

Efficacités d'algorithmes du second-ordre de localisation de sources non circulaires

Habti ABEIDA, Jean Pierre DELMAS

GET/INT, Département CITI, UMR-CNRS 5157
9 rue Charles Fourier, 91011 Evry Cedex, France

habti.abeida@int-evry.fr, jean-pierre.delmas@int-evry.fr

Résumé – Cet article est consacré à l'étude des performances d'algorithmes du second-ordre d'estimation de DOA de sources complexes non circulaires rencontrés en communication numérique (PSK2 ou OQPSK) basés sur les deux matrices de covariance spatiales $E(\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^H)$ et $E(\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T)$. Il a pour objectif de préciser le gain en performances de diverses méthodes utilisant la deuxième matrice de covariance pour améliorer la localisation de sources non circulaires en les rapportant à des bornes de variance minimale dans le cadre d'estimateurs du second-ordre. Après avoir donné une expression analytique commune de la variance minimale de tout estimateur du second-ordre de DOA de sources complexes gaussiennes ou non, circulaires ou non, nous présentons une méthodologie permettant d'étudier les performances asymptotiques de tout algorithme de type sous espace. Nous démontrons diverses propriétés générales des matrices de covariance d'estimateurs fournis par de tels algorithmes et étudions en particulier deux algorithmes basés sur les deux matrices de covariance [3],[4] dont les performances n'avaient été étudiées que par simulations. Enfin diverses simulations illustrent ces résultats.

Abstract – This paper is focused on asymptotic performance of second-order algorithms for estimating direction of arrival (DOA) of narrow-band complex non-circular sources in the context of digital communication (PSK2 ou OQPSK) based on the two spatial covariance matrices $E(\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^H)$ et $E(\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T)$. It aims to specify the performance improvement of different algorithms that use the second covariance matrice to improve the localization of non-circular sources, by comparison to the asymptotically minimum variance second-order algorithms. After giving a common closed-form expression for the asymptotic covariance valid for Gaussian or non Gaussian and complex circular or non-circular sources, we present a general methodology to study the asymptotic performance of arbitrary subspace algorithms. We prove different properties of the asymptotic covariance of such algorithms and we particularly study two algorithms that has been introduced in the literature [3],[4] by simulation only. Numerical examples illustrate the results.

1 Modèle et notations

Nous considérerons une antenne de M capteurs recevant K signaux sources, caractérisés par leur DOA $(\theta_k)_{k=1,\dots,K}$. Les enveloppes complexes des signaux observés sont modélisées par les T observations indépendantes.

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A} \mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

$\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$. \mathbf{x}_t et \mathbf{n}_t sont supposés complexes centrés et indépendants l'un de l'autre. \mathbf{n}_t est supposé gaussien complexe circulaire, spatialement non corrélé avec $E(\mathbf{n}_t \mathbf{n}_t^H) = \sigma_n^2 \mathbf{I}_M$ alors que \mathbf{x}_t est complexe non circulaire, spatialement corrélé ou non et éventuellement cohérent, de matrices de covariance $\mathbf{R}_x \stackrel{\text{def}}{=} E(\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^H)$ et $\mathbf{R}'_x \stackrel{\text{def}}{=} E(\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T)$. En conséquence, \mathbf{y}_t a pour matrices de covariance :

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{A}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M \quad \text{et} \quad \mathbf{R}'_y = \mathbf{A} \mathbf{R}'_x \mathbf{A}^T \neq \mathbf{O}.$$

$(\mathbf{R}_y, \mathbf{R}'_y)$ est généralement paramétrisé par le paramètre réel $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2)$ avec $\Theta_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\theta_1, \dots, \theta_K)^T$ et où Θ_2 désigne σ_n^2 et les parties réelles et imaginaires des termes de \mathbf{R}_x et de \mathbf{R}'_x . Ce paramètre Θ est supposé identifiable à partir de $(\mathbf{R}_y, \mathbf{R}'_y)$ et les matrices de covariance de \mathbf{y}_t sont classiquement respectivement estimées par

$$\mathbf{R}_{y,T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t \mathbf{y}_t^H \quad \text{et} \quad \mathbf{R}'_{y,T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t \mathbf{y}_t^T.$$

2 Estimateurs du second ordre de variance minimale

Dans le cas de signaux non circulaires d'ordre deux, la deuxième matrice de covariance \mathbf{R}'_y apporte une information sur Θ_1 comparable à celle apportée par \mathbf{R}_y . Ainsi, nous avons démontré [1], qu'un algorithme MUSIC basé sur \mathbf{R}_y seule et un algorithme de type MUSIC basé sur \mathbf{R}'_y seule conduisent dans le cas d'une source non circulaire de puissance σ_1^2 telle que $E(x_{t,1}^2) = \rho_1 e^{i\phi_1} E|x_{t,1}^2|$ aux variances asymptotiques suivantes :

$$C_{\theta_1} = \frac{1}{\alpha_1} \left[\frac{\sigma_n^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \frac{\sigma_n^4}{\sigma_1^4} \right], \quad C_{\theta_2} = \frac{1}{\alpha_1 \rho_1^2} \left[\frac{\sigma_n^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \frac{\sigma_n^4}{\sigma_1^4} \right]$$

où α_1 est un facteur purement géométrique.

