

Nouveaux modèles paramétriques 3-D.

Y. STITOU, F. TURCU & M. NAJIM

Equipe Signal et Image – UMR 5131 & LASIS- Laboratoire commun TFE/CNRS.

ENSERB – Université Bordeaux1, BP 99, 33402 TALENCE - Cedex.

stitou@tsi.u-bordeaux.fr, turcu@igd.univ-lyon1.fr, najim@tsi.u-bordeaux.fr

Résumé – Le travail présenté dans cet article se situe dans le cadre de la modélisation paramétrique des champs stochastiques tridimensionnels (3-D). Nous introduisons des modèles paramétriques issus de la décomposition de Wold 3-D et mettons en évidence la structure spatiale et spectrale de la partie évanescence d'une texture 3-D.

Abstract – This paper deal with the multidimensional (3-D) parametric model of stochastic processes. We introduce a new models and new results based on 3-D Wold decomposition. By this way we can provide both spatial and spectral properties of the evanescent component of 3-D texture.

1. Introduction

Dans le contexte de la prédiction linéaire, Helson et Lowdenslager [1] ont introduit en 1962 le théorème de la décomposition de type Wold pour les processus stochastiques stationnaires. Il s'agit de la décomposition d'un processus en une somme de deux composantes orthogonales, la première étant déterministe et la deuxième est complètement non déterministe (CND). En outre, ils ont mis en évidence l'existence dans le cas 2-D d'une troisième composante nommée *composante évanescence*, obtenue par la décomposition de la partie déterministe en deux parties orthogonales. Ces travaux ont été étendus et approfondis par Korezlioglu et Loubaton [2], Francos et al. [3].

Ces résultats théoriques ont été appliqués ces dernières années en traitement d'image. Ainsi, dans le cadre de l'analyse-synthèse des images texturées, Francos et al. [4] ont proposé des modèles paramétriques pour chacune des trois composantes. Récemment ces modèles ont été appliqués à la segmentation et à l'indexation d'images texturées [5]. Par ailleurs, plusieurs algorithmes ont été proposés pour l'extraction des différentes composantes d'une image texturée [6] - [8].

La décomposition de Wold 2-D pallie le fait que le modèle paramétrique classique de type AR 2-D ne permet pas d'analyser et de synthétiser les textures structurées c'est-à-dire celles qui contiennent des parties périodiques ou avec des orientations privilégiées [9], [10]. En effet, les modèles AR 2-D ne permettent de caractériser que les textures ayant un caractère aléatoire dans toutes les directions. Par contre, les informations concernant l'orientation sont contenues dans le champ évanescence. Tel est le cas par exemple pour les textures briques, bois de l'album de Brodatz [11].

Nous proposons dans cet article une extension au cas 3-D et nous donnons les résultats préliminaires obtenus pour la décomposition de Wold 3-D.

2. Décomposition de Wold 3-D.

Soit $Y = \{y_{(m,n,t)}; (m,n,t) \in Z^3\}$ un processus stochastique 3-D de moyenne nulle et H l'espace d'Hilbert associé donné par $H = \overline{sp}\{y_{(m,n,t)}; (m,n,t) \in Z^3\}$. Un tel processus est dit homogène ou stationnaire au sens large si toutes les variables sont de carré intégrable, $E[y^2(m,n,t)] < \infty$, et si la fonction d'autocorrélation définie par $r_y(j,k,l) = E[y(m+j, n+k, t+l)y(m,n,t)]$, est indépendante de m, n et t . Dans ce cas $r_y(\dots)$ admet la représentation spectrale suivante:

$$r_y(j,k,l) = \int_{K^3} \exp[2\pi(j\omega + kv + l\eta)] dF(w, v, \eta)$$

Où $K = [-1/2, 1/2]$ et $F(w, v, \eta)$ est la distribution spectrale du processus.

Dans la suite nous considérons un ordre total \leq sur Z^3 défini par

$$(j,k,l) < (m,n,t) \Leftrightarrow (j,k,l) \in \{(a,b,c) / a=m, b=n, c < t\} \cup \{(a,b,c) / a=m, b < n, c \in Z\} \cup \{(a,b,c) / a < m, b,c \in Z\}$$

