

# Analyse asymptotique de certains filtres de Wiener à rang réduit

Belkacem MOUHOUCHE<sup>1,4</sup>, Philippe LOUBATON<sup>2</sup>, Walid HACHEM<sup>3</sup>, Karim ABED-MERAÏM<sup>1</sup>, Nicolas IBRAHIM<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Département Traitement du Signal et des Images,  
Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications,  
46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13, France

<sup>2</sup>Équipe Signal pour les Communications,  
Institut Gaspard Monge, Université de Marne la Vallée,  
et Laboratoire Traitement et Communication de l'Information UMR 5141 CNRS/ENST  
5, boulevard Descartes, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France

<sup>3</sup>Ecole Supérieure d'Electricité,  
Service Radio-Electricité,  
Plateau du Moulon, 91192 Gif sur Yvette Cedex, France

<sup>4</sup>WAVECOM S.A.  
12, boulevard Garibaldi 92442 Issy-les-Moulineaux Cedex, France

mouhouch@tsi.enst.fr, loubaton@univ-mlv.fr, walid.hachem@supelec.fr, abed@tsi.enst.fr,  
nicolas.ibrahim@wavecom.com

## Résumé –

Dans cet article, nous approfondissons des résultats récents de Honig-Xiao ([6]) et Trichard et al. ([10]) relatifs à l'analyse des performances asymptotiques des filtres de Wiener à rang réduit dans le contexte des systèmes CDMA de grandes dimensions. Notre contribution consiste à remarquer que la théorie des polynômes orthogonaux pour le problème des moments de puissance peut être utilisée afin d'évaluer analytiquement la vitesse de convergence du rapport Signal à Interférence plus Bruit (SINR) des filtres de Wiener à rang réduit vers le SINR du filtre de Wiener. Grâce à cette observation, nous établissons que la convergence du SINR des filtres à rang réduit est localement exponentielle, et mettons en évidence analytiquement le taux de convergence. Par ailleurs, nous nous affranchissons du caractère local dans le cas particulier, considéré par Honig et Xiao, d'utilisateurs de mêmes puissances.

**Abstract** – In this paper, we revisit recent papers of Honig-Xiao ([6]) and Trichard *et al.* ([10]) devoted to the asymptotic analysis of reduced rank Wiener filters. Appropriate connections between the asymptotic behavior of the Signal to Interference plus Noise Ratios (SINRs) at the outputs of these filters and the theory of orthogonal polynomials for the power moment problem are established. Using some classical results of this theory, it is established in particular that the reduced rank filter output SINR converges locally exponentially as a function of the filter rank toward the full rank Wiener filter output SNR. Finally, the convergence is shown to be global in the Honig-Xiao's case of equal users powers.

## 1 Position du problème

On considère une liaison fonctionnant suivant le principe de l'accès multiple à répartition par les codes dont le facteur d'étalement et le nombre d'utilisateurs seront notés  $N$  et  $K$  respectivement. Dans ce contexte, le vecteur aléatoire  $\mathbf{y}$  de dimension  $N$  obtenu en concaténant sur la durée d'un symbole le signal reçu échantillonné au rythme chip peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\sqrt{\mathbf{P}}\mathbf{s} + \mathbf{v} \quad (1)$$

où  $\mathbf{s}$  est le vecteur de dimension  $K$  des symboles transmis par les différents utilisateurs actifs, et où la matrice  $N \times K$   $\mathbf{W}$  a pour colonnes les codes attribués aux  $K$  utilisateurs.  $\mathbf{P}$  est une matrice diagonale  $K \times K$  contenant les puissances attribuées aux utilisateurs, tandis que  $\mathbf{v}$  représente un bruit additif gaussien de matrice de covariance  $\omega^2 I$ . Nous nous intéressons dans la suite au problème de la restitution de la première composante  $s_1$  du vecteur  $\mathbf{s}$ . Nous posons  $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{U})$  où  $\mathbf{w}_1$  est le code alloué à l'utilisateur numéro 1, et désignons par  $\mathbf{Q}$  la matrice obtenue à partir de  $\mathbf{P}$  en supprimant sa première colonne et sa

première ligne. Afin de simplifier les notations, nous supposons que la puissance  $p_1$  allouée à l'utilisateur 1 vaut 1.

