

# Identification Spectrale via les Polynômes de Szegő Aléatoires

Bénédicte DUJARDIN, Jean-Daniel FOURNIER

Laboratoire Cassini, Observatoire de la Côte d'Azur, BP 4229, 06304 Nice Cedex 4, France  
dujardin@obs-nice.fr, fournier@obs-nice.fr

**Résumé** – Le comportement statistique des racines des polynômes orthogonaux aléatoires de Szegő attachés à divers bruits stationnaires gaussiens non blancs est caractérisé, par développement asymptotique pour les signaux longs et par explorations numériques. On montre en particulier les liens entre les zéros de ces polynômes et les pôles du spectre d'énergie. On discute enfin des conditions de l'application de cette méthode au traitement des données du détecteur Virgo.

**Abstract** – We characterize the statistical behaviour of the roots of the orthogonal random Szegő polynomials attached to various stationary gaussian coloured noises. For this purpose, we use asymptotic expansions for large length signals and numerical experiments. The links between the zeros of these polynomials and the poles of the energy spectrum are pointed out. Finally, we discuss the conditions for the implementation of this method to the analysis of the Virgo detector data.

## 1 Introduction

Dans les cas concrets, le spectre d'énergie d'un signal  $X(t)$ , bruité ou non, est fréquemment une fraction rationnelle en la variable de Fourier  $\omega$ . Les bruits thermiques ou les signaux générés par des systèmes ARMA en sont des exemples classiques. Dans le cas discret, les pôles extérieurs au cercle unité du plan complexe de la variable réduite  $z = e^{i\omega}$  définissent un polynôme qui correspond au polynôme caractéristique des modèles ARMA. Les pôles situés à l'intérieur du disque unité sont les inverses des précédents et seront appelés résonances. La détermination et le contrôle des zéros du polynôme caractéristique moyen, dans le cas bruité, font l'objet des travaux [1, 2] par exemple.

Nous nous intéressons ici aux conditions sous lesquelles certaines racines des polynômes de Szegő [3] s'approchent des résonances. Sous le nom d'«analyse en fréquence», des résultats asymptotiques concernant ce phénomène dans la limite des signaux longs ont été obtenus rigoureusement [4, 5]. Ceux-ci reposent sur l'hypothèse que le signal est purement déterministe, fait d'une somme finie de lignes trigonométriques non amorties. Dans le présent travail nous traitons ce problème en relaxant les hypothèses restrictives généralement faites précédemment dans la littérature, à savoir : nous étudions les polynômes de Szegő comme variables aléatoires au lieu de se restreindre à leur espérance mathématique ; les singularités du spectre peuvent être ailleurs que sur le cercle unité [6, 7, 8], permettant la description de décorrélations, non retenues jusqu'alors. Le formalisme est rappelé en section 2, les résultats obtenus à ce jour sont présentés dans les sections 3 et 4 ; les développements théoriques en cours sont rapidement décrits dans la section 5 et la discussion des applications de ce travail théorique -asymptotique et numérique- est faite dans la section 6.

## 2 Les polynômes de Szegő en relation avec l'analyse spectrale de données discrétisées.

On définit le produit scalaire de deux fonctions en prenant une mesure dont le support est le cercle unité et dont la densité est le spectre d'énergie du signal discrétisé. Les polynômes de Szegő, à coefficients réels et orthogonaux relativement à ce produit scalaire, sont obtenus par la relation de récurrence

$$S_p(z) = zS_{p-1}(z) + \delta_p S_{p-1}^\dagger(z) \quad , \quad \delta_p \equiv -\frac{\langle zS_{p-1}|1 \rangle}{\langle S_{p-1}^\dagger|1 \rangle}, \quad (1)$$

qui met en jeu le polynôme réciproque  $S_{p-1}^\dagger$ , le coefficient de Levinson  $\delta_p$ , et la condition initiale  $S_0 = 1$ . La relation entre les zéros de  $S_p$  et les résonances tient à l'information que  $\delta_p$  injecte dans la récurrence (1), non seulement sur le comportement du spectre sur le cercle unité mais aussi sur sa continuation analytique.

