

Seuils de décrochement du Maximum de Vraisemblance

E. Boyer¹, P. Forster² et P. Larzabal^{1,3}

¹SATIE, ENS Cachan, UMR CNRS 8029, 61 avenue du président Wilson, 94235 Cachan Cedex France

²GEA, IUT de Ville d'Avray, 1 chemin Desvallières, 92410 Ville d'Avray

³IUT de Cachan, C.R.I.I.P, Université Paris Sud, BP140, 9 avenue de la division Leclerc, 94234 Cachan Cedex, France.

eric.boyer@wanadoo.fr

philippe.forster@cva.u-paris10.fr

larzabal@satie.ens-cachan.fr

Résumé - Nous proposons dans ce papier une expression analytique approchée des seuils de décrochement du maximum de vraisemblance valable pour tout Rapport Signal sur Bruit (RSB). Nous envisageons successivement les cas déterministe (pour 1 snapshot) et stochastique (pour un nombre quelconque de snapshots). Les expressions analytiques obtenues sont confrontées avec succès aux simulations.

Abstract - We derive in this paper an analytic approximate expression of Maximum Likelihood SNR thresholds. These expressions are valid at all Signal to Noise Ratios. We successively investigate the deterministic case (for 1 snapshot) and the stochastic case (for any number of snapshot). Analytic expressions are successfully compared with simulations.

I. INTRODUCTION

De nombreux travaux traitent des performances du maximum de vraisemblance mais ils portent généralement sur le cas asymptotique en le nombre d'échantillons alors que la nature et la sévérité des phénomènes (par exemple la non stationnarité) nous contraignent à faire fonctionner ces algorithmes à faible nombre de snapshots M et/ou faible Rapport Signal sur Bruit (RSB). Nous avons ainsi montré dans [1] que le MVS n'est pas efficace pour un nombre de snapshots fini et un RSB qui tend vers l'infini. Dans des articles récents [2] [3], nous avons étudié les performances non asymptotiques du Maximum de Vraisemblance dans l'estimation de la direction d'arrivée d'un signal émis par une source et noyé dans un bruit additif blanc gaussien. Nous avons ainsi obtenu dans les cas déterministe et stochastique une expression analytique de l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) de l'estimateur valable à tout RSB ρ et nombre de snapshots qui rend bien compte du phénomène de décrochement relaté dans la littérature [4] et mis en évidence dans le cas de signaux stochastiques sur la figure 1.

La détermination théorique du seuil de décrochement correspondant présente un grand intérêt pratique car il fixe

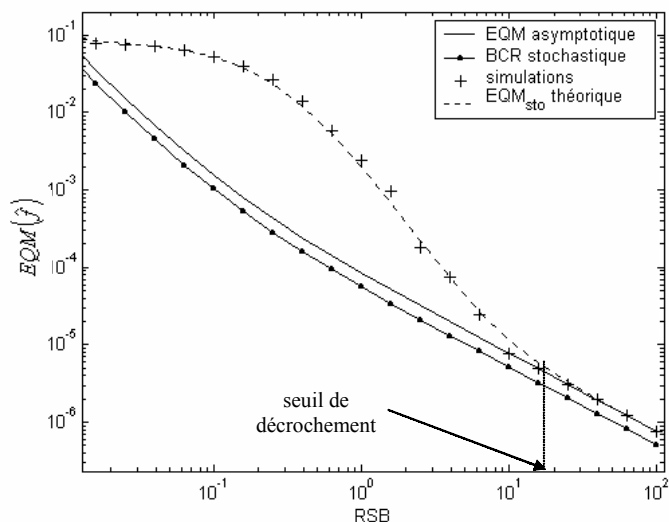


Fig. 1. Mise en évidence du phénomène de décrochement ($M = 3$, $N = 10$) et de la non efficacité asymptotique.

les limites de fonctionnement de l'estimateur étudié en deçà desquelles les performances se dégradent très rapidement. Le seuil de décrochement est par conséquent une caractéristique importante de l'estimateur, au même titre que son biais et sa variance.