En supposant que le récepteur a accès aux matrices  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{P}$  et à  $\omega^2$ , on peut proposer d'utiliser le très classique détecteur de Wiener qui consiste à estimer  $s_1$  par sa projection orthogonale sur l'espace engendré par les composantes de  $\mathbf{y}$ , et qui s'écrit sous la forme

$$\hat{s}_1 = \mathbf{w}_1^H \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{y}$$

où  $\mathbf{R}_y = E(\mathbf{y}\mathbf{y}^H) = \mathbf{W}\mathbf{P}\mathbf{W}^H + \omega^2 I$  représente la matrice  $N \times N$  de covariance de  $\mathbf{y}$ . Dans la suite, nous désignons par  $\mathbf{R}_I$  la matrice de covariance des "interférences + bruit" donnée par  $\mathbf{R}_I = \mathbf{U}\mathbf{Q}\mathbf{U}^H + \omega^2 I$ . La mise en oeuvre pratique de ce détecteur nécessite d'inverser la matrice  $\mathbf{R}_y$ , ce qui est irréaliste lorsque le facteur d'étalement  $N$  est élevé. Divers types de solutions ont été proposées dans la littérature afin de résoudre ce problème. Nous allons nous intéresser ici aux techniques de filtrage de Wiener à rang réduit (voir par exemple [5]) qui consistent à estimer  $s_1$  par sa projection sur l'espace de dimension  $n < N$  engendré par les composantes de  $\mathbf{y}_n = \mathbf{K}_n \mathbf{y}$  où  $\mathbf{K}_n$  est la matrice associée au sous-espace de Krylov de di-

mension  $n$  définie par

$$\mathbf{K}_n = [\mathbf{w}_1, \mathbf{R}_I \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{R}_I^{n-1} \mathbf{w}_1]$$

L'utilisation d'un tel filtre à rang réduit est particulièrement intéressante lorsque les performances qu'il est susceptible d'atteindre sont très proches de celles du filtre de Wiener optimal pour des valeurs de  $n$  significativement plus petites que  $N$ .

## 2 L'évaluation des performances des filtres à rang réduit de Honig et Xiao.

La façon la plus classique de mesurer les performances d'un détecteur linéaire dans le contexte d'une liaison CDMA consiste à évaluer le rapport signal à interférence plus bruit (SINR) en sortie du détecteur. Dans le cas du filtre de Wiener optimal, le SINR, noté  $\beta$ , est donné par

$$\beta = \mathbf{w}_1^H \mathbf{R}_I^{-1} \mathbf{w}_1$$

tandis que le SINR  $\beta_n$  associé au filtre de Wiener de rang  $n < N$  vaut

$$\beta_n = \mathbf{w}_1^H \mathbf{K}_n^H (\mathbf{K}_n^H \mathbf{R}_I \mathbf{K}_n)^{-1} \mathbf{K}_n \mathbf{w}_1$$

Afin de pouvoir analyser la différence entre  $\beta$  et  $\beta_n$ , Honig et Xiao ([6]) ont, comme dans des travaux fondateurs de 1999 de Tse-Hanly ([11]) et Verdu ([12]), proposé de modéliser la matrice de code  $\mathbf{W}$  comme la réalisation d'une matrice aléatoire centrée à entrées indépendantes identiquement distribuées de variance  $\frac{1}{N}$ . Ils se sont placés par ailleurs dans le cas où  $N$  et  $K$  tendent tous les deux vers l'infini de telle façon que  $K/N$  converge vers un réel strictement positif  $\alpha$ . Dans ce cadre, les SINR  $\beta$  et  $\beta_n$  peuvent être interprétés comme des réalisations de quantités aléatoires fonction de  $\mathbf{W}$ . Afin d'étudier le comportement de  $\beta$  et  $\beta_n$ , on utilise les deux résultats suivants ([2] et [4]).

**Lemme 1** Soit  $\mathbf{z}_N$  un vecteur aléatoire de dimension  $N \times 1$  et  $\mathbf{B}_N$  une matrice aléatoire  $N \times N$  indépendante de  $\mathbf{z}_N$ . Supposons que les composantes de  $\mathbf{z}_N$  soient centrées, indépendantes et identiquement distribuées de variance  $\frac{1}{N}$ , et que  $\sup_{N \in \mathbb{N}} \|\mathbf{B}_N\| < +\infty$  ( $\|\cdot\|$  représente la norme spectrale). Alors,

$$\mathbf{z}_N^H \mathbf{B}_N \mathbf{z}_N - \frac{\text{tr}(\mathbf{B}_N)}{N} \rightarrow 0$$

quand  $N \rightarrow \infty$ .

