

Analyse fractale par morceaux de radiographies osseuses

R. HARBA¹, S. BRETTEIL¹, R. JENNANE¹, I. IRIBARREN²,
E. PERRIN³, C. L. BENHAMOU⁴

¹Laboratoire d'Electronique, Signaux, Images, UPRES EA 1715 et GdR ISIS du CNRS
12, rue de Blois, IPO-ESPEO, Université d'Orléans, France,
Rachid.Harba@univ-orleans.fr

Tel : 02 38 41 72 29 ; Fax : 02 38 41 72 45

²Ecole de Mathématique, Faculté de science, Université Centrale du Venezuela

³Laboratoire de résonance magnétique nucléaire, Université de Lyon 1, France

⁴Equipe INSERM ERIT M-0101, Centre Hospitalier Régional d'Orléans, France

Résumé - L'objectif de cette étude est de proposer, à partir du mouvement brownien fractionnaire (fBm) de paramètre H, un modèle plus général qui puisse englober des phénomènes présentant un caractère fractal par morceaux lors d'une analyse en fréquence. Ce nouveau modèle est appelé pfBm de paramètres H_0 en basse fréquence, H_1 en haute fréquence, ces deux régimes étant séparés par une fréquence de coupure γ . Pour $H_0=H_1=H$, le pfBm se réduit au fBm, lui-même étant le mouvement brownien pour $H=0.5$. Nous pensons que le pfBm fournit ainsi un outil plus flexible que le fBm pour l'expérimentateur. Nous avons montré que ce processus a des incréments stationnaires et qu'il est autosimilaire de paramètre H_0 pour les basses fréquences et de paramètre H_1 pour les hautes fréquences. Nous avons alors étudié des radiographies trabéculaires osseuses qui présentent ce caractère bifractal. Les résultats montrent que l'analyse fractale par morceaux est plus efficace que l'analyse fractale standard pour diagnostiquer les modifications de la micro-architecture osseuse liées à l'ostéoporose.

Abstract - The object of this work is to define a new process based on fractional Brownian motion (fBm) of H parameter that can model data presenting a piecewise frequency fractal character. This new process is called piecewise fBm (pfBm) of parameter H_0 for the low frequencies, H_1 for the high ones, this two regimes being separated by a cut-off frequency γ . For $H_0=H_1=H$, pfBm reduces to fBm, fBm being standard Brownian motion for $H=0.5$. We believe that pfBm offers a more flexible tool than fBm for experimentations. We have shown that pfBm has stationary increments and is self-similar of parameter H_0 for low frequencies and self-similar of parameter H_1 for the high ones. We have studied trabecular bone radiographs that demonstrate a piecewise fractal character. Results show that a pfBm is more efficient than a classical fractal study for the diagnosis of microarchitectural modifications linked to osteoporosis.

1. Introduction

Défini comme une extension du mouvement brownien, le mouvement brownien fractionnaire (fBm pour fractional Brownian motion) de paramètre H compris entre 0 et 1 est un modèle pour les signaux et images fractals [1]. Il a des incréments stationnaires, le bruit gaussien fractionnaire (fGn pour fractional Gaussian noises), ce qui permet de l'étudier plus facilement. Ces modèles ont été utilisés pour des signaux en $1/f$, pour les données à dépendance longue, et pour les séries auto-similaires [2][3][4]. La principale caractéristique du fBm est que son spectre moyen varie comme $1/f^{2H+1}$ [5]. Dans une échelle log-log, ce spectre est donc une droite de pente $-2H-1$ ce qui révèle le caractère fractal d'un signal.

Les fractals purs sont une vue de l'esprit. En effet, le caractère en $1/f$ ne peut pas être présent en pratique pour des fréquences très basses aussi bien que pour des fréquences tendant vers l'infini. En réalité, on se contente d'étudier une zone en $1/f$ limitée. Dans certains cas, on observe non pas un seul mais deux domaines fractals de paramètres H_0 pour les basses fréquences et H_1 pour les hautes fréquences, ces deux domaines étant séparés par une fréquence de coupure γ . C'est le cas par exemple d'agrégats de silicium [6]. Ce type de double fractalité est aussi présent sur des images d'argile [7] et sur des radiographies d'os trabéculaire [8].

