Déconvolution impulsionnelle par filtre de Hunt et seuillage

Vincent MAZET¹, David BRIE¹, Cyrille CAIRONI²

¹CRAN – CNRS UMR 7039 Université Henri Poincaré, Nancy 1, BP 239 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France

²Alstom Moteurs 4, rue de la Rompure, 54250 Champigneulles, France vincent.mazet@cran.uhp-nancy.fr, david.brie@cran.uhp-nancy.fr

cyrille.caironi@tde.alstom.com

Résumé – Nous présentons une nouvelle méthode de déconvolution impulsionnelle basée sur le couplage du filtre de Hunt et un seuillage (afin d'obtenir un signal impulsionnel). On montre qu'un mélange de gaussiennes est un bon modèle pour la distribution de la sortie du filtre de Hunt, ce qui permet de trouver une expression du seuil qui minimise la probabilité d'erreurs. La méthode pouvant être interprétée comme un estimateur MAP, les hyperparamètres du problème sont estimés grâce à une approche JMAP (joint MAP). Cette méthode est appliquée avec de bons résultats sur des signaux de décharges partielles.

Abstract – A new method of sparse spike train deconvolution is presented. It is based on the coupling of the Hunt filter with a thresholding (to obtain a sparse spike train signal). We show that a good model for the probability density function of the Hunt filter output is a Gaussian mixture, from which we derive the threshold that minimizes the probability of errors. Based on an interpretation of the method as a MAP estimator, the hyperparameters are estimated using a JMAP (joint MAP) approach. This method is applied successfully on partial discharge signals.

placements

1 Introduction

Cet article présente un nouvel algorithme de déconvolution impulsionnelle appelé HT (*Hunt-Threshold*), basé sur le filtre de Hunt de paramètre α suivi d'une méthode de seuillage adéquate de seuil s (cf. figure 1). Le but du problème est de res-



FIG. 1 - Modélisation du problème et méthode HT

taurer le signal impulsionnel x, connaissant les données y et la réponse impulsionnelle du système H (déconvolution non aveugle); les hyperparamètres θ sont supposés inconnus (déconvolution non supervisée) :

$$y = Hx + b$$
,

- le signal impulsionnel $x \in \mathbb{R}^N$ est supposé Bernoulligaussien (BG)¹ :

$$\forall k, p(\boldsymbol{x}_k) = \lambda \mathcal{N}(0, r_x) + (1 - \lambda) \delta_0(\boldsymbol{x}_k)$$

 δ_0 étant la masse de Dirac centrée sur 0;

- $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est la matrice de convolution (Toeplitz) de la réponse impulsionnelle du système ;

- le bruit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^N$ est supposé blanc, gaussien tel que :

$$\forall k, p(\boldsymbol{b}_k) = \mathcal{N}(0, r_b)$$

 $- \theta = \{\lambda, r_x, r_b\}$ regroupe les hyperparamètres du problème : λ (paramètre de Bernoulli – rapport entre le nombre de pics sur le nombre total d'échantillons, $\lambda \ll 1$), r_x (variance des pics) et r_b (variance du bruit).

Parmi les applications de ce type de problème, citons la géophysique [12], la médecine, la spectroscopie [10] ou le contrôle non destructif [3], en particulier l'analyse des signaux de décharges partielles qui a motivé ce travail [7]. La taille importante de ces signaux (par exemple $N = 2^{16}$ points), et l'implémentation de l'algorithme sur un système embarqué a motivé le développement d'une méthode rapide, simple et nécessitant peu de mémoire.

Les algorithmes combinatoires (comme les méthodes SMLR [5, 1], MPM ou ICM [6, 12], IWM [4]) donnent de très bons résultats. Mais ces méthodes sont souvent lentes et complexes et ne permettent pas de traiter facilement un grand nombre de données.

En revanche, le filtre de Hunt [2] est plus simple et plus rapide, mais il ne donne pas de résultats satisfaisants pour la restauration d'impulsions, puisqu'il suppose un a priori gaussien sur le signal à restaurer. L'approche que nous proposons consiste à lui adjoindre un seuillage afin d'obtenir effectivement un signal impulsionnel; le seuil est calculé afin de minimiser la probabilité d'erreurs {fausses alarmes + non détections}.

¹Par la suite, v_i représente le i^e élément du vecteur v et $M_{i,j}$ l'élément (i, j) de la matrice M.