Pour évaluer, l'effet de la non circularité des signaux sur les performances statistiques d'algorithmes du second-ordre basés sur $\mathbf{R}_{y,T}$ seule ou sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$, nous avons besoin d'un algorithme de référence et d'une borne inférieure sur la matrice de covariance des estimées de DOA. Aux estimateurs du maximum de vraisemblance et à la borne de Cramer Rao (difficile à calculer ici) qui servent habituellement de référence, nous préférons les estimateurs du second-ordre de variance asymptotique minimale (AMV) mises en oeuvre par des algorithmes de type COMET [1] basés sur $\mathbf{R}_{y,T}$ seule ou sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$, et leur matrice de covariance associée qui joue le rôle de borne

minimale pour la covariance asymptotique de tout algorithme du second-ordre au sujet de laquelle il a été démontré [2] :

Théorème 1 *Pour des signaux sources gaussiens ou non gaussiens, complexes circulaires ou non circulaires, la covariance de la distribution asymptotique gaussienne de l'estimateur de variance minimale (AMV) basé sur $\mathbf{R}_{y,T}$ ou sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ du paramètre DOA seul, a respectivement pour expression :*

$$\mathbf{C}_{\Theta_1}^{\text{AMV}} = \left(\mathbf{S}_r^H \mathbf{C}_r^{-1/2} \mathbf{P}_{\mathbf{C}_r^{-1/2} \Psi_r}^\perp \mathbf{C}_r^{-1/2} \mathbf{S}_r \right)^{-1}$$

$$[\text{resp. } \mathbf{C}_{\Theta_1}^{\text{AMV}} = \left(\mathbf{S}_s^H \mathbf{C}_s^{-1/2} \mathbf{P}_{\mathbf{C}_s^{-1/2} \Psi_s}^\perp \mathbf{C}_s^{-1/2} \mathbf{S}_s \right)^{-1}],$$

$$\text{où } \mathbf{r} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Vec}(\mathbf{R}_y) = \Psi_r(\Theta_1)\Theta_2, \mathbf{s} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \text{Vec}(\mathbf{R}_y) \\ \mathbf{v}(\mathbf{R}'_y) \\ \mathbf{v}(\mathbf{R}_y^*) \end{pmatrix} =$$

$\Psi_s(\Theta_1)\Theta_2$, $\mathbf{S}_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Theta_1}$ et $\mathbf{S}_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \Theta_1}$, \mathbf{C}_r et \mathbf{C}_s sont les matrices de covariance des distributions asymptotiques de \mathbf{r}_T et \mathbf{s}_T , $\mathbf{P}_{\mathbf{C}_r^{-1/2} \Psi_r}^\perp$ [resp. $\mathbf{P}_{\mathbf{C}_s^{-1/2} \Psi_s}^\perp$] dénote le projecteur sur le complément orthogonal de $\mathbf{C}_r^{-1/2} \Psi_r$ [resp. $\mathbf{C}_s^{-1/2} \Psi_s$].

3 Algorithmes de type sous espace

Pour envisager des algorithmes de type sous espace faisant appel à la fois à $\mathbf{R}_{y,T}$ et à $\mathbf{R}'_{y,T}$, nous considérons la matrice de covariance étendue $\mathbf{R}_{\tilde{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{y}}_t \tilde{\mathbf{y}}_t^H)$ où $\tilde{\mathbf{y}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_t^* \end{pmatrix}$ pour laquelle :

$$\mathbf{R}_{\tilde{y}} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{R}_{\tilde{x}} \tilde{\mathbf{A}}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{2M}$$

avec $\tilde{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^* \end{pmatrix}$ et $\mathbf{R}_{\tilde{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_x & \mathbf{R}'_x \\ \mathbf{R}_x^* & \mathbf{R}_x^* \end{pmatrix}$. Puisque

le gain apporté par l'utilisation de \mathbf{R}'_y est surtout sensible dans le cadre de signaux sources spatialement non corrélés [2], nous allons nous concentrer sur ce cas particulier. Nous y distinguons le cas de signaux de non circularité maximale ($\rho_k = 1$, $k = 1, \dots, K$) (cas 1, par exemple des modulations PSK2 ou OQPSK non filtrées) qui conduit à $\text{rg}(\mathbf{R}_{\tilde{x}}) = K$ et aux algorithmes proposés dans la littérature [3] noté Alg₁ et [4] noté Alg₂, et le cas où ces signaux peuvent être filtrés (cas 2), ce qui conduit à une non circularité non maximale ($\rho_k < 1$, $k = 1, \dots, K$) et à $\text{rg}(\mathbf{R}_{\tilde{x}}) = 2K$. Dans ces deux cas, le projecteur orthogonal $\mathbf{\Pi}$ sur l'espace bruit a pour structure [1] $\begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_1 & \mathbf{\Pi}_{1,2} \\ \mathbf{\Pi}_{1,2}^* & \mathbf{\Pi}_1^* \end{pmatrix}$ où $\mathbf{\Pi}_{1,2} = \mathbf{O}$ dans le cas 2. Et la matrice de projection $\mathbf{\Pi}_T$ sur l'espace bruit associé à l'estimée $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$ de $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ a aussi pour structure