Nous traitons dans ce papier les deux cas suivants :

- en l'absence de moyennage ($M = 1$) et dans le cas de signaux déterministes, nous proposons une expression analytique approchée du seuil de décrochement plus simple que celles proposées par Steinhardt et Bretherton [5] et par Quinn et Kootsookos [6].
- dans le cas stochastique pour un moyennage M quelconque de snapshots, nous proposons une expression analytique approchée du seuil de décrochement qui doit nécessairement dans le cas stochastique être défini par rapport à l'EQM asymptotique du MVS dont nous avons montré dans [1] qu'elle n'atteint pas la Borne de Cramér-Rao stochastique. La comparaison de l'expression analytique et des

relevés expérimentaux des seuils vient valider les résultats obtenus.

II. LE MODÈLE

Nous considérons une antenne linéaire uniforme de N capteurs espacés de $\lambda/2$ recevant une unique source en champ lointain, supposée à bande étroite. Le vecteur $\mathbf{x}(t)$ en sortie des capteurs est donné par l'équation :

$$\mathbf{x}(t) = s(t)\mathbf{a}(f_0) + \mathbf{b}(t), \quad 1 \leq t \leq M, \quad (1)$$

où $s(t)$ est le signal émis, $\mathbf{b}(t)$ est le bruit complexe additif, $\mathbf{a}(f_0)$ est le "steering vecteur" en champ lointain de fréquence spatiale f_0 :

$$\mathbf{a}(f_0) = \left(1 \quad e^{2j\pi f_0} \quad \dots \quad e^{2j\pi(N-1)f_0} \right)^T, \quad (2)$$

$$f_0 = \frac{\sin \theta_0}{2}, \quad (3)$$

où θ_0 est la direction d'arrivée de l'onde par rapport au travers de l'antenne et où $s(t)$ est le signal inconnu déterministe ou stochastique.

Le bruit est supposé gaussien, circulaire, temporellement et spatialement blanc, centré et de puissance σ^2 .

III. DÉTERMINATION DES SEUILS DE DÉCROCHEMENT

A. Cas déterministe (avec $M = 1$)

Dans ce cas, le signal $s(t)$ est déterministe et inconnu, de puissance $P = |s(t)|^2$.

L'estimation au sens du Maximum de Vraisemblance, pour le modèle (1) revient à maximiser la sortie $B(f)$ de la formation de voies :

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \arg \max \{B(f)\} \text{ avec} \\ B(f) &= |\mathbf{a}(f)^H \mathbf{x}|^2 = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-in\omega} \right|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Thao *et al.* [7] ont proposé une approche du problème permettant d'obtenir une expression simple du seuil de décrochement dans le cas de l'estimation de fréquence avec phase connue. À partir de ces travaux nous proposons une approche similaire dans le cas de l'estimation de fréquence avec phase inconnue.

La simplification proposée par Thao consiste à faire l'hypothèse que la densité de probabilité de $B(f)$ est à support borné $[l_\rho(f), h_\rho(f)]$, comme représenté figure 2. Nous savons que $\frac{2}{N\sigma^2}B(f)$ suit une loi du χ^2 décentrée à deux degrés de liberté, de paramètre de décentrement

$$\delta(f) = \frac{2NA^2 \sin^2(\pi N(f - f_0))}{\sigma^2 N^2 \sin^2(\pi(f - f_0))}. \quad (5)$$

En conséquence, les valeurs $B(f)$ ne sont pas strictement limitées à un intervalle fini et les fonctions $l_\rho(f)$ et $h_\rho(f)$ doivent être définies de façon pertinente. Nous les définissons comme :

