  $Q = \text{diag}(\nu_i)$ , n'est pas toujours positive. Cependant par passage à une représentation spectrale équivalente nous savons récupérer une covariance positive à condition que  $\Phi$  soit un spectre. Un calcul classique en factorisation, montre en effet que les deux modèles ci-après

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b \\ y = Cx \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = Ax + Kw \\ y = Cx \end{cases} \text{ avec } \text{cov}(b) = Q \delta(\tau) \quad \text{avec } \text{cov}(w) = R \delta(\tau)$$

générent des sorties de spectres identiques, si  $K$  est donné, via la résolution d'une équation de Riccati, par :

$$\begin{aligned} AP + PA^T - (PA^T C^T + S)R^{-1}(CAP + S^T) + Q &= 0 \\ K &= (PA^T C^T + S)R^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

avec  $R = CQC^T$  et  $S = QC^T$

Cette équation de Riccati n'a de sens que si  $R^{-1}$  existe. C'est ici bien le cas, puisque pour le type de modèle considéré on a  $C = [1, 1, \dots]$ , d'où  $R = \sum_{k=1}^N \nu_k$ , et donc la positivité de  $\Phi_{app}(\omega)$  entraîne celle de  $R$ .

Cependant cette équation est non standard car la matrice  $Q$  est non définie. Or la résolution des équations de Riccati non standards est un problème qui, dans toute sa généralité, est encore ouvert (on pourra à ce sujet consulter les travaux de Trenkelman, Rajamani et Sallet).

Dans notre cas, qui est caractérisé par une paire  $(A, C)$  observable et un  $R > 0$ , nous pouvons montrer qu'une solution  $P$  symétrique positive existe toujours à condition de choisir la dynamique de  $A$  strictement stable. Ceci n'est pas une contrainte car les pôles de  $A$  seront naturellement choisis stables et répartis sur la plage de fréquence sur laquelle on cherche à représenter le comportement spectral de  $y$ . La démonstration détaillée de l'existence de  $P$  repose, pour l'essentiel, sur les résultats de [5].

## 4 Quelques remarques

### 4.1 Mise en oeuvre

La dimension du vecteur de bruit  $w$  est égale à celle du signal  $y$ : Cette représentation markovienne équivalente est donc une solution beaucoup plus économique que la représentation initiale. Même dans le cas où celle-ci est réalisable on aura donc quand même intérêt à passer au modèle équivalent.

Lors de la phase d'identification de certains spectres expérimentaux il est important de garantir que la condition  $R > 0$  est bien satisfaite. Sinon la procédure de factorisation spectrale développée est en échec, l'équation de Riccati n'ayant pas alors nécessairement de solution. L'étape d'identification doit donc utiliser une procédure de moindres carrés sous contrainte de positivité de la somme des  $\nu_k$ . Des algorithmes efficaces existent pour résoudre ce problème [6].

Pour réaliser un simulateur, le modèle d'état doit être discrétisé. La discrétisation de la dynamique (i. e. le calcul de  $e^{A\Delta t}$  où  $\Delta t$  est le pas d'échantillonnage), est particulièrement simple du fait que la matrice  $A$  est diagonale. Par contre la discrétisation de la covariance du bruit est un peu plus complexe si cette covariance n'est pas diagonale. On aura donc intérêt à discrétiser le modèle continu initiale, et à effectuer le passage au modèle équivalent dans le domaine discret (l'équation de Riccati à résoudre est alors le pendant discret de 6).

### 4.2 Solution exacte

D'un point de vue théorique l'extension à la dimension infinie ne devrait pas poser pas de problèmes insurmontables. Il faut définir et résoudre l'équation de Riccati en dimension infinie, avec :

$$R = \int_0^{+\infty} \nu(\xi) d\xi \text{ et } S = \nu^T(\xi),$$

et analyser de la convergence des représentations spectrales quand la dimension de l'approximation augmente. Ce travail fait partie des perspectives méthodologiques de nos recherches. Il permettra de faire le lien avec la condition de Paley-Wiener (2). L'utilisation d'autres approximations de  $\Phi(\omega)$ , et en particulier d'approximations fortes, est aussi une perspective intéressante. Elle permettrait de mieux maîtriser la taille de l'erreur d'approximation entre les points du maillage.

## 5 Application

### 5.1 Analyse spectrale

Nous disposons de plusieurs enregistrements du vent répartis le long de l'aile. Ces essais sont suffisamment longs et les caractéristiques statistiques de la composante verticale de la turbulence ne doivent donc pas dépendre a priori de la position du point de mesure sur l'aile. Aussi chaque signal de mesure de  $W$  a été centré. A l'intérieur d'un même essai, la puissance des signaux enregistrés aux différents points de mesure doit être la même; Elle a donc aussi été normalisée.