On appelle le passé de $y(m,n,t)$ le sous espace $H_{(m,n,t)}$ de H engendré par les vecteurs qui précèdent $y(m,n,t)$:

$$H_{(m,n,t)} = \overline{sp}\{y_{(j,k,l)} / (j,k,l) \leq (m,n,t)\}.$$

Le prédicteur linéaire causal de $y(m,n,t)$, qui minimise la variance de l'erreur de prédiction, est la projection orthogonale $\hat{y}(m,n,t)$ de $y(m,n,t)$ sur le sous espace $H_{(m,n,t-1)}$. Soit $u(m,n,t) = \hat{y}(m,n,t) - y(m,n,t)$ l'erreur de prédiction au point (m,n,t) . Le processus $\{u(m,n,t)\}$ est dit processus d'innovation de Y . Pour définir les deux notions de déterminisme et de non déterminisme, on note, H_{cnd} l'espace engendré par les innovations $u(m,n,t)$ et H_{det} l'orthogonal de H_{cnd} dans l'espace H ,

$$H = H_{det} \oplus H_{cnd}.$$

On appelle $H_{-\infty}$ le passé lointain du processus donné par, $H_{-\infty} = \bigcap_{\alpha \in Z^3} H_{\alpha}$. Il est facile de vérifier que $H_{-\infty} \subseteq H_{det}$

Ainsi, en notant H_e son complémentaire orthogonal dans H_{det} , l'espace du processus admet la décomposition orthogonale suivante :

$$H = H_{cnd} \oplus H_e \oplus H_{-\infty} \quad (1)$$

Définitions: Un processus stationnaire est dit:

1. complètement non déterministe (CND) si $H = H_{cnd}$
2. déterministe si $H_{cnd} = \{0\}$.
3. évanescents si $H_{cnd} = \{0\}$ et $H_{-\infty} = \{0\}$.
4. de type $H_{-\infty}$ si $H = H_{-\infty}$

Pour un ordre total fixé sur Z^3 , tout processus stochastique 3-D homogène se décompose en une somme de trois composantes orthogonales [12].

$$y_{(m,n,t)} = u_{(m,n,t)} + h_{(m,n,t)} + e_{(m,n,t)} \quad (2)$$

où $\{u_{(m,n,t)}\}$ est CND, la composante $\{h_{(m,n,t)}\}$ est de type $H_{-\infty}$ et $\{e_{(m,n,t)}\}$ est évanescence.

Contrairement au cas 2-D, la composante évanescence $\{e_{(m,n,t)}\}$ se décompose en outre en une somme de deux composantes orthogonales que nous appellerons dans la suite, champ évanescence de type 1 et champ évanescence de type 2 $e_{(m,n,t)} = e_{(m,n,t)}^1 + e_{(m,n,t)}^2$ et l'expression (2) devient :

$$y_{(m,n,t)} = u_{(m,n,t)} + h_{(m,n,t)} + e_{(m,n,t)}^1 + e_{(m,n,t)}^2 \quad (3)$$

Cette extension au cas 3-D est fondée sur des développements mathématiques et certains résultats théoriques de la prédiction linéaire donnés dans [1],[12], [13].

3. Caractéristiques spectrales

La décomposition orthogonale (3) entraîne la décomposition de la distribution spectrale du processus Y en une somme de mesures spectrales mutuellement singulières que nous noterons respectivement F_u , F_h , F_e^1 et F_e^2

$$F_y(\omega, v, u) = F_u(\omega, v, \eta) + F_h(\omega, v, \eta) + F_e^1(\omega, v, \eta) + F_e^2(\omega, v, \eta)$$

où F_u est absolument continue tandis que les distributions spectrales F_h , F_e^1 et F_e^2 sont des mesures supportées par des ensembles de mesure nulle par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_3(\omega, v, \eta)$ sur R^3 . Les distributions spectrales des trois composantes déterministes sont des combinaison linéaires des mesures de la forme:

$$dF_h(\omega, v, \eta) = dF_3^s(\omega, v, \eta) \quad (4)$$

$$dF_e^1(\omega, v, \eta) = f(\omega, v) d\lambda_2(\omega, v) dF_1^s(\eta) \quad (5)$$

$$dF_e^2(\omega, v, \eta) = g(\omega) d\lambda_1(\omega) dF_2^s(v, \eta) \quad (6)$$

Où, F_k^s , pour $k=1,2,3$ est une mesure singulière k-D et $f(\omega, v)$, $g(\omega)$ sont respectivement des densités spectrales 2-D et 1-D.

4. Modélisation

Au niveau de la modélisation, l'orthogonalité des différentes composantes conduit à des modèles indépendants pour chacune des parties. La composante CND $u_{(m,n,t)}$ ayant une distribution spectrale $F_u(\dots)$ absolument continue est théoriquement représenté par un modèle MA infini.