Ces résultats empiriques suggèrent d'imaginer des outils plus flexibles pour prendre en compte des situations où le modèle fractal montre ses limites. C'est le cas des multifractals qui généralisent d'une certaine manière les fractals [9-10]. On peut citer entre autres le

mouvement multifractal généralisé où le paramètre H peut évoluer au cours du temps [11]. Cependant, ce processus n'a pas d'incréments stationnaires. Une autre généralisation du fBm a été récemment proposée par les auteurs et a été appelé fBm d'ordre n [12]. Le paramètre H du nouveau processus peut évoluer entre $n-1$ et n , avec n un entier strictement positif. Concernant la double auto-similarité, une première approche dans cette direction a été proposée dans [13] et a été appelée la signature fractale. Mais cette approche n'a pas de base théorique établie. Plus récemment, un nouveau modèle dit fBm asymptotique permet de contrôler les corrélations à long terme indépendamment de celles à court terme [14]. Cependant, le paramètre H qui gouverne la dépendance à long terme ne peut évoluer qu'entre $1/2$ et 1. De plus, le lien entre ce modèle et le fBm n'est pas direct.

L'objectif de cette étude est de proposer, à partir du fBm, un nouveau modèle plus général qui puisse englober les phénomènes présentant un caractère fractal par morceaux. Ce nouveau modèle, de paramètres H_0 en basse fréquence, H_1 en haute fréquence, ces deux régimes étant séparés par une fréquence de coupure γ , est appelé fBm par morceaux (pfBm pour piecewise fBm). Pour $H_0=H_1=H$, le pfBm se réduit au fBm, lui-même étant le mouvement brownien pour $H=0.5$. Le pfBm permet de généraliser la classe de signaux fBm et fournit ainsi un outil plus flexible pour l'expérimentateur.

Cette communication sera articulée de la manière suivante. Dans un premier temps, nous présenterons le nouveau modèle fractal par morceaux et allons étudier ses propriétés. Puis nous l'appliquerons à des

radiographies de l'os trabéculaire qui présentent un caractère bifractal.

2. Le modèle pfBm

Nous rappelons en premier lieu la définition du fBm. Pour un paramètre $0 < H < 1$, $B(\omega)$ étant le mouvement brownien complexe, le fBm B_H est défini comme :

$$B_H(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(i\omega)^{H+1/2}} (e^{i\omega t} - 1) dB(\omega). \quad (1)$$

La convergence du fBm est assurée en $\omega \rightarrow 0$ pour $H < 1$ et en $\omega \rightarrow \infty$ pour $0 < H$. C'est un processus autosimilaire car pour un facteur d'échelle $a > 0$:

$$\left\{ \frac{B_H(to+at) - B_H(to)}{a^H} \right\} \equiv \left\{ B_H(to+t) - B_H(to) \right\}. \quad (2)$$

\equiv signifie égalité en loi.

Le pfBm $B_{H_0, H_i, \gamma}$ de paramètres $H_0 < 1$, $H_i > 0$ et $\gamma > 0$ est défini comme :

$$B_{H_0, H_i, \gamma}(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{H_0, H_i, \gamma}(\omega) (e^{i\omega t} - 1) dB(\omega) \quad (3)$$

avec

$$F_{H_0, H_i, \gamma}(\omega) = \frac{1_{[0, \gamma]}(|\omega|)}{(i\omega)^{H_0+1/2}} + \gamma^{H_i-H_0} \frac{1_{[\gamma, \infty)}(|\omega|)}{(i\omega)^{H_i+1/2}} \quad (4)$$

où $1_I(|\omega|)$ est la fonction indicatrice sur l'intervalle I (i.e. $1_I(|\omega|) = 1$ si $\omega \in I$, $1_I(|\omega|) = 0$ sinon). Cette intégrale est convergente pour $\omega \rightarrow 0$ si $H_0 < 1$ et pour $\omega \rightarrow \infty$ si $H_i > 0$. La continuité en γ est assurée par le facteur $\gamma^{H_i-H_0}$. C'est un processus Gaussien, continu et non stationnaire. Pour $H_0 = H_i = H$ dans l'intervalle $]0, 1[$ le pfBm se réduit au fBm. De plus pour H_0 et H_i appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ nous avons :

$$\lim_{g \rightarrow 0} \frac{B_{H_0, H_i, \gamma}(t)}{g^{H_i-H_0}} \equiv B_{H_i}(t) \quad (5)$$

et

$$\lim_{g \rightarrow \infty} B_{H_0, H_i, \gamma}(t) \equiv B_{H_0}(t). \quad (6)$$