## 3 L'exemple des données générées par un système AR(1).

On notera dans la suite  $N$  la longueur du signal discret,  $a$  le paramètre du modèle et  $p$  le degré du polynôme. Le signal  $\{X\}$  généré par un système autorégressif d'ordre 1 peut se construire par la récurrence

$$X(m) = a X(m-1) + \phi(m) - a \delta_m^N X(N-1) \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

avec la condition initiale  $X(0) = \phi(0)$ .  $\{\phi\}$  est un bruit blanc gaussien fenêtré sur  $[0; N-1]$  ; le réel  $a$ , inférieur à 1 en valeur absolue, mesure le degré de décorrélation entre les valeurs successives du signal échantillonné.

Cette formulation se prête, pour une longueur finie quelconque  $N$ , au calcul de la transformée en Z du signal, et à ce

lui du spectre  $\mathcal{E}(z)$ , qui sont des quantités aléatoires. De là, la récurrence donne en principe accès aux racines, aléatoires, des polynômes.

En effectuant des explorations numériques dans le triple régime asymptotique  $\ln N \ll p \ll N$ ,  $|1-a| \ll 1$ , Th. Ayguess-parsses [8] a observé le mouvement d'une racine réelle qui tend vers 1 comme  $a$ ; les autres racines se situent dans  $\mathbb{C}$  avec un module légèrement inférieur à  $a$ . Du point de vue traitement du signal il est plus naturel de considérer  $a$ , qui est une propriété du système, comme une donnée, et de séparer les racines en jouant si possible sur la longueur du signal (fig. 1.b).

Du point de vue théorique, nous avons pris avantage de la limite des signaux longs pour contrôler les ordres de grandeur des valeurs moyennes et des moments d'ordre 2 des quantités qui entrent dans la récurrence des polynômes de Szegő. On montre ainsi que le polynôme de degré  $p$  s'écrit

$$S_p(z) = z^{p-1}(z-a) + \frac{1}{\sqrt{N}}S_p^f(z) \quad \forall p \geq 1, \quad (3)$$

où l'ordre de grandeur typique du polynôme fluctuant  $S_p^f$  est indépendant de  $N$ . À l'ordre dominant en  $1/N$ , le zéro non trivial de  $S_p$  se place en  $a$ , qui est la seule résonance du système; celle-ci détermine le polynôme caractéristique et le spectre moyen. À l'ordre suivant, on prédit la position et la largeur des pics de la distribution de probabilité des racines de  $S_p$  dans le disque unité. Celle-ci possède (voir fig. 1) un pic en  $a$  de largeur  $\mathcal{O}(N^{-1/2})$ , et  $2p-2$  pics disposés à intervalles réguliers sur un cercle de rayon moyen  $\mathcal{O}(N^{-1/2(p-1)})$  et de taille au plus bas ordre  $\mathcal{O}(N^{-1/(p-1)})$ .

## 4 Données générées par un système Auto Régressif quelconque.

Le signal est maintenant généré par récurrence à partir d'un bruit blanc gaussien et d'une collection de paramètres  $\{a_1, \dots, a_A\}$

$$X(m) = a_1X(m-1) + \dots + a_AX(m-A) + \phi(m), \quad (4)$$

avec les conditions aux bords convenables. On définit le polynôme caractéristique du modèle par

$$L_A(z) = 1 - a_1z - \dots - a_Az^A; \quad (5)$$

il possède  $A$  racines, réelles ou complexes conjuguées, que nous supposons simples et de module strictement supérieur à 1 pour des raisons de causalité [9]. L'espérance mathématique du spectre d'énergie de ce signal s'écrit en fonction du polynôme caractéristique

$$\mathcal{E}(z) = \frac{z^A}{L_A(z)L_A^\dagger(z)}. \quad (6)$$

Toujours dans la limite des signaux longs, nous avons généralisé la méthode. Au plus bas ordre non trivial en  $N^{-1/2}$ , nous avons montré que le polynôme de Szegő de degré  $p$  s'écrit

$$S_p(z) = z^{p-A}L_A^\dagger(z) + N^{-1/2}S_p^f(z), \quad \forall p \geq A. \quad (7)$$