Cependant une représentation par un modèle autorégressif (AR 3-D) peut être utilisée. Ce dernier modèle a été utilisé pour l'analyse-synthèse des images texturées [14]. Le problème de la sélection de l'ordre de cette classe de modèles est traité dans [15]. Un exemple de texture synthétisée par ce modèle est donné par la figure (FIG.1)

Pour des considérations pratiques, la modélisation de la partie déterministe nécessite des approximations du cas théorique à l'instar du cas 2-D [4]. Ainsi, la distribution singulière F_3^s est supposée portée par un ensemble dénombrable de points dans K^3 . Ceci nous permettra d'approximer la distribution F_h par une combinaison linéaire de fonctions de Dirac 3-D et la composante $h_{(m,n,t)}$ par un modèle harmonique 3-D donné par :

$$h(n, m, t) = \sum_{p=1}^P [C_p \cos(n w_p + m v_p + t u_p) + D_p \sin(n w_p + m v_p + t u_p)]$$

Où P le nombre de composantes, le triplet (w_p, v_p, u_p) est la fréquence 3-D du p^{ème} harmonique.

La figure (FIG.1) présente une texture 3-D synthétisée par un modèle de ce type à deux composantes. Dans ce cas, le spectre est supporté par quatre 'pics 3-D' isolés (FIG. 3) Ce modèle a été utilisé à titre d'exemple pour le filtrage d'images sismiques [16].

4.1 Champ évanescence 3-D de type 1:

La distributions spectrale $dF_e^1(\omega, v, \eta)$ est séparable (5); elle est le produit d'une densité 2-D et d'une mesure singulière 1-D notée F_1^s . En négligeant les ensembles de type singulier-continu, la distribution F_1^s est approximée par une combinaison linéaire de fonctions de Dirac 1-D. Par conséquent la distribution spectrale $dF_e^1(\omega, v, \eta)$ est approximée par :

$$f_e^1(\omega, v, \eta) = \sum_{i=1}^{I_1} f_i(\omega, v) \{ \delta_1(\eta - \eta_i) + \delta_1(\eta + \eta_i) \} \quad (7)$$

Où $f_i(\dots)$ est une densité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur R^2 et $\delta_1(\cdot)$ est la fonction de Dirac 1-D. D'après (7) cette composante peut donc être modélisée par une somme de sinusoïdes modulées par un processus AR 2-D comme suit :

$$e^1(n, m, t) = \sum_{i=1}^{I_1} [S_i(n, m) \cos(2\pi v_i t) + T_i(n, m) \sin(2\pi v_i t)] \quad (8)$$

où, $S_j(\dots)$, $T_j(\dots)$ sont des processus homogènes 2-D, non déterministes, mutuellement orthogonaux, de même densité spectrale et sont modélisés par un modèle AR 2-D. Pour tout $i=1, \dots, I_1$, v_i est la fréquence de la i^{ème} composante évanescence élémentaire de type 1. Une texture 3-D synthétisée par ce modèle contenant une composante est illustrée dans la figure (FIG.5). Le spectre de ce type de texture est supporté par des plans parallèles dans l'espace. (FIG.6)

4.2 Champ évanescent 3-D de type 2

Sous les mêmes hypothèses simplificatrices, la densité singulière $F_2^s(\omega, \nu)$ est supposée comme une combinaison linéaire de fonctions de Dirac 2-D. Ainsi, La distribution spectrale de la composante évanescence de type 2 est approximée par :

$$f_e^2(\omega, \nu, \eta) = \sum_{i=1}^{I_2} g_i(\omega) \{ \delta_2(\nu - \nu_i, \eta - \eta_i) + \delta_2(\nu + \nu_i, \eta + \eta_i) \} \quad (9)$$

A partir de (9) le modèle proposé pour cette composante est une somme des sinusoides 2-D dont les amplitudes sont modélisées par un modèle AR 1-D.

$$e^2(n, m, t) = \sum_{i=1}^{I_2} [S_i(n) \cos(2\pi(m\nu_i + \eta_i t) + T_i(n) \sin(2\pi(\nu_i m + \eta_i t))] \quad (10)$$

Où $\{S_i(n)\}$ et $\{T_i(n)\}$ sont deux processus non déterministes modélisés par un modèle AR 1-D qui vérifient les propriétés d'orthogonalité similaires à (8). Le couple (ν_i, η_i) est la $i^{\text{ème}}$ fréquence spatiale et I_2 est le nombre de composantes. Les figures FIG.7 et FIG.8 représentent les caractéristiques spatiales et la forme géométrique du spectre d'un champ évanescent de type 2 qui est supporté dans ce cas par des droites parallèles dans K^3 .