$$l_\rho(f) = F_{\chi^2}^{-1}(\varepsilon, \delta(f)), \quad (6)$$

$$h_\rho(f) = F_{\chi^2}^{-1}(1 - \varepsilon, \delta(f)), \quad (7)$$

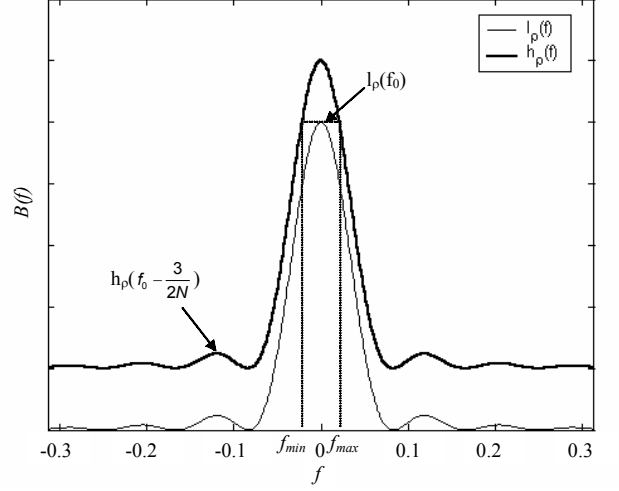


Fig. 2. Lieu des max $h_\rho(f)$ et des min $l_\rho(f)$ du support tronqué de la variable aléatoire $B(f)$.

où $F_{\chi^2}^{-1}(p, \delta)$ est l'inverse de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi du χ^2 décentrée à deux degrés de liberté, de paramètre de décentrement δ . Dans la suite, nous choisissons arbitrairement $\varepsilon = 10^{-3}$ (nous avons remarqué lors des simulations que notre analyse est peu sensible au choix de ε).

Sous ces conditions, tant que le maximum $l_\rho(f_0)$ de la fonction $l_\rho(f)$ reste plus grand que le premier lobe secondaire $h_\rho(f_0 \pm \frac{3}{2N})$ de la fonction $h_\rho(f)$, nous avons (cf. figure 2) $\hat{f} \in [f_{\min}, f_{\max}]$, qui appartient nécessairement à l'intervalle $\left[f_0 - \frac{1}{N}, f_0 + \frac{1}{N} \right]$. Nous faisons dans ce cas l'hypothèse que la variance de l'estimateur est égale à la BCR. Au contraire, si $h_\rho(f_0 \pm \frac{3}{2N}) > l_\rho(f_0)$, \hat{f} n'appartient plus forcément à l'intervalle $\left[f_0 - \frac{1}{N}, f_0 + \frac{1}{N} \right]$ et la fréquence est alors mal estimée. La variance de \hat{f} n'est alors plus égale à la BCR. Le décrochement se produit donc pour la valeur ρ_{det} du RSB vérifiant

$$h_{\rho_{\text{det}}}(f_0 \pm \frac{3}{2N}) = l_{\rho_{\text{det}}}(f_0), \quad (8)$$

équation que nous allons résoudre numériquement. Des équations (6) et (7), nous avons :

$$\begin{aligned} l_{\rho_{\text{det}}}(f_0) &= F_{\chi^2}^{-1}(10^{-3}, 2N\rho_{\text{det}}), \\ h_{\rho_{\text{det}}}(f_0 \pm \frac{3}{2N}) &= F_{\chi^2}^{-1}\left(1 - 10^{-3}, 2N\rho_{\text{det}} \underbrace{\frac{1}{N^2 \sin^2(3\pi/2N)}}_{\approx 0.044}\right). \end{aligned}$$

Nous avons reporté figure 3 les variations de $l_{\rho_{\text{det}}}(f_0)$ et $h_{\rho_{\text{det}}}(f_0 \pm \frac{3}{2N})$ en fonction de $N\rho_{\text{det}}$. Cette figure montre

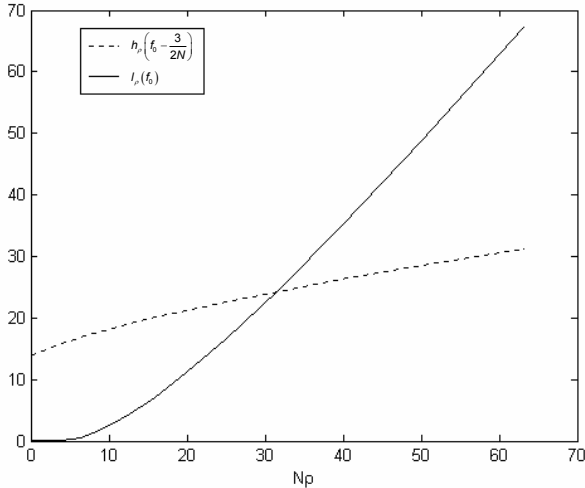


Fig. 3. Résolution numérique de l'équation (8)