$$\mathbf{\Pi}_T = \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_{1,T} & \mathbf{\Pi}_{1,2,T} \\ \mathbf{\Pi}_{1,2,T}^* & \mathbf{\Pi}_{1,T}^* \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

où $\mathbf{\Pi}_{1,T}$ et $\mathbf{\Pi}_{1,2,T}$ sont respectivement des matrices hermitiennes et symétriques complexes. Les estimées de DOA fournies par les algorithmes précédemment cités sont obtenues grâce à K minima locaux :

$$\theta_{k,T}^{\text{Alg}_1} = \arg \min_{\alpha} g_{1,T}(\alpha)$$

avec

$$g_{1,T}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}^H(\alpha) \mathbf{\Pi}_{1,T} \mathbf{a}(\alpha) - |\mathbf{a}^T(\alpha) \mathbf{\Pi}_{1,2,T}^H \mathbf{a}(\alpha)| \quad (3.2)$$

$$\theta_{k,T}^{\text{Alg}_2} = \angle(z_k) \text{ avec } z_k \text{ zéro}_{|z|<1} \text{ de } g_T(z), \quad (3.3)$$

où

$$g_T(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{aligned} & (\mathbf{a}^T(z^{-1}) \mathbf{\Pi}_{1,T} \mathbf{a}(z))^2 \\ & - (\mathbf{a}^T(z) \mathbf{\Pi}_{1,2,T}^H \mathbf{a}(z)) (\mathbf{a}^T(z^{-1}) \mathbf{\Pi}_{1,2,T} \mathbf{a}(z^{-1})) \end{aligned}$$

et où $\mathbf{a}(z) \stackrel{\text{def}}{=} [1, z, \dots, z^{M-1}]^T$. Cet algorithme peut d'ailleurs être étendu à un réseau de structure quelconque :

$$\theta_{k,T}^{\text{Alg}_3} = \arg \min_{\alpha} g_{3,T}(\alpha)$$

avec

$$g_{3,T}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{aligned} & (\mathbf{a}^H(\alpha) \mathbf{\Pi}_{1,T} \mathbf{a}(\alpha))^2 \\ & - (\mathbf{a}^T(\alpha) \mathbf{\Pi}_{1,2,T}^H \mathbf{a}(\alpha)) (\mathbf{a}^H(\alpha) \mathbf{\Pi}_{1,2,T} \mathbf{a}^*(\alpha)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dans le cas 2 où $\mathbf{\Pi}_{1,2} = \mathbf{O}$, nous proposons l'algorithme :

$$\theta_{k,T}^{\text{Alg}_4} = \arg \min_{\alpha} \mathbf{a}^H(\alpha) \mathbf{\Pi}_{1,T} \mathbf{a}(\alpha). \quad (3.5)$$

4 Analyse de performance

Avant d'étudier les performances d'algorithmes du second-ordre qui utilisent à la fois $\mathbf{R}_{y,T}$ et $\mathbf{R}'_{y,T}$, commençons par examiner l'influence de la non circularité sur les algorithmes du second-ordre traditionnels basés sur $\mathbf{R}_{y,T}$ seule. Nous démontrons le résultat suivant :

Propriété 1 *En cas de bruit temporellement non corrélé, les performances asymptotiques de tout algorithme du second-ordre basé sur $\mathbf{R}_{y,T}$ seule qui n'utilise pas l'hypothèse éventuelle de non corrélation spatiale des sources sont identiques à celles du cas d'observations gaussiennes complexes circulaires indépendantes.*

Preuve : Elle est basée sur le résultat [5] suivant. Sous les hypothèses précédentes, la matrice $\mathbf{D}_{\Theta_1}^{\text{alg}}$ associée à la différentielle de tout algorithme $\text{alg}(\cdot)$ vérifie la condition $\mathbf{D}_{\Theta_1}^{\text{alg}}(\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A}) = \mathbf{O}$. Et comme la matrice de covariance \mathbf{C}_r de la distribution asymptotique de $\text{Vec}(\mathbf{R}_{y,T})$ est donnée [2] par $\mathbf{C}_r = (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A}) \mathbf{C}_{r_x} (\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{A}^H) + \sigma_n^4 \mathbf{I}_{M^2} + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{A}^H + \mathbf{A}^* \mathbf{R}_x^* \mathbf{A}^T \otimes \sigma_n^2 \mathbf{I}_M$ avec $\mathbf{C}_{r_x} = \mathbf{R}_x^* \otimes \mathbf{R}_x + \mathbf{K}(\mathbf{R}'_x \otimes \mathbf{R}_x^*) + \mathbf{Q}_x$ où \mathbf{Q}_x ne dépend que des propriétés du quatrième ordre des sources, le premier terme de \mathbf{C}_r disparaît dans le calcul de $\mathbf{C}_{\Theta_1}^{\text{alg}}$. ■