Nous nous intéressons maintenant aux incréments du processus que nous appelons $W_{H_0, H_i, \gamma}^u$ et définis pour un incrément u appartenant à l'ensemble de réels comme :

$$W_{H_0, H_i, \gamma}^u(t) = B_{H_0, H_i, \gamma}(t+u) - B_{H_0, H_i, \gamma}(t). \quad (7)$$

Nous appelons ce processus fGn par morceaux (pfGn pour piecewise fGn). Leur autocorrélation est donnée par :

$$G_{H_0, H_i, \gamma}^{u, v}(t, s) = E(W_{H_0, H_i, \gamma}^u(t) \overline{W_{H_0, H_i, \gamma}^v(s)}). \quad (8)$$

A partir de la définition (3), du fait que

$$E(dB(t) \overline{dB(s)}) = 2p \delta(t-s) dt \quad (9)$$

et en faisant le changement de variable $\tau = t-s$ il vient

$$G_{H_0, H_i, \gamma}^{u, v}(\mathbf{t}) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \sin\left(\frac{u\omega}{2}\right) 2 \sin\left(\frac{v\omega}{2}\right) e^{\frac{i(u-v)\omega}{2} \mathbf{t}} \left| F_{H_0, H_i, \gamma}(\omega) \right|^2 e^{i\omega \mathbf{t}} d\omega. \quad (10)$$

Lorsque $u=v$, on voit que le pfGn est donc un processus stationnaire dont la densité spectrale de puissance est de la forme

$$4 \sin^2\left(\frac{u\omega}{2}\right) \left| F_{H_0, H_i, \gamma}(\omega) \right|^2. \quad (11)$$

Nous allons maintenant nous intéresser à l'autosimilarité du pfBm. Mais contrairement au fBm, il existe deux types d'autosimilarité asymptotique pour le pfBm. Plus précisément, nous allons montrer que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{B_{H_0, H_i, \gamma}(to+at) - B_{H_0, H_i, \gamma}(to)}{a^{H_i \gamma^{H_i-H_0}}} \right\} \equiv \left\{ B_{H_i}(to+t) - B_{H_i}(to) \right\} \quad (12)$$

et que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \frac{B_{H_0, H_i, \gamma}(to+at) - B_{H_0, H_i, \gamma}(to)}{a^{H_0}} \right\} \equiv \left\{ B_{H_0}(to+t) - B_{H_0}(to) \right\}. \quad (13)$$

Pour cela, comme le processus est gaussien, cela revient à montrer que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{E \left\{ \overline{B_{H_0, H_i, \gamma}(at) B_{H_0, H_i, \gamma}(as)} \right\}}{a^{2H_i \gamma^{2(H_i-H_0)}}} \quad (14)$$

$$= E \left\{ \overline{B_{H_i}(t) B_{H_i}(s)} \right\}$$

et que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{E \left\{ \overline{B_{H_0, H_i, \gamma}(at) B_{H_0, H_i, \gamma}(as)} \right\}}{a^{2H_0}} \quad (15)$$

$$= E \left\{ \overline{B_{H_0}(t) B_{H_0}(s)} \right\}.$$

Commençons par prouver (14). En remarquant que $W_{H_0, H_i, \gamma}^u(0) = B_{H_0, H_i, \gamma}(t)$, et en utilisant (10) pour $\tau=0$; on peut écrire que

$$E\left\{\overline{B_{H_0, H_i, g}(t) B_{H_0, H_i, g}(s)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sin\left(\frac{Wt}{2}\right) 2\sin\left(\frac{Ws}{2}\right) e^{\frac{i(u-v)W}{2}} \left|F_{H_0, H_i, g}(W)\right|^2 dW \quad (16)$$