que l'égalité $h_{\rho_{\text{det}}}(f_0 \pm \frac{3}{2N}) = l_{\rho_{\text{det}}}(f_0)$ se produit pour

$$\rho_{\text{det}} \approx \frac{30}{N}. \quad (9)$$

Cette expression est à comparer aux expressions (10) et (11) obtenues respectivement par Steinhardt et Bretherton [5] et Quinn et Kootsookos [6] et reportées ci-dessous :

$$\rho_{\text{det}} \approx \frac{2}{N} \left(\ln \left(\frac{\pi^2 N^3}{2} \right) + \ln \left(\ln \left(\frac{\pi^2 N^3}{2} \right) \right) \right), \quad (10)$$

$$\rho_{\text{det}} \approx \frac{2}{N} \left(\ln \left(\frac{\pi^2 (N-1)^3}{2} \right) + \ln(\ln(N-1)) - \ln(9) \right). \quad (11)$$

Sur la figure 4 nous avons reporté les variations ρ_{det} données par les trois expressions (9), (10) et (11). Pour comparaison, nous avons aussi reporté les relevés expérimentaux des seuils tirés de [8] (et aussi utilisés dans [9]). Nous pouvons noter que l'expression simple (9) proposée colle bien aux points expérimentaux à 1 dB près.

B. Cas stochastique (avec $M \geq 5$)

Dans le cas stochastique, $s(t)$ est un signal aléatoire complexe, gaussien, circulaire, temporellement blanc de puissance inconnue $P = E(|s(t)|^2)$.

L'estimation de f_0 au sens du MV, $s(t)$ et σ^2 étant inconnus, revient, pour le modèle donné équation (1) à maximiser la formation de voies :

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \arg \max \{B(f)\} \text{ avec} \\ B(f) &= \sum_{t=1}^M |\mathbf{a}(f)^H \mathbf{x}|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

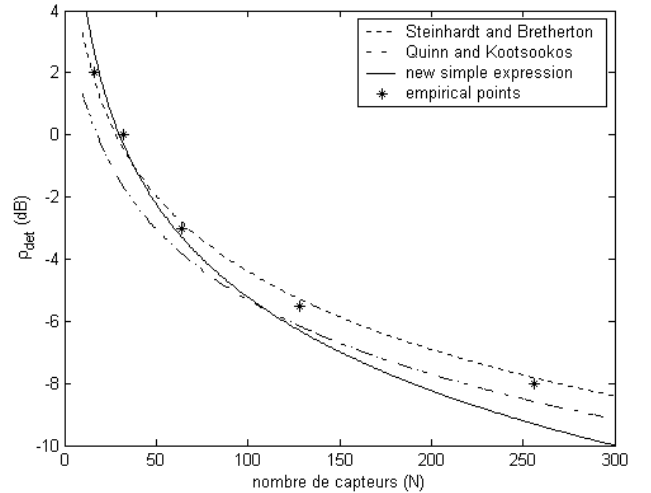


Fig. 4. Comparaison des trois expressions (9), (10) et (11) aux points expérimentaux.

De même, en supposant que pour f donnée la densité de probabilité de $B(f)$ est à support borné $[l_\rho(f), h_\rho(f)]$, le décrochement se produit pour la valeur ρ_{sto} du RSB vérifiant

$$h_{\rho_{\text{sto}}}(f_0 \pm \frac{3}{2N}) = l_{\rho_{\text{sto}}}(f_0). \quad (13)$$