**Lemme 2** Supposons que la distribution des puissances allouées aux utilisateurs converge vers une distribution limite à support compact  $[p_{\min}, p_{\max}]$ . Alors, la distribution empirique des valeurs propres de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_I$ , en d'autres termes la distribution dont la fonction de répartition  $F_N$  est donnée par:

$$F_N(\lambda) = \frac{\text{nombre de valeurs propres de } \mathbf{R}_I \text{ inférieures à } \lambda}{N},$$

converge presque sûrement quand  $N$  et  $K$  convergent vers  $\infty$  et  $K/N \rightarrow \alpha$  vers une mesure de probabilité déterministe  $\sigma$  à support compact  $[\delta_1, \delta_2]$ , où  $\delta_1 \geq \omega^2$ . En d'autres termes, si l'on note  $(\lambda_{N,k})_{k=1, \dots, N}$  les valeurs propres de  $\mathbf{R}_I$ , alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi(\lambda_{N,k}) = \int \phi(\lambda) d\sigma(\lambda)$$

pour toute fonction  $\phi$  continue bornée sur  $[\delta_1, \delta_2]$ .

Ces deux résultats impliquent que

$$\mathbf{w}_1^H \mathbf{R}_I^k \mathbf{w}_1 \rightarrow h_k = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \lambda^k d\sigma(\lambda)$$

quand  $N$  et  $K$  convergent vers  $\infty$  et  $K/N \rightarrow \alpha$ . Par conséquent, la matrice  $\mathbf{K}_n^H \mathbf{R}_I \mathbf{K}_n$  tend vers la matrice de Hankel  $(h_{k+l-1})_{(k,l)=1, \dots, n}$ , et le SINR  $\beta_n$  converge également vers une valeur déterministe ne dépendant que de  $\sigma$ . De la même façon, le SINR  $\beta$  du filtre de Wiener vérifie

$$\beta \rightarrow \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{1}{\lambda} d\sigma(\lambda)$$

Dans le régime asymptotique que nous considérons ici, les différents SINR auxquels nous nous intéressons convergent donc vers des quantités indépendantes des matrices de codes. Dans tout ce qui suit, le problème de l'étude de la vitesse de convergence de  $\beta_n$  vers  $\beta$  sera donc étudié quand on remplace les différents SINR par leurs limites. C'est dans ce contexte que Honig et Xiao ont étudié les performances du filtrage à rang réduit. En effectuant des calculs pénibles et peu transparents (voir également [10] pour une preuve plus rapide), ils ont établi que si  $\mathbf{P} = I$  (on alloue la même puissance à tous les utilisateurs), alors  $\beta_{n+1}$  s'exprime en fonction de  $\beta_n$  sous la forme

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{\omega^2 + \alpha \frac{1}{1+\beta_n}} \quad (2)$$

L'importance de cette relation tient au fait que les coefficients de cette relation ne dépendent pas de  $n$ . Par conséquent, la vitesse avec laquelle  $\beta_n$  tend vers  $\beta$  peut être très rapide et facile à évaluer par simulation. Honig et Xiao ont ainsi remarqué que  $\beta_n$  était très proche de  $\beta$  dès que  $n \geq 8$ . Ainsi, on peut obtenir des performances proches d'un filtre de Wiener optimal nécessitant l'inversion d'une matrice dont la taille tend vers l'infini en utilisant un filtre de rang inférieur à 8.

## 3 Les résultats nouveaux.

Nos résultats se situent toujours dans le cadre asymptotique de Honig et Xiao, mais sont plus généraux en ce sens qu'ils sont valables si tous les utilisateurs n'ont pas la même puissance. Par ailleurs, nous sommes en mesure de retrouver les résultats de Honig et Xiao de façon plus simple, et d'évaluer analytiquement les valeurs de  $n$  à partir desquelles on peut affirmer que  $\beta_n \simeq \beta$  dans le cas où  $\mathbf{P} = I$ .

