

Estimation d'harmonique dans un bruit multiplicatif à valeurs complexes

Cynthia POZUN¹, Philippe CIBLAT¹, Pascal LARZABAL², Philippe FORSTER³

¹Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications
46 rue Barrault 75013 Paris

²Ecole Normale Supérieure de Cachan
61 avenue du Président Wilson 94235 Cachan

³Université Paris X - Nanterre
1 chemin Desvallières 92410 Ville d'Avray

philippe.ciblat@enst.fr, larzabal@satie.ens-cachan.fr, philippe.forster@cva.u-paris10.fr

Résumé – Ce papier traite du problème général des performances limites (bornes minimales) des estimateurs d'une harmonique noyée dans un bruit multiplicatif à valeurs complexes. La nouveauté réside, d'une part, dans la considération de bruit multiplicatif à valeurs complexes **non circulaire** et, d'autre part, dans l'analyse théorique de l'effet de décrochement classiquement observé en estimation de fréquence. Lorsque le bruit multiplicatif est blanc, nous avons obtenu une expression analytique exacte et asymptotique de la borne de Cramer-Rao ainsi qu'une expression analytique de la borne de Barankin. Enfin une analyse des performances en fonction d'un certain taux de non-circularité du signal est menée.

Abstract – This paper deals with lower bounds derivations for harmonic retrieval issue in complex-valued multiplicative noise. Our originality is twofold : on the one hand, we focus on **non-circular** complex-valued multiplicative noise, and, on the other hand, on the theoretical analysis of the well-known outliers effect. For sake of simplicity, we restrict our analysis to white noise processes. We obtain closed form expressions for the exact and asymptotic Cramer-Rao bound as well as for the Barankin bound. Finally, we address an analysis of the theoretical performance with respect to an “ad hoc” non-circularity rate.

1 Introduction

De nombreuses problématiques, telles que l'estimation de la fréquence Doppler dans les systèmes radar, l'estimation autodiacte du résidu de porteuse en communications numériques et l'estimation des directions d'arrivée en traitement d'antennes, se ramènent d'un point de vue formel à estimer la fréquence d'une exponentielle complexe perturbée par un bruit multiplicatif et additif. C'est pourquoi, nous nous sommes intéressés au modèle général suivant :

$$y(n) = a(n)e^{2i\pi(\phi_0 + \phi_1 n)} + b(n)$$

avec $y(n)$ le signal reçu, $a(n)$ un processus aléatoire et $b(n)$ un bruit additif gaussien considéré dès à présent centré, blanc et de variance $\sigma^2 = \mathbb{E}[|b(n)|^2]$. La phase et la fréquence, notées respectivement ϕ_0 et ϕ_1 , correspondent aux paramètres d'intérêt à estimer. Nous nous concentrerons tout particulièrement sur le paramètre de fréquence ϕ_1 .

La littérature concernant ce sujet est très abondante. Les contributions correspondent soit à la mise en place de nouveaux estimateurs ([3]), soit à l'évaluation des bornes de Cramer-Rao ([6, 15, 7, 8]). Cependant les études existantes se cantonnent aux seuls schémas suivants : i) $a(n)$ est un processus à **valeurs réelles** ([15, 7]) ou ii) $a(n)$ est un processus à **valeurs complexes et circulaire** ([8, 6]).

Dernièrement une publication ([4]) s'intéressait au cas d'un processus $a(n)$ à **valeurs complexes et non-circulaire** dans

le seul but, néanmoins, de mettre en place un nouvel estimateur et non d'évaluer les bornes minimales d'un tel problème d'estimation. Un processus $a(n)$ d'une telle nature intervient notamment dans des systèmes de communications numériques employant soit des modulations réelles (MDP2), soit des modulations décalées (OQAM).

L'objectif de ce papier est d'évaluer des bornes minimales de tout estimateur non-biaisé de la fréquence ϕ_1 lorsque $a(n)$ est à **valeurs complexes et non-circulaire** : ainsi nous exprimons analytiquement les bornes de Cramer-Rao et les bornes de Barankin.

L'intérêt des bornes de Barankin ([2, 1]) réside dans l'analyse qu'elles permettent du phénomène de décrochement classiquement observé dans tout problème d'estimation d'harmoniques ([14, 12, 10, 5]). On peut noter qu'aucune expression analytique de la borne de Barankin n'existe dans littérature pour le problème de l'estimation d'harmoniques perturbées par un bruit multiplicatif de nature quelconque, c'est-à-dire, à valeurs complexes (circulaire ou pas) ou à valeurs réelles.

Dans la suite de l'exposé, nous supposerons comme de tradition ([8, 15]) que le bruit multiplicatif $a(n)$ est gaussien. Par souci de simplicité de calculs et de lisibilité des expressions, nous admettons que le bruit $a(n)$ est blanc, centré. Les statistiques d'ordre deux du signal $a(n)$ sont décrites par les termes $\mathbb{E}[|a(n)|^2]$ et $\mathbb{E}[a(n)^2]$. Nous supposerons par souci de simplicité que ces deux termes sont connus au niveau du récepteur.

