

# Décomposition d'images: Application aux images RSO.

Jean-François AUJOL<sup>1,2</sup>, Gilles AUBERT<sup>1</sup>, Laure BLANC-FÉRAUD<sup>2</sup>, Antonin CHAMBOLLE<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire J.A.Dieudonné, UMR CNRS 6621  
Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2, France, France

<sup>2</sup>ARIANA, projet commun CNRS/INRIA/UNSA  
INRIA Sophia Antipolis, 2004, route des Lucioles, BP93, 06902, Sophia Antipolis Cedex, France

<sup>3</sup>CEREMADE, CNRS UMR 7534  
Université Paris IX - Dauphine, Place du Maréchal De Lattre De Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France  
aujol@math.unice.fr, gaubert@math.unice.fr  
Laure.Blanc\_Feraud@sophia.inria.fr, antonin.chambolle@ceremade.dauphine.fr

**Résumé** – Nous construisons un algorithme pour séparer une image  $f$  en une somme  $u + v$  d'une composante à variation bornée et d'une composante contenant les textures et le bruit. Ce type de décomposition a été récemment proposée par Y. Meyer [1]. On obtient cette décomposition en minimisant une fonctionnelle convexe qui dépend de deux variables  $u$  et  $v$ , alternativement dans chaque direction. Chaque minimisation est basée sur un algorithme de projection pour minimiser la variation totale. Nous effectuons l'étude mathématique de notre méthode, et nous présentons des résultats numériques. En particulier, nous montrons comment la composante  $u$  peut être utilisée en restauration d'image RSO.

**Abstract** – We construct an algorithm to split an image into a sum  $u + v$  of a bounded variation component and a component containing the textures and the noise. This decomposition is inspired from a recent work of Y. Meyer. We find this decomposition by minimizing a convex functional which depends on the two variables  $u$  and  $v$ , alternatively in each variable. Each minimization is based on a projection algorithm to minimize the total variation. We carry out the mathematical study of our method. We present some numerical results. In particular, we show how the  $u$  component can be used in nontextured SAR image restoration.

## 1 Introduction

### 1.1 Préliminaires

La restauration d'image est l'un des objectifs les plus importants du traitement d'image [2]. Une approche classique consiste à considérer qu'une image  $f$  peut être décomposée en deux composantes  $u + v$ . La première composante  $u$  est bien structurée, et possède une description géométrique simple. La deuxième composante  $v$  contient à la fois les textures et le bruit.

### 1.2 Modèle de Rudin-Osher-Fatemi :

On rappelle que  $BV(\Omega)$  est le sous-espace des fonctions  $u$  dans  $L^1(\Omega)$  telle que la quantité suivante soit finie :

$$J(u) = \sup \left\{ \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \xi(x) dx / \xi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^2), \|\xi\|_{\infty} \leq 1 \right\} \quad (1.1)$$

Dans [3], les auteurs décomposent une image  $f$  en une composante  $u$  appartenant à  $BV(\Omega)$  et une composante  $v$  dans  $L^2(\Omega)$ . Dans le modèle ROF (Rudin-Osher-Fatemi), on cherche à minimiser (en utilisant l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle) :

$$\inf_{(u,v) \in BV \times L^2 / f=u+v} \left( J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|v\|_2^2 \right) \quad (1.2)$$

L'étude mathématique de ce problème a été faite dans [4].

### 1.3 Modèle de Chambolle :

A. Chambolle a récemment proposé un algorithme de projection pour minimiser la variation totale [5].

$$\inf_{u \in BV} \left( J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u\|_2^2 \right) \quad (1.3)$$

**Proposition 1.1.** La solution de (1.3) est donnée par :

$$u = f - P_{\lambda K}(f) \quad (1.4)$$

où  $P$  est le projecteur orthogonal sur  $\lambda K$  (dilaté de  $K$  par  $\lambda$ ), et où  $K$  est la fermeture dans  $L^2$  de l'ensemble :

$$\{\operatorname{div}(g)/g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \|g\|_{\infty} \leq 1\} \quad (1.5)$$

De plus, [5] donne un algorithme itératif simple pour calculer la projection  $P_{\lambda K}(f)$ .