Puisque les estimateurs de type MUSIC du paragraphe 3 sont des fonctions $\text{alg}(\cdot)$ différentiables de $\mathbf{\Pi}_{1,T}$, $\mathbf{\Pi}_{1,2,T}$ et $\mathbf{\Pi}_{1,2,T}^*$: extensions distinctes de l'application

$$\begin{aligned} & (\mathbf{\Pi}_1, \mathbf{\Pi}_{1,2}, \mathbf{\Pi}_{1,2}^*) \mapsto \theta_k = \text{alg}(\mathbf{\Pi}_1, \mathbf{\Pi}_{1,2}, \mathbf{\Pi}_{1,2}^*), \\ & \theta_{k,T} = \text{alg}(\mathbf{\Pi}_{1,T}, \mathbf{\Pi}_{1,2,T}, \mathbf{\Pi}_{1,2,T}^*), \end{aligned}$$

les distributions asymptotiques des estimées fournies par ces algorithmes et plus généralement par tout algorithme de type sous espace, sont directement déduites de la distribution asymptotique de $\mathbf{\Pi}_T$ ou de $(\mathbf{\Pi}_{1,T}, \mathbf{\Pi}_{1,2,T}, \mathbf{\Pi}_{1,2,T}^*)$. Nous démontrons pour cela le théorème suivant :

Théorème 2 *Dans le cas d'observations indépendantes, les suites de statistiques*

$$\sqrt{T} (\text{Vec}(\mathbf{\Pi}_T - \mathbf{\Pi})) \quad \text{et} \quad \sqrt{T} \begin{pmatrix} \text{Vec}(\mathbf{\Pi}_{1,T} - \mathbf{\Pi}_1) \\ \text{Vec}(\mathbf{\Pi}_{1,2,T} - \mathbf{\Pi}_{1,2}) \\ \text{Vec}(\mathbf{\Pi}_{1,2,T}^* - \mathbf{\Pi}_{1,2}^*) \end{pmatrix}$$

convergent en loi vers des lois gaussiennes centrées de premières matrices de covariance respectives :

$$\mathbf{C}_\Pi = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_{2M}(\mathbf{J} \otimes \mathbf{J})) (\mathbf{\Pi}^* \otimes \mathbf{U} + \mathbf{U}^* \otimes \mathbf{\Pi}) \quad (4.6)$$

et

$$\mathbf{C}_{\Pi_1, \Pi_{1,2}, \Pi_{1,2}^*} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\Pi_1} & \mathbf{C}_{\Pi_{1,2}, \Pi_1}^H & \mathbf{C}_{\Pi_{1,2}^*, \Pi_1}^H \\ \mathbf{C}_{\Pi_{1,2}, \Pi_1} & \mathbf{C}_{\Pi_{1,2}} & \mathbf{C}_{\Pi_{1,2}^*, \Pi_{1,2}}^H \\ \mathbf{C}_{\Pi_{1,2}^*, \Pi_1} & \mathbf{C}_{\Pi_{1,2}^*, \Pi_{1,2}} & \mathbf{C}_{\Pi_{1,2}^*} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

avec

$$\mathbf{C}_{\Pi_1} = \mathbf{\Pi}_1^* \otimes \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_1^* \otimes \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{K}_M(\mathbf{\Pi}_{1,2} \otimes \mathbf{U}_2^* + \mathbf{U}_2 \otimes \mathbf{\Pi}_{1,2}^*), \quad (4.8)$$

$$\mathbf{C}_{\Pi_{1,2}} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_M)(\mathbf{\Pi}_{1,2} \otimes \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{\Pi}_{1,2}),$$

$$\mathbf{C}_{\Pi_{1,2}, \Pi_1} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_M)(\mathbf{\Pi}_{1,2} \otimes \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 \otimes \mathbf{\Pi}_1),$$

$$\mathbf{C}_{\Pi_{1,2}^*, \Pi_1} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_M)(\mathbf{\Pi}_1^* \otimes \mathbf{U}_2^* + \mathbf{U}_1^* \otimes \mathbf{\Pi}_{1,2}^*),$$

$$\mathbf{C}_{\Pi_{1,2}^*, \Pi_{1,2}} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_M)(\mathbf{\Pi}_{1,2}^* \otimes \mathbf{U}_2^* + \mathbf{U}_2^* \otimes \mathbf{\Pi}_{1,2}^*),$$

où \mathbf{K}_m et \mathbf{J} désignent les matrices de permutation telles que $\text{Vec}(\mathbf{A}^T) = \mathbf{K}_m \text{Vec}(\mathbf{A})$ pour toute matrice carrée \mathbf{A} d'ordre m et $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I}_M \\ \mathbf{I}_M & \mathbf{O} \end{pmatrix}$,

$\mathbf{U} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{S}}^\# \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}} \tilde{\mathbf{S}}^\# = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_2^* & \mathbf{U}_1^* \end{pmatrix}$ avec $\tilde{\mathbf{S}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{A}}^H$ et $(\cdot)^\#$ désigne la pseudo inverse au sens Moore Penrose.