En notant $\gamma(f)^2$ la puissance du signal $B(f)$ pour la fréquence f , nous savons que $\frac{2}{\gamma(f)^2} B(f)$ suit une loi du χ^2 centrée à $2M$ degrés de liberté, et les fonctions $l_\rho(f)$ et $h_\rho(f)$ sont respectivement définies comme

$$\Pr(\chi_{2M}^2 < \frac{2}{\gamma(f)^2} l_\rho(f)) = \varepsilon, \quad (14)$$

$$\Pr(\chi_{2M}^2 > \frac{2}{\gamma(f)^2} h_\rho(f)) = \varepsilon. \quad (15)$$

Rappelons l'approximation de Wilson-Hilferty [10] du χ^2 centré à $2M$ degrés de liberté par la loi normale U valable même pour de faibles valeurs de M :

$$\chi_{2M}^2 = 2M \left(U \sqrt{\frac{1}{9M}} + 1 - \frac{1}{9M} \right)^3.$$

En notant F_U^{-1} l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale, les équations (14) et (15) s'écrivent encore

$$l_\rho(f) = \frac{\gamma(f)^2}{2} 2M \left(-F_U^{-1}(\varepsilon) \sqrt{\frac{1}{9M}} + 1 - \frac{1}{9M} \right)^3 \quad (16)$$

$$h_\rho(f) = \frac{\gamma(f)^2}{2} 2M \left(+F_U^{-1}(\varepsilon) \sqrt{\frac{1}{9M}} + 1 - \frac{1}{9M} \right)^3 \quad (17)$$

En notant que

$$\gamma(f_0)^2 = P + \frac{\sigma^2}{N},$$

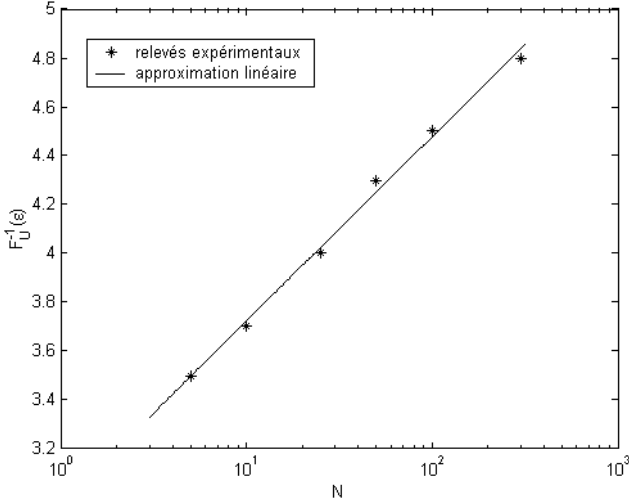


Fig. 5. Approximation linéaire de $F_U^{-1}(\epsilon)$ en fonction de $\ln N$.

et

$$\gamma(f_0 \pm \frac{3}{2N})^2 = \frac{\sigma^2}{N},$$

l'égalité (13) s'écrit,

$$\begin{aligned} & \left(P + \frac{\sigma^2}{N} \right) \left(-F_U^{-1}(\epsilon) \sqrt{\frac{1}{9M}} + 1 - \frac{1}{9M} \right)^3 \\ &= \frac{\sigma^2}{N} \left(+F_U^{-1}(\epsilon) \sqrt{\frac{1}{9M}} + 1 - \frac{1}{9M} \right)^3, \end{aligned}$$

équation que l'on peut réécrire, avec $\rho_{sto} = \frac{P}{\sigma^2}$,

$$\rho_{sto} = \frac{1}{N} \left[\left(\frac{\frac{F_U^{-1}(\epsilon)}{\sqrt{9M}} + 1 - \frac{1}{9M}}{-\frac{F_U^{-1}(\epsilon)}{\sqrt{9M}} + 1 - \frac{1}{9M}} \right)^3 - 1 \right]. \quad (18)$$

Les simulations que nous avons menées nous ont montré que le choix de ϵ dépend de N . La figure 5 donne les valeurs de $F_U^{-1}(\epsilon)$ (pour différents N) pour lesquelles l'équation (18) rend bien compte du seuil de décrochement relevé directement sur les courbes $EQM(\hat{f})$. L'allure des variations de $F_U^{-1}(\epsilon)$ nous a suggéré une approximation linéaire en fonction de $\ln(N)$, comme représenté figure 5. Le résultat de l'approximation donne

$$F_U^{-1}(\epsilon) \simeq 3 + 0.35 \ln(N),$$

et l'équation (18) s'écrit finalement

$$\rho_{sto} = \frac{1}{N} \left[\left(\frac{\frac{3+0.35 \ln(N)}{\sqrt{9M}} + 1 - \frac{1}{9M}}{\frac{-(3+0.35 \ln(N))}{\sqrt{9M}} + 1 - \frac{1}{9M}} \right)^3 - 1 \right]. \quad (19)$$