### 1.4 Modèle de Meyer

Dans [1], Y. Meyer montre les limites du modèle (1.2). Pour restaurer une image  $f$ , il propose plutôt le modèle suivant :

$$\inf_{(u,v) \in BV \times G / f=u+v} (J(u) + \lambda \|v\|_G) \quad (1.6)$$

L'espace  $G$  contient les signaux à fortes oscillations, et donc en particulier les textures et les bruits.

**Définition 1.1.**  $G$  est l'espace de Banach constitué de toutes les fonctions  $v$  que l'on peut écrire  $v = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 = \operatorname{div}(g)$ , avec  $g_1$  et  $g_2$  dans  $L^\infty$ . La norme dans  $G$  est donnée par :

$$\|v\|_G = \inf \{ \|g\|_\infty / v = \operatorname{div}(g), g = (g_1, g_2) \\ g_1 \text{ et } g_2 \in L^\infty, |g(x)| = \sqrt{|g_1|^2 + |g_2|^2}(x) \}$$

L'intérêt de l'espace  $G$  provient du fait qu'une image fortement oscillante et à moyenne nulle possède une petite norme dans  $G$ .

## 1.5 Modèle de Vese-Osher :

L. Vese et S. Osher [6] ont proposé une première approche pour réaliser le programme d'Y. Meyer. Ils introduisent la fonctionnelle suivante :

$$\inf_{(u,v) \in BV(\Omega) \times G(\Omega)} (J(u) + \lambda \|f - u - v\|_2^2 + \mu \|v\|_{G(\Omega)}) \quad (1.7)$$

Pour calculer la solution, le terme  $\|v\|_{G(\Omega)}$  est remplacé par  $\|\sqrt{g_1^2 + g_2^2}\|_p$  (avec  $v = \operatorname{div}(g_1, g_2)$ ), puis on dérive formellement les équations d'Euler-Lagrange associées à (1.7). En pratique, pour des raisons numériques, les auteurs utilisent la valeur  $p = 1$ .

Une autre approche a récemment été proposée par S. Osher, A. Solé et L. Vese [7] dans le cas  $\lambda = +\infty$  et  $p = 2$ .

## 2 Notre approche

### 2.1 Fonctionnelle

Notre image est un vecteur à deux dimensions de taille  $N \times N$ . On note  $X$  l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^{N \times N}$ . Nous menons toute notre étude dans le cadre discret. Pour résoudre le problème (1.6), nous proposons de considérer la fonctionnelle :

$$F(u, v) = \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_2^2 + J(u) + J^*\left(\frac{v}{\mu}\right) \quad (2.8)$$

où  $J^*(v) = \sup((u, v)_X - J(u))$  ( $J^*$  est la transformée de Legendre-Fenchel de  $J$  [8]). On peut montrer que  $J^*\left(\frac{v}{\mu}\right)$  est la fonction caractéristique de l'ensemble

$$G_\mu = \{v \in G / \|v\|_G \leq \mu\}$$

(i.e :  $J^*\left(\frac{v}{\mu}\right) = 0$  si  $v \in G_\mu$ ,  $+\infty$  sinon).

On cherche :  $\inf_{(u,v) \in X \times X} F(u, v)$ . Il est immédiat de voir que l'infimum est atteint sur  $BV(\Omega) \times G(\Omega)$ .

### 2.2 Algorithme

Nous résolvons les deux problèmes suivants :

– A  $v$  fixé, on cherche

$$\inf_{u \in X} \left( J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_2^2 \right) \quad (2.9)$$

– A  $u$  fixé

$$\inf_{v \in G_\mu} \|f - u - v\|_2^2 \quad (2.10)$$

| Image initiale ( $f$ )  | Image reconstruite ( $u + v$ )   |
|---|--|
|   |   |
| $u$ (modèle AABFC)<br>( $\lambda = 1$ et $\mu = 50$ )                               | $v + 150.0$ (AABFC)  |
|   |   |
| $u$ (modèle ROF)<br>( $\lambda = 40$ )  | $v + 150.0$ (modèle ROF)   |
|  |  |

FIG. 1 – Exemple de décomposition pour l'image Barbara

La solution de (2.9) est donnée par :  $\hat{u} = f - v - P_{G_\lambda}(f - v)$ , où  $P_{G_\lambda}$  est le projecteur orthogonal sur  $G_\lambda$ . La solution de (2.10) est donnée par  $\hat{v} = P_{G_\mu}(f - u)$ . Pour calculer les projections, nous utilisons l'algorithme développé dans [5].