Une conséquence de (7) est que les racines se répartissent de nouveau en deux familles (voir fig. 2).  $A$  d'entre elles sont

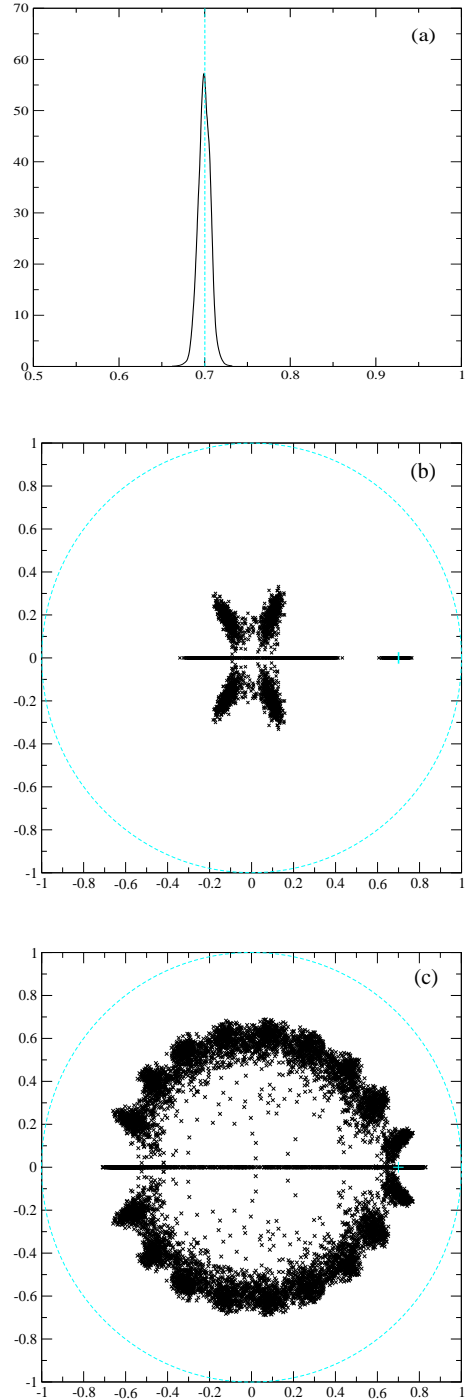


FIG. 1: pdf des racines des polynômes de Szegő de degré  $p$  d'un AR(1) de paramètre  $a=0.7$ , de longueur  $N=10000$ , sur 1000 réalisations. (a)  $p=1$ , dans  $\mathbb{R}$ ; (b)  $p=4$ ; (c)  $p=10$ , dans le disque unité.

proches des résonances; les  $p-A$  restantes vont sur un cercle de rayon  $\mathcal{O}(N^{-1/2(p-A)})$  et sont non pertinentes du point de vue de l'analyse de données.

Cette équation (7) mérite quelques remarques supplémentaires. Dans la limite des signaux infiniment longs, elle relie directement le polynôme de Szegő au polynôme caractéristique du système; ceci permet alors d'écrire l'espérance mathéma-