Indication de preuve (par manque de place) :

La preuve [1] repose sur le théorème central limite classique : $\sqrt{T}(\text{Vec}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}, T} - \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}}))$ converge en loi vers une loi gaussienne centrée de première matrice de covariance

$$\mathbf{C}_{R_{\tilde{\mathbf{y}}}} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_{2M}(\mathbf{J} \otimes \mathbf{J})) (\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}}^* \otimes \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}}) + (\tilde{\mathbf{A}}^* \otimes \tilde{\mathbf{A}}) \mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{x}}} (\tilde{\mathbf{A}}^T \otimes \tilde{\mathbf{A}}^H)$$

où $\mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{x}}}$ est la matrice de quadrivariance de $\tilde{\mathbf{x}}_t \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{x}_t^T, \mathbf{x}_t^{*T})$ et sur la relation de perturbation classique

$$\delta(\mathbf{\Pi}) = -\mathbf{\Pi} \delta(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}}) \mathbf{S}^\# - \mathbf{S}^\# \delta(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}}) \mathbf{\Pi} + o(\delta(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}})) \quad \blacksquare$$

Sous les mêmes hypothèses, la propriété 1 s'étend sous la forme suivante :

Propriété 2 Les distributions asymptotiques de tout algorithme du second-ordre de type sous espace construit à partir de $\mathbf{R}_{\mathbf{y}, T}$ et $\mathbf{R}'_{\mathbf{y}, T}$ sont identiques à celles du cas d'observations gaussiennes complexes indépendantes de mêmes circularités.

Preuve : Grâce à :

$$\left((\mathbf{\Pi}^* \otimes \mathbf{S}^\#) + (\mathbf{S}^{\#*} \otimes \mathbf{\Pi}) \right) (\tilde{\mathbf{A}}^* \otimes \tilde{\mathbf{A}}) = \mathbf{O} \quad \blacksquare$$

En ce qui concerne les estimateurs de type MUSIC du paragraphe 3 nous démontrons le résultat suivant :

Propriété 3 Les distributions asymptotiques des algorithmes Alg_1 , Alg_2 et Alg_3 sont identiques (mais comme nous le montrons dans le paragraphe 5, ces trois algorithmes auront des performances différentes en dehors du régime asymptotique) avec :

$$(\mathbf{C}_{\Theta_1})_{k,l} = \frac{1}{\gamma_k \gamma_l} \begin{pmatrix} \alpha_{2,2}^{(k)} & -\alpha_{1,2}^{(k)} \\ \alpha_{1,2}^{(l)} & -\alpha_{2,2}^{(l)} \end{pmatrix} \mathbf{B}^{(k,l)} \begin{pmatrix} \alpha_{2,2}^{(l)} \\ \alpha_{1,2}^{(l)} \end{pmatrix}$$

avec $(\mathbf{B}^{(k,l)})_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} 4\Re \left((\tilde{\mathbf{a}}_k^T \mathbf{U}^* \tilde{\mathbf{a}}_l) (\tilde{\mathbf{a}}_{i,k}^H \mathbf{\Pi} \tilde{\mathbf{a}}_{j,l}) \right)$, $i, j \in \{1, 2\}$,

$\tilde{\mathbf{a}}_k \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{a}}(\theta_k, \phi_k) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{a}(\theta_k) \\ \mathbf{a}^*(\theta_k) e^{-i\phi_k} \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{a}}_{1,k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\tilde{\mathbf{a}}_k}{d\theta_k}$, $\tilde{\mathbf{a}}_{2,k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\tilde{\mathbf{a}}_k}{d\phi_k}$

$\frac{d\tilde{\mathbf{a}}_k}{d\phi_k}$ et où $\alpha_{i,j}^{(k)}$ et γ_k sont des facteurs purement géométriques : $\alpha_{i,j}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \Re \left(\tilde{\mathbf{a}}_{i,k}^H \mathbf{\Pi} \tilde{\mathbf{a}}_{j,k} \right)$ et $\gamma_k \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{1,1}^{(k)} \alpha_{2,2}^{(k)} - (\alpha_{1,2}^{(k)})^2$. Et en particulier :

$$C_{\theta_k} = \frac{2\alpha_{2,2}^{(k)}}{\gamma_k} (\tilde{\mathbf{a}}_k^H \mathbf{U} \tilde{\mathbf{a}}_k), \quad k = 1, \dots, K \quad (4.9)$$

qui donne dans le cas d'une seule source ($K = 1$) :

$$C_{\theta_1} = \frac{1}{\alpha_1} \left[\frac{\sigma_n^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{2\|\mathbf{a}\|^2} \frac{\sigma_n^4}{\sigma_1^4} \right],$$

où α_1 est le même facteur géométrique qu'au paragraphe 2.