Pour estimer la densité spectrale du  $p_{vent}$ , on a utilisé la technique classique de Welch. Tous les signaux  $p_{vent}$  ont été mis bout-à-bout. Les paramètres de l'analyse spectrale effectuée sont les suivants: résolution fréquentielle désirée = 0.03Hz (compte tenu de la fréquence d'échantillonnage qui est de 8Hz, cela conduit à une analyse sur des segments de 267 points), complétion à zéro avec un taux de 50%, et recouvrement avec un taux de 75%.

### 5.2 Simulateur de $p_{vent}$

La plage fréquentielle d'intérêt, c'est-à-dire la plage sur laquelle les pôles sont répartis, est [0.03, 2.0]Hz. La fréquence minimale correspond à la résolution fréquentielle. La fréquence maximale est le quart de la fréquence d'échantillonnage. Le nombre de pôles est fixé a priori à 10. Ils sont équirépartis (selon une échelle logarithmique) entre les deux bornes de la plage fréquentielle choisie. Il a été montré qu'au moins dans certains cas particuliers cette répartition était optimale [7]. Le pas d'échantillonnage retenu pour les simulateurs de  $p_{vent}$  est de 0.125s.

Lors de l'identification, l'erreur est estimée en fonction de la variation de puissance. Elle est inférieure à 5%. La figure (2) montrent le spectre estimé et le spectre identifié correspondant au modèle markovien obtenu. On peut essayer de réduire la dimension. Avec un ordre 3, et sans changer la plage fréquentielle, l'erreur d'identification reste raisonnable (inférieure à 9%).

Il est clair que lorsque l'ordre est choisi petit, l'utilisation d'une technique d'identification plus élaborée peut sûrement améliorer les résultats. L'approche diffusive n'assure la reproduction du spectre désiré que quand l'ordre tend vers l'infini. Elle a cependant un caractère systématique, ne nécessite pas de contrôle de la stabilité, ce qui en fait un outil intéressant dans un contexte industriel.

### 5.3 Traitement par inversion

Nous disposons aussi d'essais en vol classique où le vent vertical  $W$  n'est mesuré qu'en un seul point. Dans ce cas le cal-

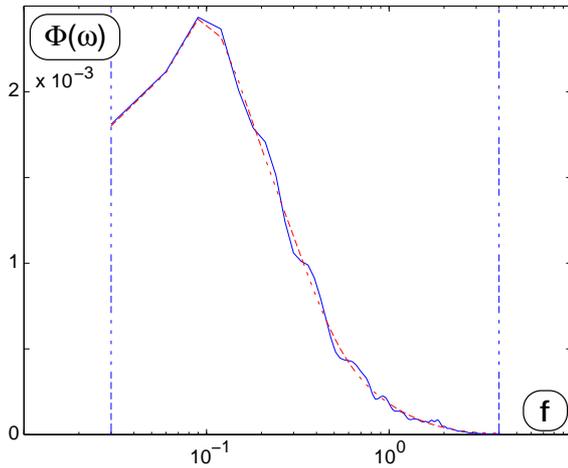


FIG. 2 –  $p_{vent}$  mesuré: spectre (-) et modèle (- -)

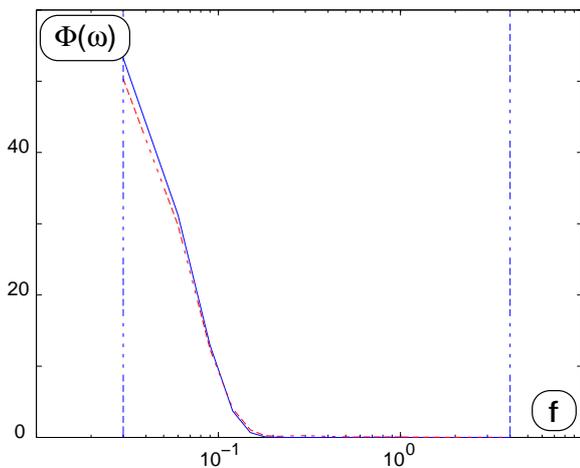


FIG. 3 –  $p_{vent}$  estimé (inversion): spectre (-) et modèle (- -)

cul du signal  $p_{vent}$  ne peut se faire directement par (1). Nous utilisons la technique d'inversion régularisée présentée dans [1] pour estimer ce signal. C'est-à-dire que nous cherchons le couple perturbateur  $p_{vent}$  qui, appliqué à l'avion, permettrait de faire coïncider sa trajectoire simulée avec celle mesurée. Le résultat dépend bien entendu des variables que l'on cherche à recalculer, et du réglage de la régularisation.