$$= G_{H_0, H_i, g}^{t,s}(0) = G_{H_0, g}^{t,s}(0) + G_{H_i, g}^{t,s}(0)$$

avec

$$G_{H_0, g}^{t,s}(0) = \frac{1}{2p} \times \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sin\left(\frac{Wt}{2}\right) 2\sin\left(\frac{Ws}{2}\right) e^{\frac{i(u-v)W}{2}} \frac{1_{[0, g]}(|W|)}{|W|^{2H_0+1}} dW \quad (17)$$

et

$$G_{H_i, g}^{t,s}(0) = \frac{g^{2(H_i-H_0)}}{2p} \times \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sin\left(\frac{Wt}{2}\right) 2\sin\left(\frac{Ws}{2}\right) e^{\frac{i(u-v)W}{2}} \frac{1_{[g, \infty]}(|W|)}{|W|^{2H_i+1}} dW. \quad (18)$$

Calculons la fonction d'autocorrélation pour un facteur d'échelle $a > 0$:

$$G_{H_0, H_i, g}^{at,as}(0) = G_{H_0, g}^{at,as}(0) + G_{H_i, g}^{at,as}(0) \quad (19)$$

En remplaçant ω par ω/a nous obtenons :

$$\frac{G_{H_0, g}^{at,as}(0)}{a^{2H_i}} = \frac{a^{2H_0}}{a^{2H_i}} \frac{1}{2p} \times \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sin\left(\frac{Wt}{2}\right) 2\sin\left(\frac{Ws}{2}\right) e^{\frac{i(u-v)W}{2}} \frac{1_{[0, ag]}(|W|)}{|W|^{2H_0+1}} dW \quad (20)$$

et

$$\frac{G_{H_i, g}^{at,as}(0)}{a^{2H_i}} = \frac{g^{2(H_i-H_0)}}{2p} \times \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sin\left(\frac{Wt}{2}\right) 2\sin\left(\frac{Ws}{2}\right) e^{\frac{i(u-v)W}{2}} \frac{1_{[ag, \infty]}(|W|)}{|W|^{2H_i+1}} dW. \quad (21)$$

Lorsque a tend vers zéro, nous avons les limites suivantes :

$$\lim_{a \rightarrow 0} 1_{[0, ag]}(|W|) = 0 \text{ et } \lim_{a \rightarrow 0} 1_{[ag, \infty]}(|W|) = 1. \quad (22)$$

Nous obtenons finalement

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{G_{H_0, H_i, g}^{at,as}(0)}{a^{2H_i} g^{2(H_i-H_0)}} = E\left\{\overline{B_{H_i}(t) B_{H_i}(s)}\right\} \quad (23)$$

Ce qui prouve bien (14). La preuve de (15) résulte d'un calcul équivalent en remarquant que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} 1_{[0, ag]}(|W|) = 1 \text{ et } \lim_{a \rightarrow \infty} 1_{[ag, \infty]}(|W|) = 0. \quad (24)$$

Pour les grandes échelles, c'est à dire pour a tendant vers l'infini, ou réciproquement pour les basses fréquences, le processus est autosimilaire de paramètre H_0 . En revanche, pour a tendant vers zéro, ou pour les hautes fréquences, le processus est autosimilaire de paramètre H_i .

Maintenant que le processus pfBm est complètement étudié, nous pouvons envisager l'application relative aux radiographies osseuses.

3. Application aux radiographies de l'os trabéculaire

Cette application a pour but d'étudier les modifications microarchitecturales de l'os trabéculaire. Cet os est formé de travées interconnectées ayant une épaisseur moyenne de l'ordre de 100 à 200 microns et distantes les unes des autres de 400 à 500 microns en moyenne. Lors du vieillissement ou après la ménopause, il y a une perte de masse osseuse qui, lorsqu'elle est excessive, est appelée ostéoporose. L'os trabéculaire subit des modifications architecturales : amincissement des travées, diminution de leur nombre, perforations, connectivité plus faible. L'amincissement des travées n'est pas très délétère en matière de résistance, alors que les autres modifications le sont à un haut degré. Les traitements à base de médicaments peuvent augmenter l'épaisseur de l'os, mais pas combler une perte de connectivité par exemple. Ces deux raisons provoquent un regain d'intérêt pour des études permettant d'évaluer les modifications de la structure des travées. La radiographie X a l'avantage de la simplicité et de son faible coût. C'est pourquoi nous avons développé ce type d'analyse en utilisant une approche fractale pour caractériser la rugosité de la texture visible sur les radiographies [15]. Elle permet ainsi de quantifier la qualité architecturale de l'os trabéculaire.