5. Conclusion

La décomposition de wold 3-D des champs stochastiques stationnaires au sens large permet de développer de nouveaux modèles paramétriques capables de synthétiser et d'analyser des textures 3-D totalement périodiques ou périodiques suivant des directions particulières. Ces modèles offriront donc la possibilité de représenter toutes les composantes d'une texture homogène qui dans le cas général est un mélange de champs déterministes et aléatoires.

Figures

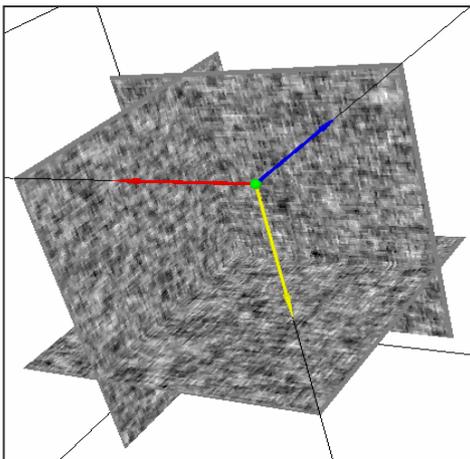


FIG 1 : Les $(120, 100, 90)^{\text{ème}}$ tranches d'un bloc généré par un AR 3-D à support quart d'espace d'ordre (2,2).

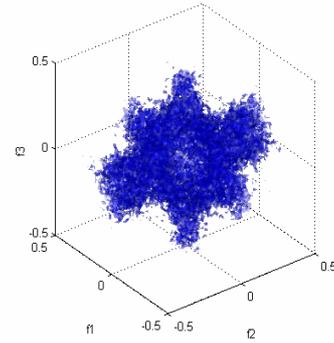


FIG 2 : Module de Fourier du bloc AR 3-D QS de la FIG 1.

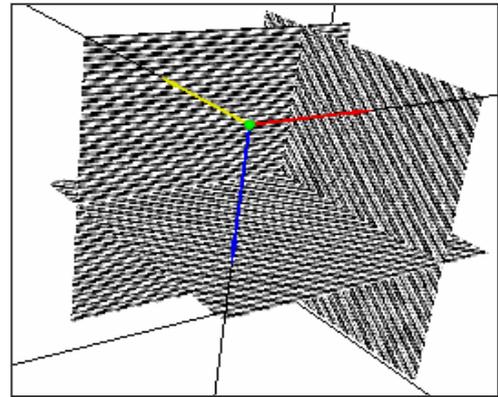


FIG 3 : FIG 1 : Les $(90, 90, 90)^{\text{ème}}$ tranches d'un bloc généré par le modèle harmonique 3-D à deux composantes

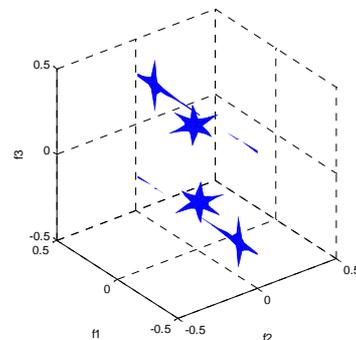


FIG 4 : Module de Fourier du bloc harmonique de la FIG 3.

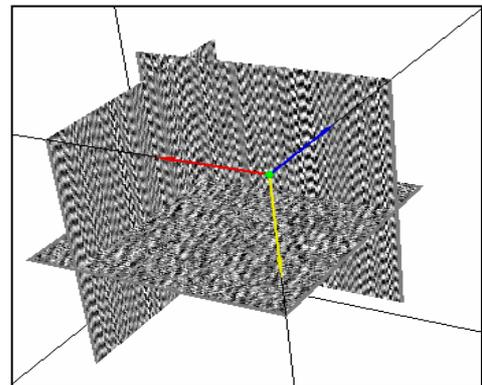


FIG 5 : les $(120, 100, 90)^{\text{ème}}$ tranches d'un bloc évanescent 3-D de type 1 à 1 composante.

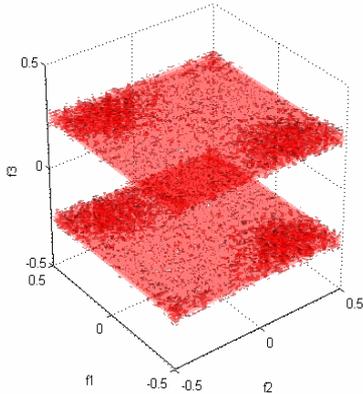


FIG 6 : Module de Fourier du texture 3-D de la FIG 5.