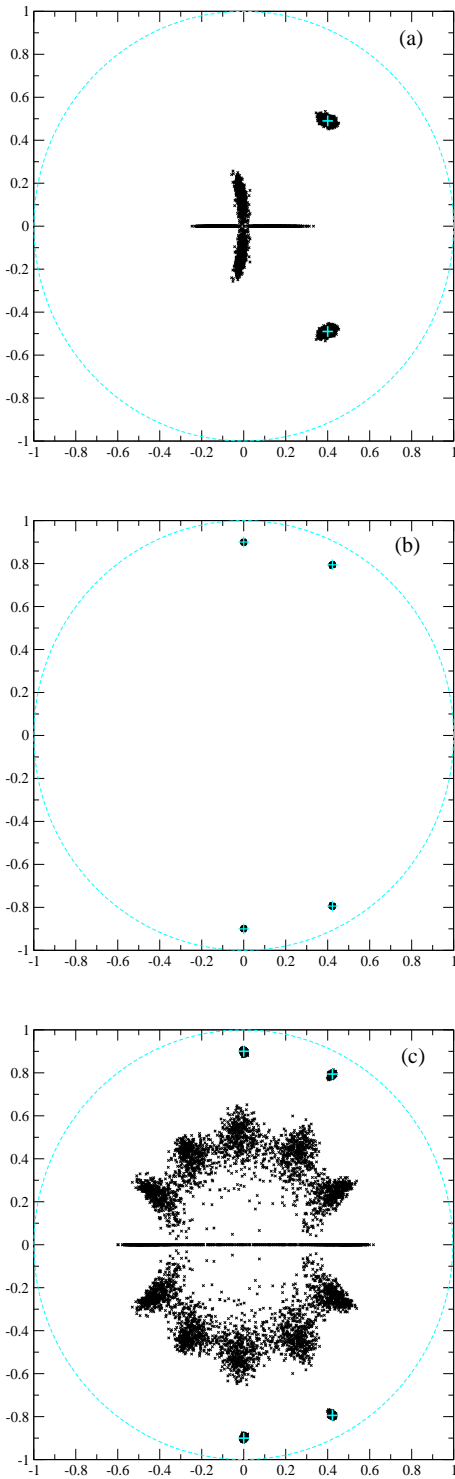


FIG. 2: Répartition dans le disque unité des racines des polynômes de Szegő de 1000 réalisations du signal de longueur  $N=10000$ . (a) AR(2) de coefficients 0.8; -0.4,  $p=4$ ; (b) AR(4) de coefficients 0.845; -1.62; 0.685; -0.6561,  $p=4$ ; (c) idem,  $p=10$ . Les croix indiquent les racines des polynômes caractéristiques réciproques.

tique du spectre sous la forme

$$\mathcal{E}(z) = \frac{z^{2A-p}}{S_p(z)S_p^\dagger(z)}, \quad (8)$$

qui met en évidence le fait que les racines non triviales du polynôme de Szegő limite sont les résonances du spectre d'énergie.

## 5 Perspectives théoriques

Nous avons montré que lorsque le spectre d'énergie est une fraction rationnelle dont seul le dénominateur a des racines non nulles, les polynômes de Szegő détectent les pôles qui sont à l'intérieur du disque unité. Lorsque le numérateur est lui aussi non trivial, ce qui est par exemple le cas des modèles ARMA ou de signaux contenant une partie déterministe, la situation est plus délicate, et il se peut qu'il n'y ait pas d'équivalent de la formule (7). Les résultats numériques indiquent qu'on détecte les pôles du spectre dans un régime asymptotique où à la fois la longueur du signal et le degré du polynôme sont grands. L'étude de la convergence des polynômes de Szegő pourrait alors nécessiter une norme fonctionnelle non uniforme. Ce problème ainsi que celui des liens avec la théorie des approximants de Padé font l'objet de nos recherches actuelles.

## 6 Application au détecteur Virgo.

Nous avons commencé l'adaptation de cette méthode au traitement des données de l'expérience italo-française Virgo de détection interférométrique d'ondes gravitationnelles. La très faible amplitude des signaux attendus nécessite une parfaite connaissance des bruits qui limitent la sensibilité du détecteur. L'étude théorique de ces perturbations [10] prédit des bruits quasi-stationnaires et quasi-gaussiens dont les densités spectrales sont des fonctions analytiques; dans le cas des bruits thermiques ou sismiques ce sont des fractions rationnelles; l'utilisation des polynômes de Szegő pour le traitement des données de Virgo semble donc toute indiquée.

En pratique se pose le problème du pré-traitement des données, par exemple de leur blanchiment; pour cela on a recours à l'identification d'un modèle ARMA reproduisant la statistique du signal; la méthode de Szegő permettrait d'y accéder via les résonances. Nos premiers travaux dans cette direction portent seulement sur les arguments des racines des polynômes de Szegő (fig. 3), et donc des résonances correspondantes, qui peuvent se traduire par des pics dans le spectre de Fourier.