Cependant une analyse fine du contenu spectral de telles images permet de mettre en évidence deux régimes fractals comme le montrent les figures 1 et 2. Les incréments des lignes de l'image sont stationnaires. Leur périodogramme moyen montre clairement deux zones fractales. La première en dessous du point 26 qui correspond à une grandeur de l'ordre du millimètre, et la seconde au dessus de cette valeur.

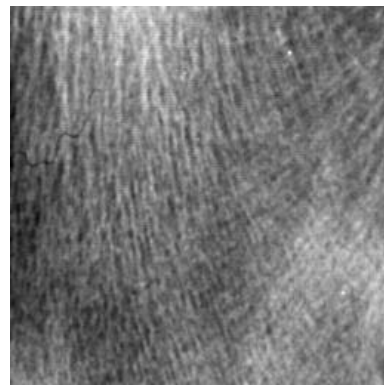


FIG. 1 : radiographie numérisée de taille 256^2 d'un calcaneum d'un ostéopathe dans la zone trabéculaire. La taille du pixel est de 100^2 microns

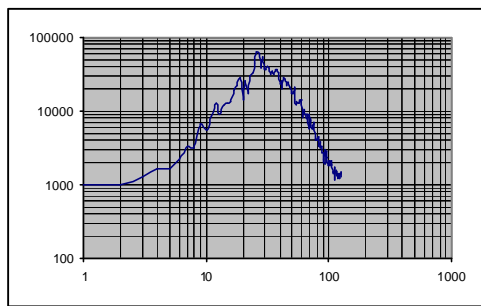


FIG. 2 : périodogramme moyen des incréments des lignes de l'image présentée figure 1

Pour mettre en évidence la signification de cette fréquence de coupure, nous avons filtré l'image précédente ainsi que celle issue d'un témoin par un filtre circulaire de rayon 26 pixels. La partie basse fréquence est présentée figure 3 et la partie haute fréquence figure 4.

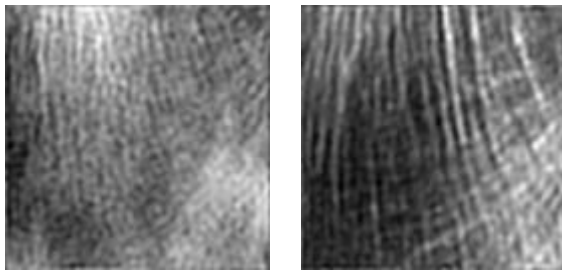


FIG. 3 : image filtrée passe bas d'un ostéoporotique à gauche ($H=0.44$) et d'un témoin à droite ($H=0.67$)

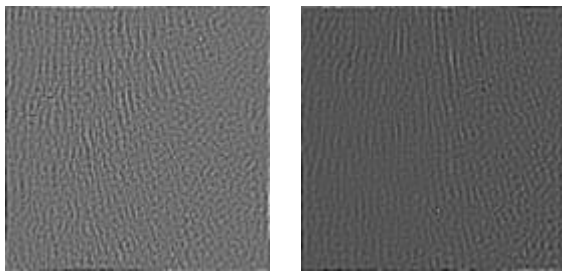


FIG. 4 : image filtrée passe haut pour l'ostéoporotique à gauche et le témoin à droite

La partie basse fréquence correspond à des motifs supérieurs au millimètre qui ne sont guère affectés lors de l'ostéoporose. La partie haute fréquence quant à elle correspond aux motifs inférieurs au millimètre et l'ostéoporose modifie fortement cette zone fréquentielle. Il apparaît donc plus naturel d'appliquer le modèle fractal par morceaux plutôt que le classique fBm à ce genre de données.