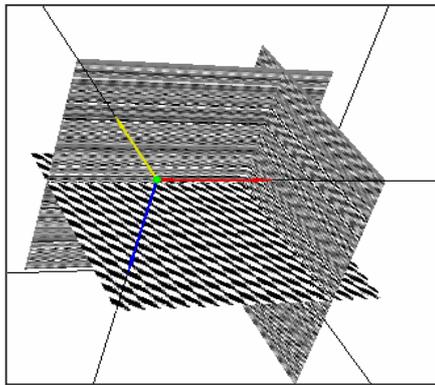


FIG 7 : les (80 , 90 , 100)^{ème} tranches d'un bloc évanescant 3-D de type 2 à 2 composantes

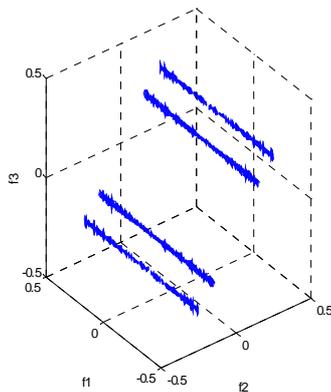


FIG 8 : Module de Fourier du texture 3-D de la FIG 7.

Remerciements :

Ce travail a été partiellement financé par le Conseil Régional d'Aquitaine et le LASIS- Laboratoire Commun Total/CNRS.

References

[1] H. Helson and D. Lowdenslager, "Prediction Theory and Fourier Series in Several Variables.II," *Acta. Math.* 106 , pp. 175-213, 1962.

[2] H. Korezlioglu and P. Loubaton, "Spectral Factorization of Wide Sense Stationary processes on \mathbb{Z}^2 ," *J. Multivariate Anal.* vol.19, pp. 24-27, 1986.

[3] J. M. Francos, A. Z Meiri and B. Porat, "A Wold-Like Decomposition of 2-D Discrete Homogeneous Random Fields," *Ann. Appl. Prob.*, vol. 5, pp. 248-260, 1995.

[4] J. M. Francos, A. Zvi Meiri, and B. Porat, "A Unified Texture Model Based on a 2-D Wold-Like Decomposition," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, no. 8, pp. 2665-2678, Aug. 1993.

[5] R. Stoica, J. Zerubia. and J. Francos, "The Two-dimensional Wold Decomposition for Segmentation and Indexing in Image libraries," *Proc. ICASSP*, Seattle, USA, Mai 1998.

[6] J. M. Francos, A. Narasimha and J.W. Woods, "Maximum-Likelihood Parameter of Discrete Homogeneous Random Fields with Mixed Spectral Distributions," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, no. 5, May 1996.

[7] C. Ramananjsoa, M. Najim, "2-D Wold Decomposition: New Parameter Estimation Approach to evanescent field parameters" *submitted to IEEE Trans. on Signal Processing*, April 2002.

[8] F. Liu, and R. W. Picard, "A Spectral 2-D Wold Decomposition Algorithm for Homogeneous Random Fields", *ICASSP 99*, vol. 4, pp. 3501-3504, March 1999.

[9] F. Liu and R. W. Picard, "Periodicity, Directionality, and Randomness: Wold Features for Image Modeling and Retrieval", *IEEE. Trans. on PAMI*, vol. 18, no. 7, pp. 722-733, July 1996.

[10] C. Ramananjsoa, "Modélisation Paramétrique des Champs Stochastiques: Application à l'analyse et la synthèse d'images texturées " *Thèse de Doctorat, ENSEIRB-Université Bordeaux1*, 16 octobre 2002.

[11] P. Brodatz. *Textures: A Photographic Album for Designers and Artists*. Dover, 1966.

[12] F. Turcu, Y. Stitou and M. Najim "Multidimensional Wold Decomposition" *soumis à J. Multivar. Anal.*, Janvier 2003.

[13] D. Gaspard and N. Suciu, "One the Wold Decomposition of Isometric Semigroups", *Aniv. Vol. of the approx. Théory and Funct. Anal. INMS 65*, Birkhauser, 1984

[14] M. Szummer and R. W. Picard, "Temporal Texture Modeling," *IEEE ICIP-96*, vol. 3, pp. 823-826, Lausanne Switzerland 1996.

[15] B. Aksasse, Y. Stitou, Y. Bethoumiu et M. Najim, "Sélection de l'Ordre du Modèle AR 3-D" *accepté au GRETSI 03*.

[16] B. Aksasse, M. El Ansari, Y. Berthoumiu and M. Najim, "High resolution 3-D spectral method estimation," *Proc. EUSIPCO 2002*, vol. II, 391-394, Toulouse, France.