Preuve :

L'expression de \mathbf{C}_{Θ_1} est démontrée [1] pour l'algorithme Alg_1 grâce à $\mathbf{C}_{\Theta_1} = \mathbf{D}_{\text{Alg}_1} \mathbf{C}_\Pi \mathbf{D}_{\text{Alg}_1}^H$ où $\mathbf{D}_{\text{Alg}_1}$ est calculée par un simple calcul de perturbation en remarquant que [3] $g_{1,T}(\alpha) = \min_\phi \tilde{\mathbf{a}}^H(\alpha, \phi) \mathbf{\Pi}_T \tilde{\mathbf{a}}(\alpha, \phi)$. ■

Nous démontrons ensuite successivement que Alg_1 puis Alg_2 ont les mêmes performances asymptotiques que Alg_3 . Puisque $g_{3,T}(\alpha) = g_{1,T}(\alpha) r_T(\alpha)$ avec $r_T(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}^H(\alpha) \mathbf{\Pi}_{1,T} \mathbf{a}(\alpha) + |\mathbf{a}^H(\alpha) \mathbf{\Pi}_{1,2,T} \mathbf{a}^*(\alpha)|$ et $r(\theta_k) \neq 0$ (car par l'absurde si $r(\theta_k) = 0$ alors $\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{a}(\theta_k) = 0$ et $|\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{\Pi}_{1,2} \mathbf{a}^*(\theta_k)| = 0$ et cela entraînerait $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_k^* e^{i\beta} \end{pmatrix}$ appartiendrait à l'espace signal $\forall \beta$). Par suite en utilisant la preuve de [6, Theorem 3.2], les algorithmes Alg_1 et Alg_3 ont les mêmes performances asymptotiques. ■

Pour démontrer que les algorithmes Alg_2 et Alg_3 ont les mêmes performances asymptotiques, nous avons par de simples calculs de perturbation (en tout point semblable à celui de [7] pour Alg_2) démontré [1] que ces deux algorithmes vérifient avec les mêmes matrices $\mathbf{A}_{1,k}$ et $\mathbf{A}_{2,k}$

$$\begin{aligned} \theta_{k,T} &= \theta_k + \mathbf{A}_{1,k} \text{Vec}(\delta \mathbf{\Pi}_{1,T}) + \mathbf{A}_{1,k} \text{Vec}(\delta \mathbf{\Pi}_{1,2,T}) \\ &\quad + \mathbf{A}_{2,k}^* \text{Vec}(\delta \mathbf{\Pi}_{1,2,T}^*) + o(\delta \mathbf{\Pi}_{1,T}) + o(\mathbf{\Pi}_{1,2,T}), \end{aligned}$$

car ces deux algorithmes satisfont la même équation de perturbation :

$$\begin{aligned} &\left(\text{Tr} \left[\mathbf{\Pi}_1 \mathbf{M}_k'' \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{M}_k \right] + \text{Tr} \left[\mathbf{\Pi}_1 \mathbf{M}_k' \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{M}_k' \right] \right. \\ &- \Re \text{Tr} \left[\mathbf{\Pi}_{1,2}^H \mathbf{M}_k'' \mathbf{\Pi}_{1,2} \mathbf{M}_k^* \right] - \Re \text{Tr} \left[\mathbf{\Pi}_{1,2}^H \mathbf{M}_k' \mathbf{\Pi}_{1,2} \mathbf{M}_k'^* \right] \left. \right) \delta \theta_{k,T} \\ &= \text{Tr} \left[\delta \mathbf{\Pi}_{1,T} \mathbf{M}_k' \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{M}_k \right] + \text{Tr} \left[\mathbf{\Pi}_1 \mathbf{M}_k' \delta \mathbf{\Pi}_{1,T} \mathbf{M}_k \right] \\ &- \Re \text{Tr} \left[\delta \mathbf{\Pi}_{1,2,T}^H \mathbf{M}_k' \mathbf{\Pi}_{1,2} \mathbf{M}_k^* \right] - \Re \text{Tr} \left[\mathbf{\Pi}_{1,2}^H \mathbf{M}_k' \delta \mathbf{\Pi}_{1,2,T} \mathbf{M}_k'^* \right] \\ &+ o(\delta \mathbf{\Pi}_{1,T}) + o(\mathbf{\Pi}_{1,2,T}) \text{ avec } \delta \theta_{k,T} \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{k,T} - \theta_k, \delta \mathbf{\Pi}_{1,T} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\mathbf{\Pi}_{1,T} - \mathbf{\Pi}_1, \delta \mathbf{\Pi}_{1,2,T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{\Pi}_{1,2,T} - \mathbf{\Pi}_{1,2} \text{ et } \mathbf{M}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k), \\ &\mathbf{M}_k' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{M}_k}{d\theta_k} \text{ et } \mathbf{M}_k'' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2\mathbf{M}_k}{d\theta_k^2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Quant à Alg_4 proposé lorsque $\rho_k < 1$ pour toutes les sources, notons que ces performances sont critiques dès que la non circularité d'une source s'approche de la non circularité maximale. Car dans ce cas la matrice pseudo inverse $\tilde{\mathbf{S}}^\#$ de $\tilde{\mathbf{S}}$ de rang $2K$ a une norme qui tend vers l'infini et par suite \mathbf{C}_{Π_1} aussi. Ces performances s'obtiennent comme celle de l'algorithme MUSIC classique :