4. Résultats

Nous avons analysé un ensemble de 77 radiographies, soit 38 issues de personnes atteintes d'ostéoporose et 39 issues de sujets sains. Nous avons dans un premier temps analysé ces données en appliquant le fBm classique en calculant le paramètre H de ce modèle sur les incréments des lignes des diverses images par maximum de vraisemblance. Puis nous avons appliqué le modèle fractal par morceaux en calculant les paramètres H_o et H_i par régression linéaire sur le

spectre des incréments avec γ fixé à la valeur de 26. Nous avons effectué ensuite un test de Student à un niveau de 1% en utilisant respectivement H , H_o , et H_i successivement comme paramètres discriminants. Pour le paramètre H du fBm, t vaut 4.09 (une valeur supérieure à 2.69 montre qu'il y a une différence significative), alors que t vaut 0.909 et 5.39 pour H_o et H_i respectivement. Cela montre clairement que la paramètre H_o en basse fréquence ne discrimine pas ces deux populations comme attendu alors qu'une analyse fractale par morceaux effectuée dans les hautes fréquences permet une meilleure discrimination qu'une analyse fractale basée sur le fBm.

- [1] B. B. Mandelbrot, J. W. Van Ness. *Fractional Brownian motion, fractional noises and applications*. SIAM, Vol. 10, pp. 422-438, 1968.
- [2] A. I. McLeod, K. W. Hipel. *Preservation of the rescaled adjusted range: a reassessment of the Hurst phenomenon*. Water Resources Research, Vol. 14, pp. 491-508, 1978.
- [3] B. B. Mandelbrot. *Noises with $1/f$ spectrum, a bridge between Direct current and white Noise*. IEEE Trans. on Info. Theory, Vol. IT-13, pp. 289-298, 1967.
- [4] P. Abry, D. Veitch. *Wavelet Analysis of Long-Range-Dependent Traffic*. IEEE Trans. on Info. Theory, Vol. 44, pp. 2-15, 1998.
- [5] P. Flandrin. *On the Spectrum of Fractional Brownian Motions*. IEEE Trans. on Info. Theory, Vol. 35, pp. 197-199, 1989.
- [6] D. W. Schaeffer, J. E. Martin, P. Wiltzius, D. S. Cannel. *Fractal geometry of colloid aggregates*. Phys. Rev. Letters, Vol. 52, pp. 2371-2374, 1984.
- [7] M. Zabat, M. Veyer-Besancon, R. Harba, S. Bonnamy, H. Van Damme. *Surface Topography and Mechanical Properties of Smectite Films*. Progr. Colloid. Polym. Sci., Vol. 105, pp. 96-102, 1997.
- [8] R. Harba, G. Jacquet, R. Jennane, T. Loussot, C. L. Benhamou, E. Lespessailles, D. Tourlière. *Determination of Fractal Scales on Trabecular Bone X-Ray Images*. Fractals, Vol. 2, N° 3, pp. 451-456, 1994.
- [9] B. B. Mandelbrot. *Intermittent Turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier*. Journal of fluid Mechanics, Vol. 62, pp. 331-358, 1974.
- [10] U. Frish, G. Parisi. *Fully developed turbulence and intermittency*. in Proc. of Int. School on Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics, North Holland, Amsterdam, 1985.
- [11] A. Ayache, L. Lévy-Véhel. *The generalized multifractionnal Brownian motion*. Statistical inference for stochastic processes, Vol. 3, pp. 7-18, 2000.
- [12] E. Perrin, R. Harba, C. Berzin-Joseph, I Iribarren, A. Bonami. *n -th-order fractional Brownian motion and fractional Gaussian noises*. IEEE Transaction on Signal Processing, Vol. 45, N° 5, pp. 1049-1059, 2001.
- [13] S. Peleg, J. Naor, R. Hartley, D. Avnir. *Multiple Texture Analysis and Classification*. IEEE PAMI, Vol. 6, N° 4, pp. 518-523, 1984.
- [14] L. M. Kaplan, C. C. Jay Kuo. *Extending Self-Similarity for Fractional Brownian Motion*. IEEE Trans. on Signal Proc., Vol. 42, N° 12, pp. 3526-3550, 1994.
- [15] C. L. Benhamou, E. Lespessailles, G. Jacquet, R. Harba, R. Jennane, T. Loussot, D. Tourlière, W. J. Ohley. *A Fractal Evaluation of Trabecular Bone Microarchitecture on Radiographs*. Journal of Bone and Mineral Research, Vol. 9, N° 12, pp. 1909-1918, 1994.