On a choisi de recalculer la vitesse de roulis, l'angle de roulis et le déplacement latéral de l'avion par rapport à une trajectoire moyenne; Le critère est une pondération uniforme des normes 2 relatives de ces trois signaux. La procédure de calcul automatique du paramètre de régularisation présentée dans [1] a été utilisée.

Du fait de la régularisation, le spectre du signal ainsi obtenu est plus passe-bas que celui du  $p_{vent}$  mesuré. Lors de l'identification, l'erreur est faible (moins de 0.5%). Cependant la résolution de l'équation de Riccati introduit des erreurs numériques qui ne sont pas négligeables (presque 8%); Une amélioration des procédures numériques serait donc utile. Comme précédemment nous avons utilisé 10 pôles équirépartis sur la plage  $[0.03, 2.0]$  Hz selon une échelle logarithmique. La figure (3) montrent le spectre estimé pour ce  $p_{vent}$  et le spectre identifié correspondant au modèle markovien obtenu. L'effet passe-bas de la régularisation est évident.

## 6 Conclusion

Grâce à l'introduction d'un modèle stochastique diffusif nous avons pu proposer une procédure de factorisation spectrale applicable aux signaux aléatoires de spectre non rationnel. Les approximations de dimension finie de ce modèle permettent de construire des simulateurs Markoviens représentatifs de ces signaux dans une bande fréquentielle librement choisie. La qualité de l'approximation est fonction de l'ordre de l'approximation. Comparé aux procédures d'identification classiques, le caractère systématique de l'approche développée, la stabilité obligée des modèles obtenus, en font un outil particulièrement intéressant dans un contexte industriel.

L'application proposée illustre le type de résultats que l'on peut obtenir. Elle concerne la simulation d'un couple perturbateur en roulis  $p_{vent}$ , induit sur une aile d'avion par la présence d'un vent turbulent spatialement non uniforme. Le développement de ce générateur de  $p_{vent}$  permet d'améliorer la représentativité des simulateurs des avions de transport de passagers. La validation précise du comportement en turbulence est en effet un des enjeux actuels dans le développement des gros porteurs.

Deux simulateurs ont été proposés dont les conceptions reposent sur des signaux d'origines différentes. Le premier utilise une mesure presque directe du  $p_{vent}$ , le second utilise une estimation de  $p_{vent}$  résultant d'une procédure d'inversion. L'effet de la régularisation, qui est indispensable pour avoir une inversion bien posée, apparaît clairement comme une limitation à l'utilisation de ces derniers signaux. La nécessité de conduire des essais en vol dédiés à la mesure de  $p_{vent}$  est donc confirmée.

La généralité de l'approche proposée et sa généralité permette de l'étendre sans difficulté aux signaux multi-dimensionnels. Ainsi dans [8] une application à la simulation du champ des signaux aléatoires  $W(t, \Delta y)$  a été conduite.

## Références

- [1] Ph. Mouyon et P. Vacher. Restitution d'entrées inconnues pour les systèmes en boucle fermée saturés. *GRETSI'01*, 2001.
- [2] Etkin B. Turbulent wind and its effect on flight. *Journal of Aircraft*, 18(5):327–34, 1981.
- [3] G. Schänzer et Y. Xiao. Lift and rolling moment of a finite wing due to sinusoidal and stochastic turbulence. *Aerospace Science and Technology*, 5:341–354, 1997.
- [4] Montseny G. Diffusive representation of pseudo-differential time-operators. *ESAIM*, <http://www.emath.fr/~proc/vol.5/>, 5:159–175, 1998.
- [5] S. Bittanti, A. J. Laub, et J. C. Willems. *The Riccati Equation*. Springer-Verlag, 1991.
- [6] S. Lesecq et A. Barraud. *Des moindres carrés au filtre de Kalman*, pages 179–216. Hermes, Lavoisier, 1991.
- [7] Guglielmi M. Synthèse de signaux en  $1/f$  avec contrôle de la précision spectrale. *GRETSI'01*, 2001.
- [8] Ph. Mouyon, N. Imbert, et G. Montseny. Markovian diffusive representation of non rational distributed random processes and application to turbulence simulation over structures. *Journal of Nonlinear Dynamics*, 29(1):23–35, 2002.