La méthode HT est présentée section 2 : le filtre de Hunt est rappelée succintement, puis on détermine la densité approchée de \tilde{x} dont on déduit la valeur du seuil. La section 3 est consacrée à l'estimation des hyperparamètres. Un résultat de déconvolution sur un signal réel est présenté section 4. Les conclusions et perspectives sont données section 5.

2 Principe de la méthode HT

2.1 Le filtre de Hunt

Le filtre de Hunt résulte de la minimisation du critère de Phillips et Twomey (cas discret du critère de Tikhonov) [2] :

$$\mathcal{J}_{PT} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}) + \alpha \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}$$

où $D = I_N$ afin de favoriser la restauration des valeurs nulles du signal. La minimisation du critère conduit à une expression explicite de \tilde{x} :

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{y}$$
 où $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H} + \alpha \boldsymbol{I}_N)^{-1}\boldsymbol{H}^T.$ (1)

Pour des questions de rapidité, l'algorithme est implémenté dans le domaine fréquentiel : c'est le filtre de Hunt. Une interprétation bayésienne du critère montre que le filtre de Hunt est équivalent à un estimateur MAP avec un a priori gaussien, et conduit à $\alpha = r_b/r_x$ [2], où r_x est la variance du signal gaussien à restaurer. Afin de favoriser l'estimation de l'amplitude des pics, on choisit r_x comme étant la variance de l'amplitude des impulsions de la séquence BG.

2.2 Densité de probabilité approchée de \tilde{x}

Pour pouvoir déterminer la valeur du seuil, on cherche la densité de probabilité de $\tilde{x} = Gy = GHx + Gb$. Comme $p(b_k) = \mathcal{N}(0, r_b)$ et $(Gb)_k = \sum_{i=1}^N G_{k,i}b_i$, il vient² :

$$p\left((\boldsymbol{G}\boldsymbol{b})_{k}\right) = \prod_{i=\{1,\dots,N\}}^{\star} p\left(\boldsymbol{G}_{k,i}\boldsymbol{b}_{i}\right)$$
$$= \prod_{i=\{1,\dots,N\}}^{\star} \mathcal{N}\left(0, r_{b}\boldsymbol{G}_{k,i}^{2}\right)$$
$$= \mathcal{N}\left(0, r_{b}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{G}_{k,i}^{2}\right). \tag{2}$$

De même, $p(\boldsymbol{x}_k) = \lambda \mathcal{N}(0, r_x) + (1-\lambda)\delta_0(\boldsymbol{x}_k)$ et $(\boldsymbol{GHx})_k = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{GH})_{k,i} \boldsymbol{x}_i$, donc :

$$p\left((\boldsymbol{GHx})_{k}\right) = \prod_{i=\{1,\ldots,N\}}^{\bigstar} \left[\lambda \mathcal{N}\left(0, r_{x}(\boldsymbol{GH})_{k,i}^{2}\right) + (1-\lambda)\delta_{0}(\boldsymbol{x}_{i})\right].$$

Pour simplifier le problème, deux hypothèses (vérifiées dans la pratique) sont nécessaires :

$$\prod_{i=\{1,...,N\}}^{n} f_i(x) = [f_1 \star \ldots \star f_N](x) \quad \forall f_i, i \in \{1,...,N\}.$$

- les termes de corrélation de GH sont négligeables devant les termes de la diagonale, donc GH peut être considérée comme diagonale. Alors $(GH)_{k,i} = 0$ si $k \neq i$, d'où

$$p\left((\boldsymbol{GHx})_{k}\right) = \lambda \mathcal{N}\left(0, r_{x}(\boldsymbol{GH})_{k,k}^{2}\right) + (1-\lambda)\delta_{0}(\boldsymbol{x}_{k});$$
(3)

 les termes des diagonales de *GHH^TG^T* et *GG^T* sont supposés constants et donc égaux à (*GHH^TG^T*)_{1,1} et (*GG^T*)_{1,1}.

Ces hypothèses correspondent à supposer que les variables aléatoires $(GH)_{k,i}X_i$ (x_i est une réalisation de X_i) sont décorrelées et stationnaires.