Nous obtenons ainsi l'algorithme suivant :

1. Initialisation :  $u_0 = v_0 = 0$ .
2. Itérations :  $v_{n+1} = P_{G_\mu}(f - u_n)$   
et  $u_{n+1} = f - v_{n+1} - P_{G_\lambda}(f - v_{n+1})$ .
3. Test d'arrêt : on arrête lorsque :

$$\max(|u_{n+1} - u_n|, |v_{n+1} - v_n|) \leq \epsilon$$

### 2.3 Exemples de décomposition

La figure 1 donne un exemple de décomposition obtenue avec notre algorithme. Nous donnons aussi le résultat obtenu avec le modèle (1.2) (ROF). Nous avons choisi les paramètres de sorte que les composantes oscillantes  $v$  obtenues avec notre méthode ( $v_{AABFC}$ ) et avec le modèle ROF ( $v_{ROF}$ ) aient la même norme  $L^2$ . Il apparaît clairement que  $v_{AABFC}$  contient plus l'information texture que  $v_{ROF}$  (on remarquera notamment le pied de la table qui n'est pas un élément fortement

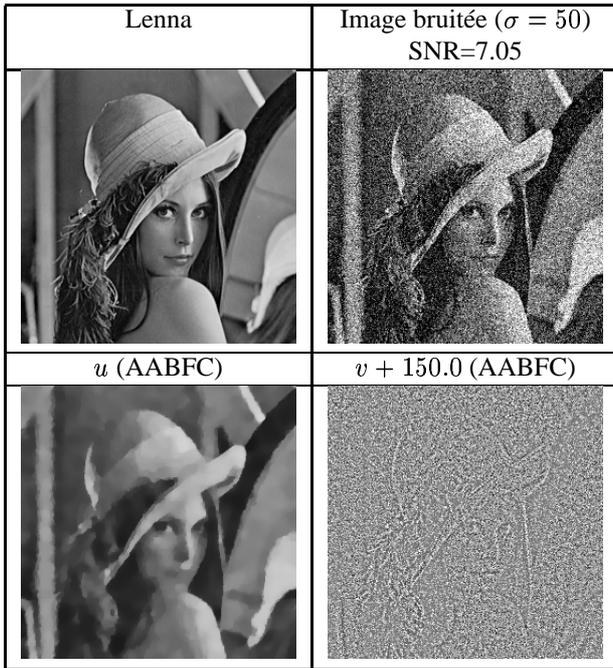


FIG. 2 – Exemple de débruitage ( $\lambda = 0.1$ ,  $\mu = 70$ )

oscillant et qui est bien visible dans  $v_{ROF}$  contrairement à  $v_{AABFC}$ .

La figure 2 donne un exemple de débruitage. On a ajouté à l'image Lenna un bruit blanc gaussien.

### 3 Résultats mathématiques

Les preuves de points suivants sont détaillées dans [9].

#### 3.1 Convergence de l'algorithme

L'algorithme proposé en 2.2 en permet effectivement de trouver le minimum de la fonctionnelle (2.8).

**Lemme 3.1.** *Il existe un unique couple  $(\hat{u}, \hat{v}) \in X \times G_\mu$  minimisant  $F$  sur  $X \times X$ .*

**Proposition 3.2.** *La suite  $F(u_n, v_n)$  construite dans la Section 2 converge vers le minimum de  $F$  sur  $X \times X$ .*

#### 3.2 Lien avec le problème de Meyer

Donnons ici la version discrète du problème de Meyer :

$$\inf_{(u,v) \in X \times G / f=u+v} J(u) + \alpha \|v\|_G \quad (3.11)$$

Lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ , le problème limite de (2.8) s'écrit :

$$\inf_{(u,v) \in X \times X / f=u+v} J(u) + J^* \left( \frac{v}{\mu} \right) \quad (3.12)$$