Nous présentons figure 6 la comparaison des seuils de décrochement tirés de la relation (19) et des relevés expérimentaux pour diverses valeurs de N et M variable.

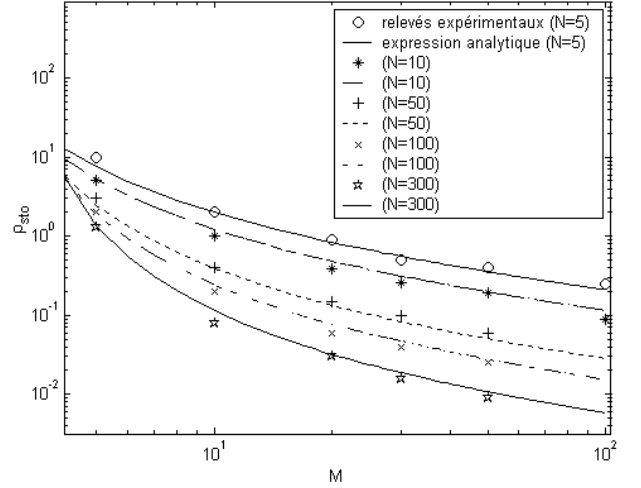


Fig. 6. Comparaison de la relation (19) aux relevés expérimentaux des seuils de décrochement pour diverses valeurs de N et M .

Nous pouvons noter la bonne adéquation entre l'expression théorique du seuil et les relevés expérimentaux.

IV. CONCLUSION

Nous avons proposé dans ce papier une expression analytique simple du seuil de décrochement du maximum de vraisemblance déterministe dans le cas d'un snapshot. Le cas de plusieurs snapshots est à l'étude et fera l'objet d'une publication ultérieure.

Dans le cas stochastique, nous avons obtenu une expression analytique approchée valable pour un nombre quelconque de snapshots. Les expressions proposées ont été confrontées avec succès aux simulations.

REFERENCES

- [1] E. Boyer, *Estimation paramétrique des moments spectraux d'échos Doppler : application aux radars strato-troposphériques*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2002.
- [2] E. Boyer, P. Forster, and P. Larzabal, "Non asymptotic performances analysis of beamforming with stochastic signals," Oct. 2002. to be published in IEEE Signal Processing Let.
- [3] E. Boyer, P. Forster, and P. Larzabal, "Non asymptotic statistical performances of beamforming for deterministic signals," June 2002. to be published in IEEE Signal Processing Let.
- [4] H. L. V. Trees, *Detection, estimation and modulation theory*, vol. I. New York: Wiley, 1968.
- [5] A. O. Steinhardt and C. Bretherton, "Thresholds in frequency estimation," in *Proceeding of ICASSP 85*, pp. 1273–1276.
- [6] B. G. Quinn and P. J. Kootsookos, "Threshold behavior of the maximum likelihood estimator of frequency," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42, pp. 3291–3294, Nov. 1994.
- [7] S. Thao, M. Bellanger, A. Marguinaud, and T. de Couasnon, "Estimation de fréquence porteuse en transmission par satellite," in *Actes du Grets 99*, (Vannes), pp. 785–788.
- [8] D. C. Rife and R. R. Boorstyn, "Single tone parameter estimation from discrete-time observations," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 20, no. 5, pp. 591–598, 1974.
- [9] B. James, B. D. O. Anderson, and R. C. Williamson, "Characterization of threshold for single tone maximum likelihood frequency estimation," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 43, pp. 817–821, Apr. 1995.
- [10] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs and mathematical tables*. NY: Dover Pub/. inc., 1972.