On montre, d'après (2) et (3), que la densité de probabilité de \tilde{x} peut alors être modélisée par un mélange de deux gaussiennes (la pratique conforte ce modèle : voir figure 4) :

$$p(\tilde{\boldsymbol{x}}_k) = p\left((\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})_k\right) \star p((\boldsymbol{G}\boldsymbol{b})_k)$$
$$= \lambda \mathcal{N}(0, r_1) + (1 - \lambda)\mathcal{N}(0, r_0), \tag{4}$$

avec:
$$r_0 = r_b \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{G}_{k,i}^2 = r_b (\boldsymbol{G} \boldsymbol{G}^T)_{1,1},$$
 (5)

$$r_{1} = r_{x} (\boldsymbol{G}\boldsymbol{H})_{k,k}^{2} + r_{b} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{G}_{k,i}^{2}$$
$$= r_{x} (\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{T}\boldsymbol{G}^{T})_{1,1} + r_{b} (\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{T})_{1,1}. \quad (6)$$

2.3 Seuillage

Le but du seuillage est de séparer les pics (terme $\lambda \mathcal{N}(0, r_1)$) du bruit $((1 - \lambda)\mathcal{N}(0, r_0))$. La figure 2 représente la partie positive des deux gaussiennes, ainsi que le seuil s: les valeurs supérieures à s sont conservées, les autres sont mises à zéro. Deux types d'erreurs peuvent se produire lors du seuillage :

- des fausses alarmes, l'aire A_{FA} correspond à la moitié de la probabilité de fausses alarmes;
- des non détections, l'aire A_{ND} correspond à la moitié de la probabilité de non détections.



FIG. 2 – Aires de fausses alarmes et de non détections

On montre que la probabilité d'erreur {fausses alarmes + non détections} est minimale, c'est à dire que l'aire $A_{ND} + A_{FA}$ est minimale et égale à A, lorsque *s* correspond à l'intersection des deux gaussiennes :

$$s = \sqrt{\ln\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\sqrt{\frac{r_0}{r_1}}\right)\frac{2r_1r_0}{r_0-r_1}}.$$
(7)

3 Estimation des hyperparamètres

Certains travaux ont établi un lien entre des méthodes de seuillage et une estimation MAP [8, 11]. En particulier, il est

²La notation \prod est introduite afin de simplifier les expressions :

montré qu'un seuillage est équivalent à une estimation MAP dont l'a priori n'est pas lisse en zéro (en d'autres termes, sa dérivée est discontinue en zéro). L'a priori utilisé ici est une densité BG, aussi, la méthode HT peut être interprétée comme un estimateur MAP.

Afin de simplifier l'estimation des hyperparamètres, on introduit la variable q qui code l'occurence des pics :

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}_k = 0 & \text{si } \boldsymbol{x}_k = 0 \\ \boldsymbol{q}_k = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, l'estimation MAP de (x, \tilde{x}, q) est effectuée grâce à la méthode HT et correspond à la maximisation de :

$$p(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{q} | \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta}) \propto p(\boldsymbol{y} | \boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{x} | \tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}) p(\tilde{\boldsymbol{x}} | \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{q} | \boldsymbol{\theta}),$$
(8)

avec :

$$- p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}, r_b \boldsymbol{I}_N)$$

car $p(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, r_b \boldsymbol{I}_N)$ et $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$;
$$- p(\boldsymbol{x}|\tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, r_x \boldsymbol{Q})$$
;

- d'après l'équation (4) :

$$p(\tilde{\boldsymbol{x}}_k | \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{q}_k \mathcal{N}(0, r_1) + (1 - \boldsymbol{q}_k) \mathcal{N}(0, r_0)$$
$$= \mathcal{N}(0, r_1 \boldsymbol{q}_k + r_0 (1 - \boldsymbol{q}_k)),$$

ainsi :

$$p(\tilde{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{q},\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, r_1\boldsymbol{Q} + r_0(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{Q})),$$

où $Q = \text{diag}\{q\}$. On remarque que le cas BG correspond au cas limite $r_0 = 0$, avec $r_1 = r_x$;

- $p(q|\theta) = \lambda^{N_q} (1-\lambda)^{N-N_q}$, N_q étant le nombre de pics (nombre d'échantillons non nuls de q).