**Proposition 3.3.** *Fixons  $\alpha > 0$  dans le problème (3.11). Soit  $(\hat{u}, \hat{v})$  une solution du problème (3.11). On fixe  $\mu = \|\hat{v}\|_G$  dans (3.12). Alors :*

- $(\hat{u}, \hat{v})$  est aussi une solution du problème (3.12).
- Réciproquement, toute solution  $(\bar{u}, \bar{v})$  de (3.12) (avec  $\mu = \|\hat{v}\|_G$ ) est aussi solution de (3.11).

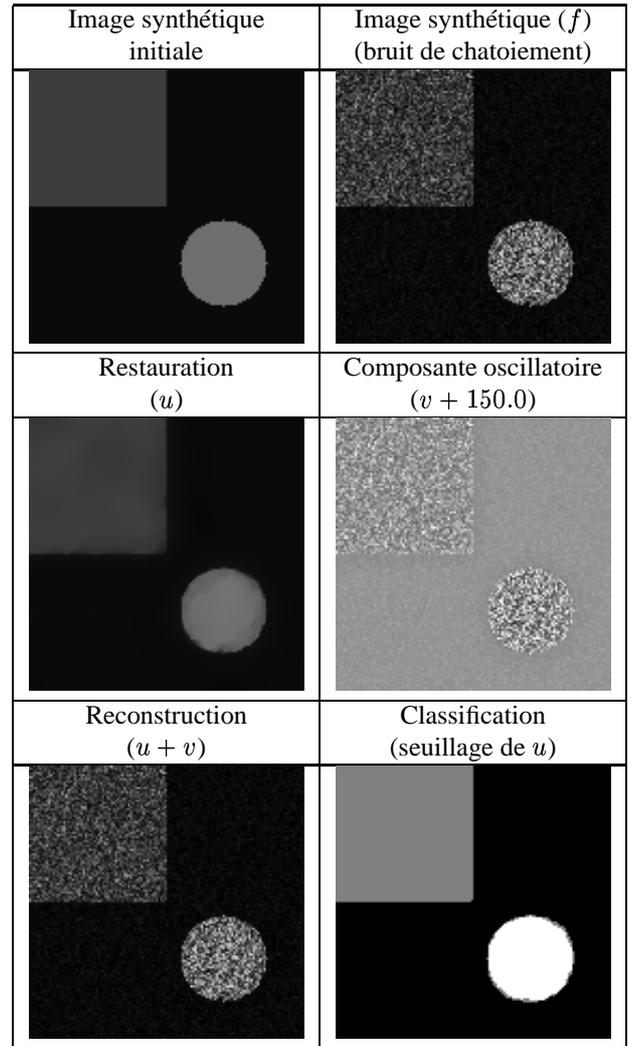


FIG. 3 – Image synthétique simple ( $\lambda = 0.01$  et  $\mu = 80$ )

#### 3.3 Role du paramètre $\lambda$ :

On peut aussi montrer que lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  dans (2.8), la solution de (2.8) est liée à celles de (3.12) (cf [9]).

**Proposition 3.4.** *On suppose que le problème (3.12) possède une unique solution  $(\hat{u}, \hat{v})$ . On fixe  $\mu = \|\hat{v}\|_{G^a}$  dans les problèmes (2.8) et (3.12). On note  $(u_\lambda, v_\lambda)$  la solution du problème (2.8). Alors  $(u_\lambda, v_\lambda)$  converge vers  $(u_0, v_0) \in X \times X$  lorsque  $\lambda$  tend vers 0. De plus,  $(u_0, v_0) = (\hat{u}, \hat{v})$  est la solution du problème (3.12).*

### 4 Application aux images RSO

Les images RSO (Radar à Synthèse d'Ouverture) sont fortement bruitées par un bruit de chatoisement [10]. Nous montrons les résultats obtenus avec notre algorithme pour restaurer de telles images dans les figures 3 et 4. Les temps de calcul sont très courts : avec un processeur à 800 MHz et 128 kilo de RAM, il faut moins d'une minute pour traiter l'image de Bourges (figure 4) qui est de taille 219\*219.

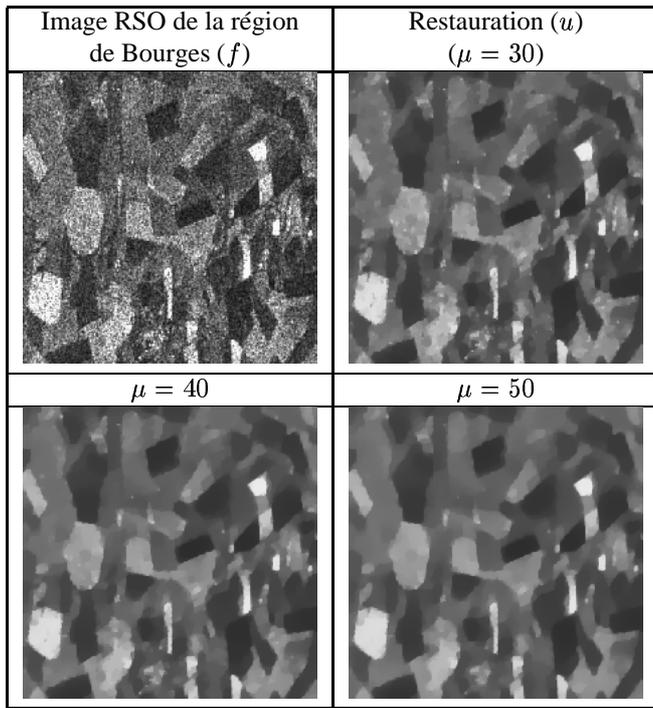


FIG. 4 – Restauration d’une image RSO ( $\lambda = 0.1$ )

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous présentons un nouvel algorithme pour décomposer une image  $f$  en une composante  $u$  appartenant à  $BV$  et une composante  $v$  contenant le bruit et les textures de l’image initiale. Notre algorithme permet de réaliser le programme d’Y. Meyer [1] lorsque le paramètre  $\mu$  est correctement réglé. Nous présentons une étude mathématique de notre modèle. Nous montrons aussi comment la composante  $u$  peut être utilisée en restauration d’image RSO. Tous les détails de ce travail, ainsi que des comparaisons avec les modèles de Rudin-Osher-Fatemi et de Vese-Osher sont présentés dans [9].

**Remerciements :** Les auteurs remercient le CNES (Centre National d’Etudes Spatiales) et le CESBIO (Centre d’Etudes Spatiales de la Biosphère) pour leur avoir fourni des images RSO (extraites du D-ROM *Filtrage d’images SAR* (1999)). Une partie de ce travail a été financée par le GdR-PrC ISIS.

## Références

- [1] Yves Meyer : Oscillating patterns in image processing and in some nonlinear evolution equations. The Fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures, (March 2001)
- [2] G. Aubert , P. Kornprobst : Mathematical Problems in Image Processing. Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences, 147, (2002)
- [3] L. Rudin , S. Osher , E. Fatemi : Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60, 259–268, (1992)

- [4] A. Chambolle , P.L. Lions : Image recovery via total variation minimization and related problems. *Numerische Mathematik*, 76, (3), 167–188, (1997)
- [5] A. Chambolle : An algorithm for total variation minimization and applications. To appear in *JMIV* 2003.
- [6] Luminita A. Vese , Stanley J. Osher : Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing. *UCLA C.A.M. Report 02-19* (May 2002)
- [7] S.J. Osher , A. Sole , L.A. Vese. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the  $H^{-1}$  norm. *UCLA C.A.M. Report 02-57* (October 2002)
- [8] I. Ekeland , R. Temam : *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, second edition, 224, (198)
- [9] J.F. Aujol , G. Aubert , L. Blanc-Féraud, A. Chambolle : Decomposing an image : Application to textured images and SAR images. *INRIA Research Report 4704* (January 2003). Submitted to *JMIV*.
- [10] G. Franceschetti , R. Lanari : *Synthetic aperture radar processing* CRC press, *Electronic engineering systems series*, (1999)