Notre contribution repose sur l'observation que l'analyse de la convergence de  $\beta_n$  vers  $\beta$  est un problème classique. Afin de présenter les résultats correspondants de la façon la plus simple possible, nous supposons que la mesure  $\sigma$  est absolument continue, et que sa densité est presque sûrement positive sur  $[\delta_1, \delta_2]$ . Cette hypothèse implique en particulier que le facteur  $\alpha$  défini comme la limite de  $K/N$  est supérieur à 1 (dans le cas contraire, la distribution limite  $\sigma$  possède clairement une masse au point  $\omega^2$ ). Notons que cette hypothèse peut être affaiblie, mais certains des résultats sont un peu plus faibles. Nous notons  $G_\sigma(z)$  la fonction de la variable complexe  $z$  définie par

$$G_\sigma(z) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{1}{\lambda - z} d\sigma(\lambda)$$

La fonction  $G_\sigma(z)$  est classiquement appelée transformée de Stieltjes de  $\sigma$ , est analytique dans  $\mathbb{C} - [\delta_1, \delta_2]$ , et se développe au voisinage de l'infini sous la forme

$$G_\sigma(z) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k}{z^{k+1}}$$

Il convient en particulier de noter que le SINR  $\beta$  du filtre de Wiener est égal à  $G_\sigma(0)$ . On définit sur l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à  $\sigma$  le produit scalaire

$$\langle f(\lambda), g(\lambda) \rangle = \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(\lambda)g(\lambda)d\sigma(\lambda).$$

ainsi qu'une famille  $(p_k(\lambda))_{k \geq 0}$  de polynômes orthonormés obtenue par orthogonalisation de Gram-Schmidt des fonctions  $1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^k, \dots$ . Les polynômes  $(p_k)_{k \geq 0}$  sont appelés classiquement polynômes orthogonaux de première espèce, et les polynômes de seconde espèce  $(q_k)_{k \geq 0}$  se définissent à partir des  $(p_k)_{k \geq 0}$  par la relation

$$q_k(\lambda) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{p_k(\lambda) - p_k(u)}{\lambda - u} d\sigma(u) \quad (3)$$

Il est bien connu que la suite de fonctions  $(-\frac{q_n(z)}{p_n(z)})_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C} - [\delta_1, \delta_2]$  vers  $G_\sigma(z)$  (voir par exemple [1]). Le lien entre l'analyse de la convergence de  $\beta_n$  vers  $\beta$  repose sur l'observation suivante :

**Proposition 1** *Le SINR  $\beta_n$  du filtre de Wiener de rang  $n$  coïncide avec  $-\frac{q_n(0)}{p_n(0)}$*

En utilisant de façon pertinente des résultats de [9], [3] et [8], on peut alors montrer le résultat suivant.

**Théorème 1** *Posons  $\mu = \frac{\delta_2 + \delta_1}{\delta_2 - \delta_1}$ , et soit  $\phi$  la quantité définie par*

$$\phi = \frac{1}{\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}} \quad (4)$$

*Alors, l'erreur  $e_n = \beta - \beta_n$  entre  $\beta_n$  et  $\beta$  vérifie pour  $n$  assez grand une inégalité du type*

$$A\phi^{2n} \leq |e_n| \leq B\phi^{2n} \quad (5)$$

*où  $A$  et  $B$  sont deux constantes strictement positives.*

Ce résultat provient du fait que

$$|p_n(0)| \sim C\phi^{-n} \text{ si } n \rightarrow \infty \quad (6)$$

où  $C$  est une constante (voir par exemple [9]), et de l'inégalité

$$\frac{1}{\delta_2} |p_n(0)|^{-2} \leq |e_n| \leq \frac{1}{\delta_1} |p_n(0)|^{-2} \text{ pour tout } n \quad (7)$$

(voir par exemple [8] et [3]). Dans ces conditions, les constantes  $A$  et  $B$  sont de l'ordre de  $\frac{1}{\sigma^2 \delta_2}$  et  $\frac{1}{\sigma^2 \delta_1}$  respectivement si  $n$  est choisi de telle sorte que  $p_n(0)$  soit suffisamment proche de  $C\phi^{-n}$ .