La mise au point d'une méthode effective de traitement de données nécessite la discussion de problèmes concrets, comme la définition du degré optimal pour l'estimation, ou le changement d'échelle en fréquence nécessaire au traitement du signal échantillonné à 20 kHz. Il faudra également tester l'efficacité de l'analyse de Szegő en la comparant avec des méthodes plus traditionnelles d'analyse spectrale. À terme nous espérons pouvoir détecter les résonances des bruits de Virgo et participer à leur identification, leur classification, voire leur soustraction.

## Références

- [1] J.-L. Lacoume, C. Hanna, J.-L. Nicolas, *Etalonnage de l'analyse spectrale par la méthode du modèle autoregressif*, Ann. Telecommun., 36, No. 11-12, pp. 579-584, 1981.
- [2] J.-L. Lacoume, M. Gharbi, C. Latombe, J.-L. Nicolas, *Close Frequency Resolution by Maximum Entropy Spec-*

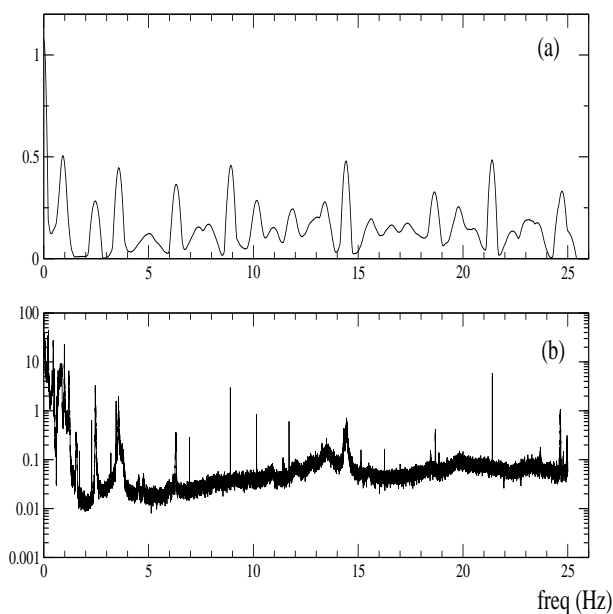


FIG. 3: (a) *Distribution angulaire des racines des polynômes de Szegő pour  $p = 10$  à  $100$* ; (b) *FFT du signal. On a utilisé les données Virgo échantillonnées à 50Hz lors de E4, le 14.VII.2002 de 06h00 à 10h00.*

*tral Estimators*, IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing, Vol. ASSP-32, No. 5 1984.

- [3] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXIII, 1939.
- [4] W. Jones, O. Njastad, E. Saff, *Szegő Polynomials Associated with Wiener-Levinson filters*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 32, pp. 387-406, 1990.
- [5] P. Delsarte, Y. Genin, *On the role of Orthogonal Polynomials on the unit circle in Digital Processing Applications*, ed. Nevai, Pub. Kluwen, pp. 115-133, 1990.
- [6] J.-D. Fournier, G. Mantica, A. Mezincescu, D. Bessis *Universal statistical behavior of the complex zeros of Wiener transfer functions*, Europhys. Lett., Vol. 22 No. 5, pp. 325-331, 1993.
- [7] J.-D. Fournier, *Complex zeros of random Szegő polynomials*, Computational Methods and Function Theory, ed. Papamichael, Pub. World Scientific pp. 203-223, 1997.
- [8] Th. Ayguesparsses, *Analyse nouvelle de signaux stochastiques corrélés*, Mémoire de DEA, Document Laboratoire Cassini 1996.
- [9] G. Box & G. Jenkins *Time Series Analysis: forecasting and control*, San Francisco: Holden-Day, 1970.
- [10] Data Analysis Group, *Data Analysis Document; Internal Noises Virgo Internal Note*, 1999.