Nous normaliserons la puissance du signal $\mathbb{E}[|a(n)|^2] = 1$. Nous observerons, dans la suite, que le terme $\rho = \mathbb{E}[a(n)^2]$, dont le module est compris entre 0 et 1 par construction, joue le rôle d'un taux de non-circularité du bruit multiplicatif.

Bien évidemment, quelques perspectives à ce travail sont envisageables : une étude similaire peut être conduite lors que les statistiques du bruit multiplicatif sont inconnues du récepteur et dépendent d'un nombre fini de paramètres réels. Lorsque le bruit est coloré, une analyse semblable peut être menée. Enfin une extension au cas d'une phase polynomiale peut être réalisée.

2 Bornes de Cramer-Rao

Soit $\Psi = [\phi_0, \phi_1]$ le vecteur de paramètres à estimer. Le vecteur $\mathbf{y} = [y(0), \dots, y(N-1)]$ contenant les N données reçues, est gaussien à valeurs complexes de moyenne nulle et admet les matrices de corrélation non-conjuguée et de corrélation conjuguée suivantes : $\mathbf{R}_y = \mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^H]$ et $\mathbf{U}_y = \mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^T]$, avec $(\cdot)^H$ et $(\cdot)^T$ les opérateurs de transconjugaison et de transposition respectivement.

Le calcul de la matrice de Fisher J associée au problème d'estimation du vecteur Ψ à partir du vecteur gaussien \mathbf{y} est bien connu pour peu que le vecteur \mathbf{y} soit à valeurs réelles [13]. Lorsque le vecteur \mathbf{y} est à valeurs complexes, les formules fournies par [13] s'étendent comme suit :

$$J_{\Psi_k, \Psi_l} = \frac{1}{2} \text{Trace} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}_y}{\partial \Psi_k} \tilde{\mathbf{R}}_y^{-1} \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}_y}{\partial \Psi_l} \tilde{\mathbf{R}}_y^{-1} \right) \quad (1)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{R}}_y = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_y & \mathbf{U}_y \\ \mathbf{U}_y & \mathbf{R}_y \end{pmatrix}$$

où $\tilde{\mathbf{R}}_y$ représente la matrice de corrélation non-conjuguée du vecteur $\tilde{\mathbf{y}} = [\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}]$ avec la barre supérieure désignant l'opérateur de conjugaison.

Comme les processus $\{a(n)\}_n$ et $\{b(n)\}_n$ sont blancs, nous obtenons les formules suivantes :

$$\mathbf{R}_y = (\mathbb{E}[|a(n)|^2] + \sigma^2) \mathbf{I}_N$$

et

$$\mathbf{U}_y = \mathbb{E}[a(n)^2] \Gamma_{\phi_0, \phi_1}^2,$$

où \mathbf{I}_N et Γ_{ϕ_0, ϕ_1} représentent respectivement la matrice-identité de taille N et la matrice $\text{diag}(e^{2i\pi(\phi_0 + \phi_1 n)}, n = 0, \dots, N-1)$.

En réunissant les égalités précédemment obtenues, nous aboutissons au résultat suivant :

$$J_{\phi_k, \phi_l} = \frac{16\pi^2 |\mathbb{E}[a(n)^2]|^2}{(\mathbb{E}[|a(n)|^2] + \sigma^2)^2 - |\mathbb{E}[a(n)^2]|^2} \sum_{n=0}^{N-1} n^{k+l} \quad (2)$$

Nous allons nous concentrer à présent uniquement sur l'obtention de l'expression asymptotique de la borne de Cramer-Rao, c'est-à-dire, lorsque le nombre de données N tend vers l'infini. L'équivalent lorsque N tend vers l'infini, de la matrice de Fisher est le suivant

$$J_{\phi_k, \phi_l} \stackrel{N \rightarrow \infty}{\approx} \frac{16\pi^2 |\mathbb{E}[a(n)^2]|^2}{(\mathbb{E}[|a(n)|^2] + \sigma^2)^2 - |\mathbb{E}[a(n)^2]|^2} \frac{N^{k+l+1}}{k+l+1}$$

Une inversion de l'équivalent de la matrice de Fisher conduit à la borne de Cramer-Rao asymptotique, notée CRB_a , suivante :

$$\text{CRB}_a(\phi_0, \phi_1) = \frac{(\mathbb{E}[|a(n)|^2] + \sigma^2)^2 - |\mathbb{E}[a(n)^2]|^2}{8\pi^2 |\mathbb{E}[a(n)^2]|^2} \times \begin{pmatrix} 2/N & -3/N^2 \\ -3/N^2 & 6/N^3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on remarque que la borne de Cramer-Rao asymptotique pour le paramètre ϕ_1 s'écrit :

$$\text{CRB}_a(\phi_1) = \frac{3 [(1 - |\rho|^2) + 2\sigma^2 + \sigma^4]}{4\pi^2 |\rho|^2 N^3} \quad (3)$$

car le bruit multiplicatif $a(n)$ est de variance-unité.