Une méthode MAP est utilisée pour estimer les hyperparamètres conjointement à l'estimation MAP précédente. On obtient alors une estimation « joint MAP » (JMAP) [9] :

$$\begin{split} (\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{q}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}) &= \arg \max_{(\boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta})} p(\boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{y}) \\ &= \arg \max_{(\boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta})} p(\boldsymbol{y} | \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{x} | \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}) p(\widehat{\boldsymbol{x}} | \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{q} | \boldsymbol{\theta}) \end{split}$$

 $p(\theta)$ n'apparaît pas car elle est considérée comme uniforme (pas d'a priori sur les hyperparamètres). L'optimisation est alors réalisée grâce à la procédure itérative suivante [9] :

$$\begin{cases} (\widehat{\boldsymbol{x}}^{(i)}, \widehat{\boldsymbol{x}}^{(i)}, \widehat{\boldsymbol{q}}^{(i)}) \\ = \arg\max_{\substack{(\boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{q}) \\ (\widehat{\lambda}^{(i)}, \widehat{r_x}^{(i)}, \widehat{r_b}^{(i)}) \\ = \arg\max_{(\lambda, r_x, r_b)} p(\boldsymbol{x}^{(i)}, \widehat{\boldsymbol{x}}^{(i)}, \boldsymbol{q}^{(i)}, \lambda, r_x, r_b | \boldsymbol{y}). \end{cases}$$

La première optimisation est donc réalisée grâce à la méthode HT. Pour estimer r_x et r_b , nous avons tenté de maximiser

$$p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x},r_b)p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{q},r_x)p(\tilde{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{q},r_x,r_b)$$

en utilisant des algorithmes de recherche de minimum classiques, mais les résultats obtenus ne se sont pas montrés satisfaisants. Cela est peut être dû à l'existence de minima locaux.

Pour contourner ce problème, nous avons remplacé la vraisemblance $p(\tilde{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{q}, r_x, r_b)$ par $p(\tilde{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{q}, r_0, r_1)$ pour avoir cette vraisemblance en fonction de r_0 et r_1 , tout en considérant ces deux hyperparamètres indépendants de r_x et r_b . Ainsi, pour une itération particulière, l'estimation des hyperparamètres est égale à :

$$\begin{split} \lambda &= \arg \max_{\lambda} p(\boldsymbol{q}|\lambda), \\ \widehat{r_b} &= \arg \max_{r_b} p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}, r_b), \\ \widehat{r_x} &= \arg \max_{r_x} p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{q}, r_x), \\ (\widehat{r_0}, \widehat{r_1}) &= \arg \max_{(r_0, r_1)} p(\tilde{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{q}, r_0, r_1). \end{split}$$

Des calculs élémentaires conduisent aux expressions explicites suivantes :

$$\begin{split} \widehat{\lambda} &= N_q/N, \qquad \widehat{r_x} = \frac{1}{N_q} \sum_{k=1 \atop q_k \neq 0}^N \widehat{x}_k^2, \\ \widehat{r_b} &= \frac{1}{N} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H} \widehat{\boldsymbol{x}})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H} \widehat{\boldsymbol{x}}), \\ \widehat{r_0} &= \frac{1}{N - N_q} \sum_{k=1}^N \widehat{\boldsymbol{x}}_k^2 (1 - \widehat{\boldsymbol{q}}_k), \qquad \widehat{r_1} = \frac{1}{N_q} \sum_{k=1}^N \widehat{\boldsymbol{x}}_k^2 \widehat{\boldsymbol{q}}_k. \end{split}$$

Les valeurs initiales de λ , r_x et r_b sont arbitraires, tandis que r_0 et r_1 sont initialisés grâce aux équations (5) et (6).

L'algorithme est stoppé lorsque le signal estimé et les hyperparamètres ne diffèrent pas de plus de 1 % des valeurs de l'itération précédente.

4 Application à un signal de décharges partielles

Des simulations ont montré que cette méthode est bien plus rapide et économe en mémoire que des méthodes combinatoires comme SMLR, même si les estimations obtenues sont légèrement moins bonnes.

L'origine pratique de ce travail était la restauration du signal de décharges partielles d'un moteur. Une décharge partielle est un arc électrique qui se produit dans l'isolant des moteurs à haute tension, c'est un reflet de la dégradation de l'isolant. Un signal de décharges partielles est, à l'origine, impulsionnel (les impulsions correspondent aux décharges). Il est filtré par l'ensemble bobinage + capteur.

La figure 5 représente un signal réel de décharges partielles (courbe du haut), mesuré en sortie d'un moteur; et l'estimation du signal impulsionnel obtenue grâce à la méthode HT (courbe du bas). La réponse impulsionnelle (64 échantillons) a été isolée du signal de mesure (figure 3).

Le signal contient 8192 échantillons, ce qui ne permet pas d'appliquer des techniques de type SMLR pour deux raisons : la mémoire nécessaire étant trop importante, le calcul ne peut se faire sur un ordinateur classique ; de plus, la nécessité de développer une méthode rapide pour pouvoir être utilisée sur un système embarqué ne permet pas l'utilisation de ces méthodes trop lentes.