$$(\mathbf{C}_{\Theta_1}^{\text{Alg}_4})_{k,l} = \frac{2}{\alpha_k \alpha_l} \Re \left((\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{U} \mathbf{a}(\theta_l)) (\mathbf{a}'^H(\theta_k) \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{a}'(\theta_l)) \right)$$

avec $\mathbf{a}'(\theta_l) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{a}(\theta_l)}{d\theta_l}$, qui donne dans le cas particulier d'une seule source :

$$C_{\theta_1}^{\text{Alg}_4} = \frac{1}{\alpha_1(1-\rho_1^2)} \left[\frac{\sigma_n^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \frac{(1+\rho_1^2)\sigma_n^4}{(1-\rho_1^2)\sigma_1^4} \right] \geq C_{\theta_1}^{\text{MUSIC}}$$

Ce résultat s'étend par calcul numérique dans le cas de plusieurs sources.

5 Simulations

Dans les quatre simulations présentées, nous considérons un réseau linéaire équidistant de $M = 6$ capteurs avec deux sources de même puissance ($\text{SNR} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_n^2}$) émettant des signaux BPSK filtrés ou non de même module de circularité ($\rho \stackrel{\text{def}}{=} \rho_1 = \rho_2$) et de phase de circularité ϕ_1 et ϕ_2 . La durée d'observation et le nombre de réalisation de Monte Carlo sont respectivement de $T = 500$ et 1000.

Sur la Fig.1, est mis en évidence, le rapport

$$r_{\theta_1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{var}_{\theta_1}^{\text{AMV}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}}{\text{var}_{\theta_1}^{\text{AMV}(\mathbf{R})}}$$

en fonction de ρ pour diverses valeurs de $\Delta\theta \stackrel{\text{def}}{=} \theta_2 - \theta_1$. Elle met en évidence le gain apporté par la matrice de covariance \mathbf{R}'_y pour de faibles valeurs de $\Delta\theta$, y compris pour des signaux de circularité non maximale. Par contre pour des grandes valeurs de $\Delta\theta$, le gain n'est apporté qu'au voisinage de $\rho = 1$.

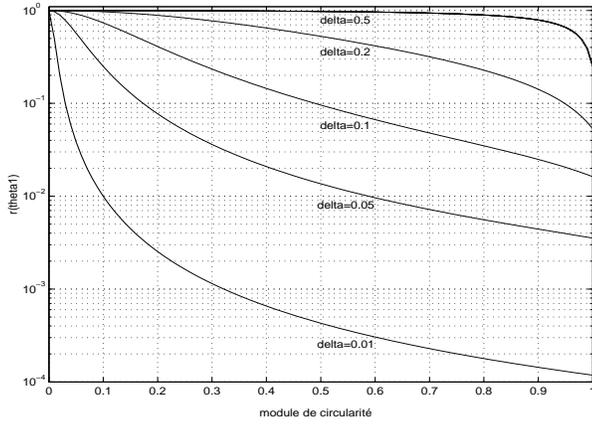


Fig.1 $\text{SNR}=20\text{dB}$, $\phi_1 = \pi/2$ et $\phi_2 = \pi/3$.

Sur les Fig.1 et 2 sont mis en évidence var_{θ_1} pour les différents algorithmes. Elle met en évidence la bonne efficacité des algorithmes $(\text{alg}_k)_{k=1,2,3}$ si on rapporte leur variance asymptotique à celle de l'algorithme AMV basé sur \mathbf{R}_y et \mathbf{R}'_y . Par contre les domaines asymptotiques de ces différents algorithmes sont très différents. L'algorithme AMV basé sur \mathbf{R}_y et \mathbf{R}'_y surpasse de ce point de vue les trois algorithmes $(\text{alg}_k)_{k=1,2,3}$ et parmi ceux-ci, l'algorithme alg_2 de type Root est le meilleur.