**Remarque.** Comme  $\delta_1 \geq \omega^2 > 0$ ,  $\mu$  est strictement plus grand que 1, et le facteur  $\phi$  est lui strictement plus petit que 1. Par conséquent,  $\beta_n$  converge localement exponentiellement vers  $\beta$  avec une vitesse qui ne dépend que du support  $[\delta_1, \delta_2]$  de la mesure  $\sigma$ . Il est par ailleurs intéressant de constater que le

facteur susceptible de ralentir le plus le taux de convergence est la proximité à 0 de  $\frac{\delta_1}{\delta_2}$ . Afin de mettre en évidence sous quelles conditions ce terme se rapproche de 0, nous mentionnons le fait que la condition  $\alpha \geq 1$  implique que  $\delta_1 \geq p_{min}(\sqrt{\alpha} - 1)^2 + \omega^2$  et que  $\delta_2 \leq p_{max}(\sqrt{\alpha} + 1)^2 + \omega^2$ . De plus, si les différents utilisateurs ont tous la même puissance (i.e.  $p_{min} = p_{max} = 1$ ), alors  $\delta_1$  est égal à  $(\sqrt{\alpha} - 1)^2 + \omega^2$  et  $\delta_2 = (\sqrt{\alpha} + 1)^2 + \omega^2$ . Par conséquent, les facteurs susceptibles de ralentir la vitesse de convergence du filtre de Wiener à rang réduit sont d'une part un bruit faible, et d'autre part une distribution de puissance des utilisateurs très dispersée ou un facteur  $\alpha$  proche de 1.

Le théorème 1 est toutefois un résultat de convergence locale, en ce sens que l'inégalité (7) n'a lieu que pour les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $p_n(0)$  est proche de  $C\phi^{-n}$ . Toutefois, on peut préciser le résultat exprimé dans le théorème 1 dans le cas, considéré par Honig et Xiao, où les divers utilisateurs ont la même puissance. Dans ce contexte,  $p_{min} = p_{max} = 1$ , et il est possible de calculer de façon explicite la distribution limite  $\sigma$  (qui coïncide avec la distribution de Marchenko-Pastur), et les polynômes orthogonaux correspondants. On peut ainsi établir que (voir [7])

$$p_n(0) = r_n(0) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} r_{n-1}(0) \quad (8)$$

où  $r_n(0)$  est donné par

$$r_n(0) = (-1)^n \frac{(\phi^{-(n+1)} - \phi^{(n+1)})}{(\phi^{-1} - \phi)} \quad (9)$$

Par conséquent,  $|p_n(0)| \simeq C\phi^{-n}$  si  $n \rightarrow \infty$  avec  $C = (1 - \frac{\phi}{\alpha})$ . De plus, il est clair que  $|p_n(0)|$  est proche de  $C\phi^{-n}$  dès que  $\phi^{2n}$  est négligeable devant 0. On peut donc parfaitement prédire pour quelles valeurs de  $n$  le comportement de  $e_n$  sera régi par l'inégalité (7).

## 4 Illustration numérique du théorème.

Afin d'illustrer le théorème 1, nous évaluons  $\frac{\beta_n}{\beta}$  en fonction de  $n$  dans le cas où les puissances des différents utilisateurs sont toutes égales. Sur la figure 1, nous fixons  $\alpha$  à 1, et considérons 3 valeurs de  $\omega^2$  correspondant à des rapports  $\frac{E_s}{N_0}$  égaux à 2 dB, 5 dB et 10 dB. Les courbes représentant l'évolution des bornes inférieures et supérieures mises en évidence dans la formule (5) sont également tracées. Sur la figure 2, nous fixons  $\frac{E_s}{N_0}$  à 10 dB, et faisons varier  $\alpha$  de 1 à 5.

## Références

- [1] N.I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem*, Oliver & Boyd.
- [2] Z.D. Bai and J.W. Silverstein, "No Eigenvalues Outside the Support of the Limiting Spectral Distribution of Large Dimensional Sample Covariance Matrices", *Annals of Probability*, vol. 26, no. 1, pp. 316-345, 1998.
- [3] A. Bultheel, C. Díaz-Mendoza, P. González-Vera, and R. Orive, "Quadrature on the Half Line and Two-Point Padé Approximants to Stieltjes Functions. Part II: Convergence", *J. Comput. Appl. Math.*, 65, 1996.