En revanche, la méthode HT utilisant des expressions explicites (filtre de Hunt, estimation des hyperparamètres) et un simple seuillage est très bien adaptée à ce type de contraintes. Le résultat obtenu est satisfaisant : un expert aurait trouvé à peu près le même signal impulsionnel. De plus, le temps nécessaire



FIG. 5 – Mesure y et estimation \hat{x} (zoom). L'échelle des amplitudes est la même pour les deux courbes. seuil = s



FIG. 6 – Mesure y et estimation \hat{x} (zoom). L'échelle des amplitudes est la même pour les deux courbes. seuil = 0,85s

(le traitement a duré environ 0,92 s sur un Pentium 800 MHz avec Matlab 6.5) pour traiter ce signal est très bon par rapport au nombre d'échantillons du signal. La figure 4 représente la répartition des échantillons de \tilde{x} et conforte le modèle de mélange de deux gaussiennes pour la sortie du filtre de Hunt. La figure 6 correspond au même traitement avec un seuil égal à 0,85s. On peut remarquer qu'il y a plus de pics détectés, mais également plus de fausses alarmes. On peut ainsi, en jouant sur le seuil, diminuer le nombre de fausses alarmes ou augmenter le nombre de détections en fonction du type d'application.

5 Conclusion

La méthode HT est une méthode de déconvolution impulsionnelle utilisant successivement le filtrage de Hunt et un seuillage. Nous avons montré que lorsque x est BG, la densité de probabilité de la sortie du filtre de Hunt peut être modélisée par un mélange de deux gaussiennes. Cela permet de déterminer le seuil qui minimise la probabilité d'erreurs. La méthode HT pouvant être interprétée comme un estimateur MAP, les hyperparamètres sont estimés conjointement au signal. Les résultats de cette méthode sont ainsi légèrement moins bons que ceux donnés par des algorithmes combinatoires, mais la méthode est simple, rapide et peu coûteuse en mémoire, elle est donc bien adaptée à une implémentation sur système embarqué.

Les travaux futurs pourront traiter le cas myope (où la réponse impulsionnelle n'est pas connue a priori) et pourront améliorer la procédure d'estimation des hyperparamètres.

Références

- F. Champagnat, Y. Goussard et J. Idier. Unsupervised deconvolution of sparse spike trains using stochastic approximation. *IEEE Trans. Signal Process.*, 44(12) p. 2988–2998, décembre 1996.
- [2] G. Demoment. *Déconvolution des signaux*. polycopié Supélec 3086, 1985.
- [3] J. Idier *et al.*. Approche bayésienne pour les problèmes *inverses*. Hermès Science Publication, Paris, 2001.
- [4] K.F. Kaaresen. Deconvolution of sparse spike trains by iterated window maximization. *IEEE Trans. Signal Process.*, 45(5) p. 1173–1183, mai 1997.
- [5] J.J. Kormylo et J.M. Mendel. Maximum likelihood detection and estimation of Bernoulli-Gaussian Processes. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 28(3) p. 482–488, mai 1982.
- [6] M. Lavielle. Bayesian deconvolution of Bernoulli– Gaussian processes. Signal Process., 33 p. 67–79, 1993.
- [7] V. Mazet. Déconvolution de signaux de décharges partielles. Rapport de stage de DEA, Université Henri Poincaré, Nancy 1, 2002.
- [8] P. Moulin et J. Liu Analysis of multiresolution image denoising schemes using generalized Gaussian and complexity priors. *IEEE Trans. Inf. Theory* 45(3) p. 909–919, avril 1999
- [9] A. Mohammad-Djafari. Joint estimation of parameters and hyperparameters in a Bayesian approach of solving inverse problems. In *Proceedings of IEEE ICASSP*, p. 2837–2840, avril 1997. Munich.
- [10] A. Mohammad-Djafari, J.F. Giovannelli, G. Demoment et J. Idier. Regularization, maximum entropy and probabilistic methods in mass spectroscopy data processing problem. *International Journal of Mass Spectrometry*, p. 1– 19, 2002.
- [11] M. Nikolova Estimées localement fortement homogènes C. R. Acad. Sci. Paris, tome 325, série I, p. 665–670, 1997
- [12] O. Rosec. Déconvolution aveugle multicapteur en sismique réflexion marine très haute résolution. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, avril 2000.