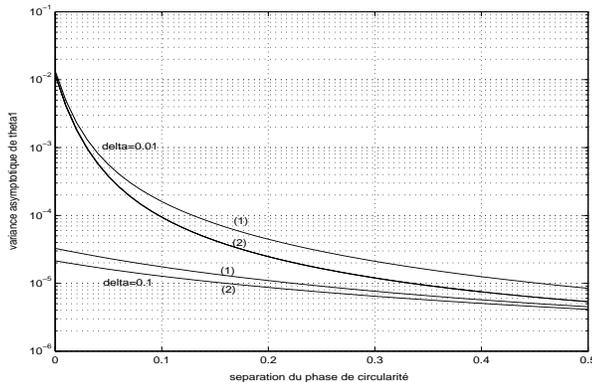


Fig.2 $\text{SNR}=20\text{dB}$, $\rho = 1$, $\phi_1 = \pi/2$ et $\phi_2 = \pi/3$.

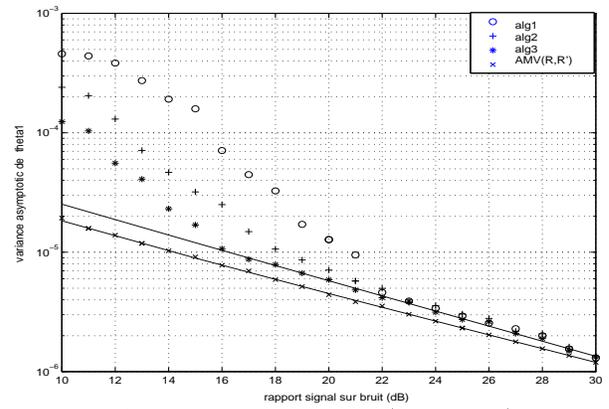


Fig.3 $\Delta\theta = 0.05$, $\rho = 1$, $\phi_1 = \pi/2$ et $\phi_2 = \pi/3$.

Enfin la Fig.4 montre le rôle des phases ϕ_k de la circularité. Par calcul numérique, nous avons montré que pour tous les algorithmes présentés, dans les conditions étudiées, les variances asymptotiques ne dépendent pas de ϕ pour $\phi \stackrel{\text{def}}{=} \phi_1 = \phi_2$ et ne dépendent que de $\|\phi_1 - \phi_2\|$ pour $\phi_1 \neq \phi_2$. Dans ce dernier cas, les performances se dégradent fortement pour de faibles valeurs de $\Delta\theta$ et de $\|\phi_1 - \phi_2\|$. Par contre pour de grandes valeurs de $\Delta\theta = x$, les variances asymptotiques ne se dégradent plus lorsque $\|\phi_1 - \phi_2\|$ devient faible (on retrouve le cas $K=1$).

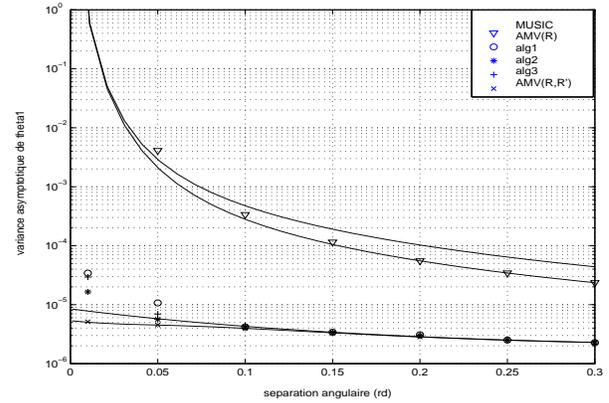


Fig.4 $\text{SNR}=20\text{dB}$, $\rho = 1$; (1) algorithmes $(\text{alg}_k)_{k=1,2,3}$, (2) algorithme AMV basé sur \mathbf{R}_y et \mathbf{R}'_y .

Références

- [1] J.P. Delmas, H. Abeida, "Second-order DOA estimation for non-circular sources," en préparation.
- [2] J.P. Delmas, "Asymptotically minimum variance second-order DOA estimation for non-circular sources," soumis à *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002.
- [3] P. Gounon, C. Adnet and J. Galy, "Localisation angulaire de signaux non circulaires," *Traitement du Signal*, vol. 15, no. 1 pp. 17-23, 1998.
- [4] P. Chargé, Y. Wang and J. Saillard, "A non-circular sources direction finding method using polynomial rooting," *Signal Processing*, vol. 81, pp. 1765-1770, 2001.
- [5] J.P. Delmas, "Asymptotic performance of second-order algorithms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 1, pp. 49-57, January 2002.
- [6] P. Stoica and A. Nehorai, "MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound," *IEEE Transactions on ASSP*, vol. 37, no. 5, pp. 720-741, May 1989.
- [7] H. Krim, P. Forster and G. Proakis, "Operator approach to performance analysis of root-MUSIC and root-min-norm," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 7, pp. 1687-1696, July 1992.