- [4] J. Evans and D.N.C Tse, "Large System Performance of Linear Multiuser Receivers in Multipath Fading Channels", *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 46, no. 6, pp. 2059–2078, September 2000.
- [5] J.S. Goldstein, I.S. Reed, and L.L. Scharf, "A Multistage Representation of the Wiener Filter Based on Orthogonal Projections", *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 44, No. 7, November 1998.
- [6] M.L. Honig and W. Xiao, "Performance of Reduced-Rank Linear Interference Suppression", *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 47, No. 5, pp. 1928–1946, July 2001.
- [7] Ph. Loubaton, W. Hachem, "Asymptotic analysis of reduced rank Wiener filters", in Proc. Information Theory Workshop, Paris, April 2003, pp. 328-331.
- [8] H. Stahl and V. Totik, *General Orthogonal Polynomials*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1992.
- [9] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Vol. 33 of *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, AMS.
- [10] L.G.F. Trichard, J.S. Evans, and I.B. Collings, "Optimal Linear Multistage Receivers and the Recursive Large System SIR", *ISIT 2002*, Lausanne, Switzerland.
- [11] D.N.C Tse and S. Hanly, "Linear Multi-User Receiver: Effective Interference, Effective Bandwidth and User Capacity", *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 45, no. 2, pp.641–657, March 1999.
- [12] S. Verdú and S. Shamai, "Spectral Efficiency of CDMA with Random Spreading", *IEEE Trans. on Information Theory*, no. 3, pp. 622-640, March 1999.

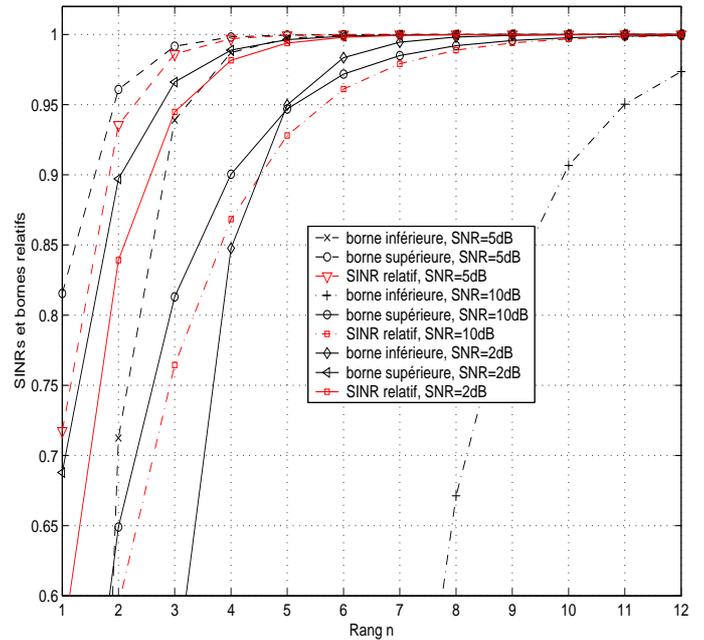


FIG. 1: SINR relatif des filtres à rang réduit et les bornes inférieures et supérieures pour différentes valeurs de  $\frac{E_s}{N_0}$ .

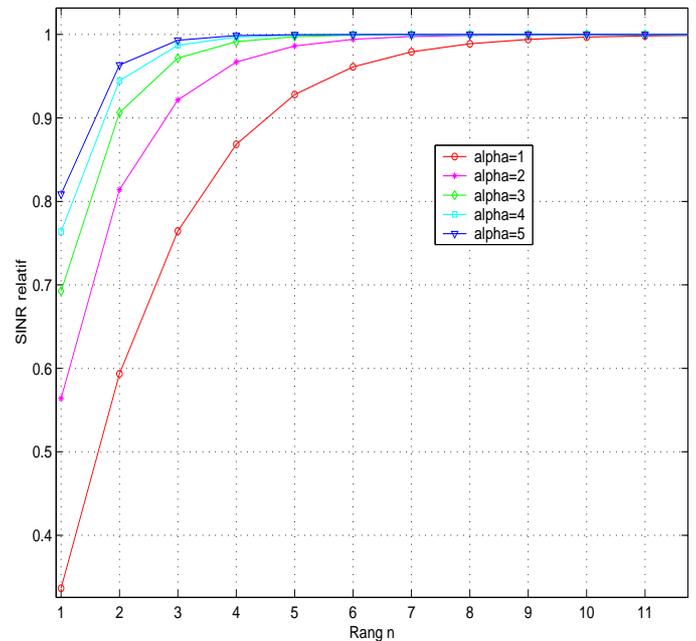


FIG. 2: Convergence du SINR des filtres à rang réduit en fonction de  $n$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ .