

# Estimation des signaux chirp multi-composantes affectés par un bruit impulsif $\alpha$ -stable

Mohamed SAHMOUDI<sup>1</sup>, Karim ABED-MERAÏM<sup>2</sup>, Messaoud BENIDIR<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Signaux et Systèmes, Supélec-CNRS-UPS  
Plateau du Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette, France

<sup>2</sup>Département TSI Signal-Image, Télécom Paris  
46 rue Barrault, 75634, Paris Cedex 13, France  
sahmoudi@lss.supelec.fr, abed@tsi.enst.fr  
benidir@lss.supelec.fr

**Résumé** – Nous traitons dans cet article le problème de l'estimation des paramètres de phase des signaux chirp réels affectés par un bruit additif de nature impulsive modélisé par une distribution  $\alpha$ -stable. Comme dans beaucoup de techniques d'estimation de signaux à phase polynomiale, nous commençons par ramener le problème à celui de l'estimation de signaux harmoniques noyés dans un bruit impulsif grâce à une transformée polynomiale du signal. Une méthode haute résolution (MUSIC) est alors appliquée au signal ainsi transformé pour l'estimation des paramètres. Trois cas de figures sont considérés et comparés dans ce travail: (i) Celui de l'application directe de l'algorithme MUSIC au signal harmonique tronqué en amplitude; (ii) celui de l'application de l'algorithme MUSIC à l'estimée robuste de la fonction de covariance du signal harmonique et (iii) celui de l'application de l'algorithme MUSIC à la fonction de covariation généralisée du signal.

**Abstract** – In this paper we address the problem of parameter estimation of a chirp signal in impulsive noise environments. The first step of our estimation methods consists of transforming the problem to a problem of frequency estimation in  $\alpha$ -stable impulsive noise using a polynomial transformation. A high resolution method (MUSIC) is applied to the transformed signal for sinusoidal frequency estimation. Three approaches are considered and compared in this work: (i) In the first one, we apply MUSIC to the truncated harmonic signal, (ii) in the second one, we apply MUSIC to the robust covariance estimate of the harmonic signal and (iii) in the third one, we apply MUSIC to the generalized covariation function of the signal.

## I Introduction

Diverses applications technologiques telles que le radar, le sonar ou certains systèmes de communication hertzienne font intervenir des signaux à modulation de fréquence (FM). Vu que la fréquence instantanée des signaux FM non linéaire est difficile à déterminer par les méthodes classiques, il est parfois préférable de modéliser la phase du signal par un polynôme grâce au théorème de Weierstrass qui indique que toute fonction continue à support compact peut être approximée par un polynôme. Le degré de celui-ci dépend des variations temporelles de la phase. Si celles-ci sont lentes, un degré faible suffit pour la représenter. En revanche, lorsque les variations de la phase sont rapides alors un degré élevé est nécessaire. Par exemple, dans les systèmes radar à compression d'impulsions, le signal utilisé est un signal FM à phase quadratique, appelé signal chirp. Ils appartiennent à la catégorie des signaux non stationnaires dont la fréquence varie au cours du temps. L'analyse de ce type de signaux affectés par un bruit additif gaussien est largement traité dans la littérature [6]. Toutefois, très peu de contributions existent dans le cas d'un bruit impulsif  $\alpha$ -stable, caractérisé par la non-existence des moments statistiques d'ordre deux ou d'ordre supérieur [3].

Nous nous proposons dans cet article d'étudier le cas où la densité du bruit a des queues plus importantes que celle de la gaussienne représentant ainsi les cas où les données sont contaminées par des valeurs totalement aberrantes, dues par ex-

emple à des pannes de capteurs. Nous considérons le modèle suivant:

$$x_n = \sum_{i=1}^I a_i \cos\{2\pi(f_i n + \delta_i n^2) + \theta_i\} + z_n \quad (1)$$

où  $n = 0, \dots, N-1$ .  $\phi_i(n) = 2\pi(f_i n + \delta_i n^2) + \theta_i$  désigne la phase du signal chirp réel dont les paramètres  $f_i, i = 1, \dots, I$  et  $\delta_i, i = 1, \dots, I$  sont des constantes réelles inconnues à estimer. Les  $a_i$  sont les amplitudes réelles déterministes des composantes du signal. Les  $\{\theta_i, i = 1, \dots, I\}$  sont des réalisations de variables aléatoires de distribution uniforme sur  $[0, 2\pi)$  représentant les phases initiales des composantes chirp.  $I$  est le nombre des composantes du signal et  $N$  est la taille de l'échantillon.  $z_n$  est un bruit additif de nature impulsive de distribution  $\alpha$ -stable symétrique  $S\alpha S$ . Les distributions  $S\alpha S$  sont définies par leurs fonctions caractéristiques données par :

$$\psi(t) = \exp\{jat - \gamma |t|^\alpha\} \quad (2)$$

où  $\alpha$  est la caractéristique exponentielle ( $0 < \alpha \leq 2$ ),  $a$  est le paramètre de location ( $-\infty < a < +\infty$ ) définissant le centre de la distribution et  $\gamma (> 0)$  mesure la dispersion de la distribution autour du centre  $a$  (joue le rôle de la variance).

Sous l'hypothèse d'un bruit additif  $\alpha$ -stable, le M-estimateur de type maximum de vraisemblance [3] des paramètres du signal nécessite le recours à la minimisation d'une fonctionnelle non-linéaire. Cette approche souffre d'une complexité importante. Nous proposons ici une approche alternative où l'on

utilise une transformée polynomiale du signal qui permet de transformer un signal chirp en un signal harmonique bruité. Les paramètres du signal sinusoïdal ainsi obtenu sont estimés par la méthode sous-espace MUSIC [5]. Pour rendre celle-ci robuste au bruit impulsif, plusieurs méthodes sont proposées et comparées dans ce qui suit.

## II Estimation de la phase

### II-1 Estimation d'une phase linéaire

Nous traitons dans cette section l'estimation des fréquences d'un signal harmonique multicomposantes affecté par un bruit impulsif correspondant à celui de l'équation (1) avec  $\delta_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, I$ . Nous proposons d'appliquer MUSIC de trois manières différentes. On appellera ces trois variantes: TRUNC-MUSIC, ROCOV-MUSIC et FLOM-MUSIC. Dans la suite on suppose que le nombre de composantes du mélange  $I$  est connu.

#### II-1-1 L'algorithme TRUNC-MUSIC

La matrice de covariance des observations n'est pas définie à cause de la nature  $\alpha$ -stable du bruit. Nous proposons ici de tronquer le signal sinusoïdale en amplitude avant d'appliquer l'algorithme MUSIC. Ainsi l'algorithme considéré se résume en deux points:

- Troncature du signal pour se ramener au cas d'un signal de variance finie, ce qui consiste à considérer les observations suivantes

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i & \text{si } |x_i| \leq K \\ \text{sign}(x_i)K & \text{si } |x_i| > K \end{cases}$$

où  $K$  est une constante de troncature<sup>1</sup>

- Application de la méthode MUSIC au signal tronqué pour l'estimation des fréquences.

Nous appelons cette méthode TRUNC-MUSIC, c'est la technique la plus simple de traitement des valeurs aberrantes.

#### II-1-2 L'algorithme ROCOV-MUSIC

L'autocovariance du signal harmonique en considération s'écrit pour  $k \neq 0$ :

$$\gamma(k) \triangleq E(x_{n+k}x_n) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{|a_i|^2}{2} \cos(2\pi f_i k) \quad (3)$$

Nous estimons les paramètres de phase par l'algorithme MUSIC à partir d'une estimée robuste de cette fonction d'autocovariance du signal. On dit qu'un estimateur est robuste si ses performances ne sont pas trop détériorées quand les hypothèses sur lesquelles il repose ne sont pas vérifiées. C'est le cas par exemple si l'on suppose que le bruit est gaussien alors que sa densité de probabilité a des queues plus importantes que prévu. La plupart des estimateurs classiques sont peu robuste vis-à-vis de cette situation. Huber [4] a proposé de généraliser

<sup>1</sup>Nous proposons d'effectuer un histogramme des valeurs des observations afin de choisir la constante  $K$  tel que 90 % des données appartiennent à  $[-K, K]$

le principe de la méthode des moindres carrés pour estimer un paramètre inconnu  $\theta$  de manière robuste. Ces estimateurs, connus sous le nom de M-estimateurs, se présentent sous la forme d'une statistique  $T_N$  minimisant

$$\sum_{j=0}^{N-1} \rho(x_j; \theta) \quad (4)$$

où  $\rho$  est une fonction de coût non constante et  $x_0, \dots, x_{N-1}$  un échantillon indépendant d'une v.a. réelle  $X$  de loi  $P$ . Si cette loi admet une densité  $p$ , on retrouve également la définition classique de l'estimateur du maximum de vraisemblance en prenant  $\rho(x; \theta) = -\log p(x; \theta)$ . On s'intéresse ici à l'estimation robuste du paramètre  $\theta = \sigma^2$  de variance. En effet, l'estimation robuste de la fonction d'autocovariance (3) se ramène à celui de l'estimation robuste de la variance en observant que

$$E(XY) = \frac{1}{4}[Var(X+Y) - Var(X-Y)] \quad (5)$$

où  $Var$  indique la variance.

La variance d'un signal  $\alpha$ -stable étant infini, on utilise ici une troncature du signal considéré avec des constantes  $K \gg 1$ . A noter que, contrairement à la méthode TRUNC-MUSIC, le choix de cette constante n'est pas déterminant pour les performances de la méthode.

Le M-estimateur de  $\sigma^2$  est la solution de l'équation [2]:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u(d_i^2) \frac{x_i^2}{\sigma^2} - u(d_i^2) = 0 \quad (6)$$

où  $d_i^2 = \frac{x_i^2}{\sigma^2}$  est la distance quadratique de Mahalanobis. La fonction  $u$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$ . La solution de l'équation (6) est donnée par

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \omega_i^2 x_i^2}{N-1} \quad (7)$$

$$\omega_i = u(d_i) = \omega(d_i)/d_i \quad (8)$$

où  $\omega$  est la fonction d'Huber définie par  $\omega(d) = \min(d, k)$  et  $k$  une constante appropriée. Huber a prouvé la convergence<sup>2</sup> vers  $\sigma^2$  lorsqu'on calcule itérativement l'estimateur robuste de la variance donné par l'équation (7). En utilisant l'estimateur classique de la variance

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i^2$$

pour initialiser l'algorithme.

#### II-1-3 L'algorithme FLOM-MUSIC

Pour un signal  $S\alpha S$ , seulement les moments d'ordre  $p < \alpha$  existent. Ils sont appelés les moments d'ordre inférieur fractionnaires (FLOM). Le  $p$ ème moment d'une variable aléatoire (v.a.)  $X$   $\alpha$ -stable est donné par :

$$E |X|^p = C(p, \alpha) \gamma_x^{\frac{p}{\alpha}} \quad \text{pour } 0 < p < \alpha, \quad (9)$$

<sup>2</sup>Nous avons observé une convergence très rapide de l'algorithme: typiquement en 2 ou 3 itérations.

où  $\gamma_x$  est la dispersion de la v.a.  $X$  et

$$C(p, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2^{p+1} \Gamma(\frac{p+1}{2}) \Gamma(-\frac{p}{\alpha})}{\alpha \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{-p}{2})}$$

$\Gamma$  désigne la fonction Gamma. La plupart des méthodes d'estimation basées sur les FLOM utilisent la notion de *covariation* [7]. Le coefficient de covariation de deux v.a. réelles conjointement  $\alpha$ -stable est donné par:

$$\lambda_{X,Y} = \frac{[X, Y]_\alpha}{[Y, Y]_\alpha} = \frac{E[XY^{<p-1>}]}{E[|Y|^p]}, \quad 0 < p < \alpha \quad (10)$$

où  $Y^{<p-1>} = |Y|^{p-1} \text{sign}(Y)$  avec

$$\text{sign}(Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } Y > 0, \\ 0 & \text{si } Y = 0 \\ -1 & \text{si } Y < 0. \end{cases} \quad (11)$$

La définition du coefficient de covariation est indépendante de  $p$  pour  $1 \leq p < \alpha$  [7].

**Définition 1** On appelle *matrice des coefficients de covariation généralisé (CCG)* la matrice dont l'élément de la position  $(i, j)$  est le coefficient de covariation  $\lambda_{x_i, x_j}$

Altinkaya et al. [1] ont démontré le résultat suivant par l'utilisation des propriétés de la distribution  $S\alpha S$ .

**Théorème 1** *Le coefficient de covariation généralisé d'un signal harmonique multicomposantes à phase aléatoire et affecté par un bruit  $\alpha$ -stable est un signal harmonique multicomposantes de même fréquences que le signal d'origine:*

$$\lambda_{x_n, x_l} = \sum_{i=1}^I \eta_i \cos\{2\pi f_i(n-l)\} + P_z^{(I)} \delta_n \quad (12)$$

où  $\{\eta_i, i = 1, \dots, I\}$  sont des constantes positives qui dépendent non-linéairement de  $\alpha$  et des  $a_i$ ,  $P_z^{(I)}$  est une constante réelle qui dépend de la densité de probabilité  $S\alpha S$  du bruit et  $\delta_n$  est le coefficient de Kronecker.

L'équation (12) est similaire à celle de l'équation de la covariance des sinusoides noyées dans un bruit blanc [5]. Alors on peut appliquer la méthode sous espace MUSIC à la matrice des coefficients de covariation généralisée (CCG) définie ci-dessus et estimée par:

$$\hat{\lambda}_{n,l}(p) = \frac{\sum_{i=1}^{N-M+1} x_{n+i-1} |x_{l+i-1}|^{p-1} \text{sign}(x_{l+i-1})}{\sum_{i=1}^{N-M+1} |x_{l+i-1}|^p} \quad (13)$$

$M$  est une constante qui indique la taille de la matrice CCG. Cette estimation est basée sur les FLOM, d'où l'appellation FLOM-MUSIC.

## II-2 Estimation d'une phase quadratique

Dans cette section, nous revenons au problème original celui de l'estimation d'une phase quadratique. On considère ainsi le signal chirp réel décrit par l'équation (1).

La première étape de notre algorithme consiste à transformer la phase quadratique en phase linéaire en utilisant la transformée polynomiale:

$$y_n = x_{n+\tau} x_n \quad (14)$$

$$= \sum_{i=1}^I \frac{|a_i|^2}{2} \cos\{2\pi(2\tau\delta_i n) + \varphi_i\} + z_n^1 \quad (15)$$

où  $\tau$  est un paramètre de retard choisi usuellement grand (entre  $\frac{N}{2}$  et  $\frac{2N}{3}$ , [6]),  $\varphi_i = 2\pi(\tau f_i + \tau^2 \delta_i)$  et  $z_n^1$  est le terme bruit plus les interférences.<sup>3</sup>

On applique ensuite les algorithmes précédents au signal  $y_n$  pour estimer les paramètres de phase du second ordre  $\delta_i, i = 1, \dots, I_1$ .<sup>4</sup> Pour estimer les paramètres de phase du premier ordre  $f_i, i = 1, \dots, I$ , nous procédons à la démodulation du signal comme suit: Pour  $i = 1, \dots, I_1$ , on calcule

$$y_n^{(i)} = y_n^a \exp(-j2\pi\hat{\delta}_i n^2) \quad (16)$$

$$\approx \sum_{k \in J_i} \exp\{2j\pi(f_k n) + \theta_i\} + w_n \quad (17)$$

où  $J_i$  est l'ensemble des indices des composantes de même coefficient  $\delta_i$ ,  $\hat{\delta}_i$  est l'estimé de  $\delta_i$  et  $y_n^a$  représente le signal analytique de  $y_n$  exprimé par:

$$y_n^a = y_n + jH\{y_n\}$$

où  $H$  désigne la transformée de Hilbert.

Pour chaque signal démodulé nous estimons l'ensemble des fréquences  $\{f_k, k \in J_i\}$  en utilisant l'un des algorithmes précédents appliqué à la partie réelle du signal démodulé  $\Re\{y_n^{(i)}\}$ .

Notons que si pour un indice  $i$ , correspond une seule composante fréquentielle, il n'est pas nécessaire d'utiliser une méthode à haute résolution.

## III Comparaison des performances

### III-1 Mélange de composantes sinusoidales

Dans ce paragraphe, on étudie la comparaison des performances des trois estimateurs TRUNC-MUSIC, ROCOV-MUSIC et FLOM-MUSIC pour l'estimation des paramètres de signaux harmoniques. On considère un mélange de trois ( $I = 3$ ) composantes sinusoidales de même amplitudes  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$  et de fréquences  $f_1 = 0.1, f_2 = 0.3$  et  $f_3 = 0.4$ . Le signal est affecté par un bruit  $\alpha$ -stable avec  $\alpha = 1.5$ . Les statistiques sont évaluées avec 200 réalisations de Monté-Carlo.

Figure 1 présente l'erreur quadratique moyenne (MSE) en fonction de la dispersion du bruit en dB, la taille d'échantillon étant fixée à  $N = 1000$ . Sur la figure 2, nous présentons l'erreur MSE en fonction de la taille de l'échantillon. La dispersion du bruit est fixée à  $\gamma = 0.1$ .

### III-2 Mélange de composantes chirp

Dans ce paragraphe, on étudie la comparaison des performances des trois estimateurs TRUNC-MUSIC, ROCOV-MUSIC et FLOM-MUSIC pour l'estimation des paramètres de phase d'un signal chirp. On considère un mélange de deux ( $I = 2$ ) composantes chirp de même amplitudes  $a_1 = a_2 = 1$ , de fréquences

<sup>3</sup>Notons que  $z_n^1$  reste de nature impulsive sans toutefois suivre une loi  $S\alpha S$ .

<sup>4</sup>On a éventuellement  $I_1 < I$  s'il s'avère que certaines composantes chirp du signal ont le même coefficient de phase du second ordre et des coefficients de phase du premier ordre différents.

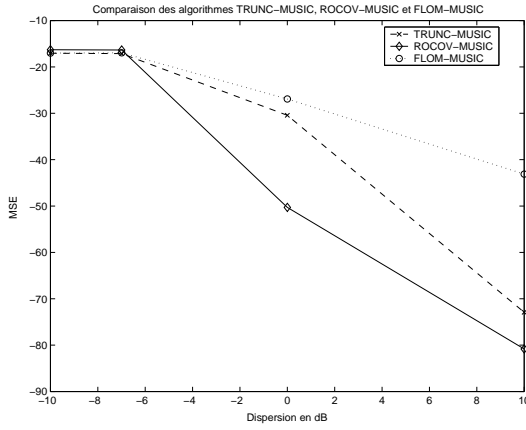


FIG. 1: Erreur quadratique en fonction de la dispersion du bruit en dB,  $N=1000$ .

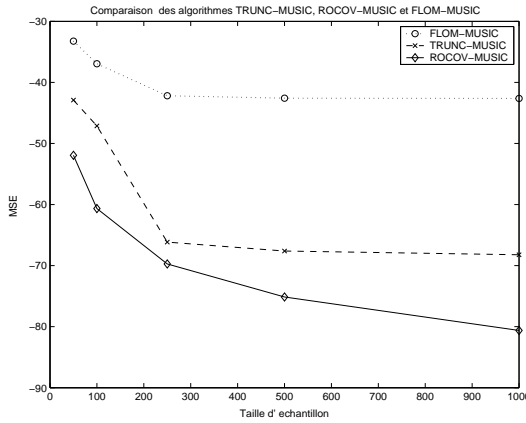


FIG. 2: Erreur quadratique en fonction de la taille de l'échantillon,  $\gamma = 0.1$ .

$f_1 = 0.05$  et  $f_2 = 0.3$  et de paramètres de second ordre  $\delta_1 = 0.0001$  et  $\delta_2 = 0.0003$ . Le signal est affecté par un bruit  $\alpha$ -stable avec  $\alpha = 1.5$ . Les statistiques sont évaluées avec 500 réalisations de Monté-Carlo.

Figures 3 et 4 représentent les MSE des paramètres de phase en fonction de la taille de l'échantillon et de la dispersion du bruit, respectivement. Les trois techniques proposées dans cet article sont comparées : La légende utilisée est similaire à celle des figures 1 et 2.

Ces exemples de simulation montrent l'efficacité des algorithmes proposés pour réduire l'effet du bruit impulsif sur l'estimation des paramètres désirés. L'étude comparative, montre un avantage clair en faveur de la méthode ROCOV-MUSIC. Les résultats obtenus permettent d'envisager un certain nombre de perspectives. En particulier, il serait intéressant d'appliquer les trois algorithmes pour l'estimation d'une phase polynomiale de degré  $m > 2$ .

## References

[1] M. A. Altinkaya, H. Delic, B. Sankur and E. Anarim, "Subspace-based frequency estimation of sinusoidal sig-

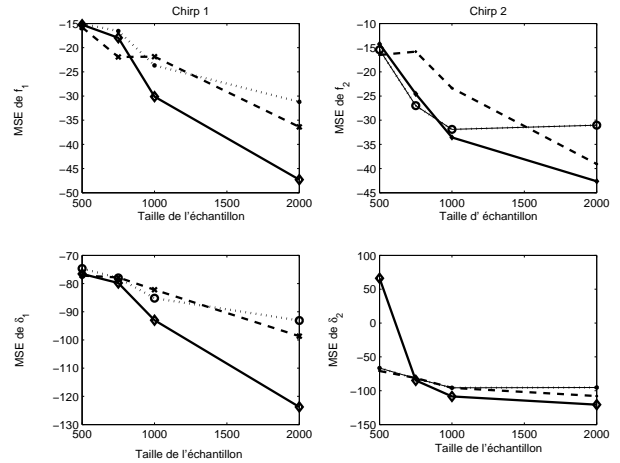


FIG. 3: Erreur quadratique en fonction de la taille de l'échantillon,  $\gamma = 0.1$ .

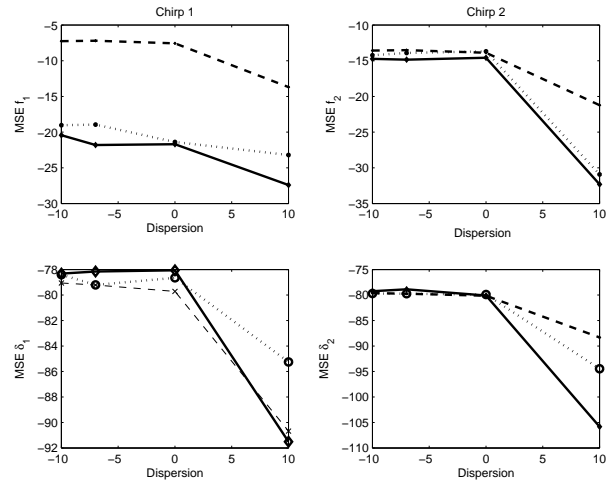


FIG. 4: Erreur quadratique en fonction de la dispersion du bruit en dB,  $N=1000$ .

nals in alpha-stable noise", *Signal Processing*, N. 82, pp. 1807-1827, 2002.

- [2] N. A. Campbell, "Robust Procedures in Multivariate Analysis I: Robust Covariance Estimation" *Journal of Appl. Statist.*, vol. 29, No. 3, pp. 231-237, 1980.
- [3] J. Friedmann, H. Messer and J-F. Cardoso, "Robust Parameter Estimation of a Deterministic Signal In Impulsive Noise", *IEEE, Tr. On Sig. Proc.*, vol. 48, N. 4, April 2000.
- [4] P. J. Huber, *Robust Statistics*. New York: Wiley, 1981.
- [5] S. M. Kay, *Modern Spectral Estimation: Theory and applications*, Prentice-Hall, 1988.
- [6] S. Peleg and B. Porat, "Estimation and Classification of Polynomial-Phase Signal". *IEEE Tr. on Inf. Theory*, vol. 37, no. 2, pp. 422-430, March 1991.
- [7] C.L. Nikias and M. Shao, "Signal processing with alpha-stable distributions and applications", *New York, John Wiley & Sons*, 1995.