L'expression asymptotique ci-dessus conduit aux interprétations suivantes :

- Si $\rho = 0$, alors $a(n)$ est à **valeurs complexes** et **circulaire**. Les paramètres de phase ne sont pas identifiables comme dans [8]. Néanmoins, dans [8], il avait été remarqué que si le bruit multiplicatif devient coloré, alors les paramètres deviennent identifiables avec une erreur quadratique d'estimation décroissant en $\mathcal{O}(N^{-1})$.
- Si $\rho = 1$, alors $a(n)$ est à **valeurs réelles**. L'erreur quadratique d'estimation décroît en $\mathcal{O}(N^{-3})$ et la borne de Cramer-Rao est nulle en l'absence de bruit additif comme dans [8].
- Si $\rho \neq 0$ et $\rho \neq 1$, alors $a(n)$ est à **valeurs complexes** et **non-circulaire** et l'expression de la borne de Cramer-Rao est inédite. Nous remarquons que les paramètres de phase redeviennent identifiables, et que l'erreur quadratique d'estimation décroît en $\mathcal{O}(N^{-3})$. La non-circularité du bruit multiplicatif permet ainsi d'obtenir des performances comparables à celles rencontrées dans le cas d'un bruit multiplicatif à valeurs réelles. Néanmoins un effet plancher intervient pour des rapports Signal-à Bruit élevés puisque la borne de Cramer-Rao n'est pas nulle en l'absence de bruit additif sauf si $|\rho| = 1$.

3 Estimation de la fréquence ϕ_1

Lorsque le bruit multiplicatif $a(n)$ est à valeurs réelles, l'estimateur suivant de la fréquence peut être mis en place :

$$\hat{\phi}_1^{(N)} = \arg \max_{\phi \in [0, 1/2]} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n)^2 e^{-4i\pi\phi n} \right|^2 \quad (4)$$

Dans [3] notamment, il a été montré que cet estimateur, sous l'hypothèse d'un bruit $a(n)$ gaussien blanc, était asymptotiquement efficace. Bien évidemment cet estimateur ne fonctionne pas lorsque le bruit $a(n)$ est à valeurs complexes et **circulaire** puisque alors le paramètre ϕ_1 n'est pas identifiable. Pour mieux comprendre ce phénomène, il convient de considérer le processus $e(n) = y(n)^2 - \mathbb{E}[y(n)^2]$ qui est de moyenne nulle et donc assimilable à du bruit.

$$\begin{aligned} y(n)^2 &= \mathbb{E}[a(n)^2] e^{4i\pi(\phi_0 + \phi_1 n)} + e(n) \\ &= \rho e^{4i\pi(\phi_0 + \phi_1 n)} + e(n) \end{aligned} \quad (5)$$

Lorsque $\rho = 0$, le signal $y(n)^2$ se réduit au bruit $e(n)$ qui ne contient pas d'information sur la fréquence ϕ_1 . Il convient aussi de remarquer que dès que $\rho \neq 0$, c'est-à-dire, dès que $a(n)$ est

non-circulaire, le signal $y(n)^2$ correspond à une harmonique de fréquence $2\phi_1$ bruitée additivement. C'est pourquoi l'estimateur décrit en (4) fonctionne pour des bruits multiplicatifs non-circulaires comme déjà mentionné dans [4]. En comparant la formule (3) et la covariance asymptotique de l'estimateur $\hat{\phi}_1^{(N)}$ calculée dans [4], on observe que l'estimateur continue d'être asymptotiquement efficace pour un bruit multiplicatif à valeurs complexes et non-circulaire.

La fonction à maximiser pour obtenir $\hat{\phi}_1^{(N)}$ n'étant notoirement pas convexe, un des moyens possibles pour obtenir algorithmiquement le maximum global de cette fonction, est de procéder en deux étapes ([14]) :

- une étape dite *grossière* permettant de détecter le pic autour de la valeur de fréquence ϕ_1 . Cette étape balaie tout l'intervalle de recherche et est réalisée par le biais d'une Transformée de Fourier discrète.
- une étape dite *fine* qui examine la fonction de coût uniquement autour du pic détecté par l'étape précédente. Un algorithme du gradient permet de mettre en place cette étape.

D'après l'équation (1), la borne de Cramer-Rao ne dépend que des dérivées des corrélations et des corrélations elles-mêmes calculées au vrai point. C'est pourquoi, la borne de Cramer-Rao n'est une borne minimale pertinente que pour l'étape fine pour peu que l'étape grossière aie réussie. Pour obtenir une borne minimale judicieuse de performances du procédé complet d'estimation (intégrant l'étape grossière de recherche sur l'intervalle entier), on peut songer aux bornes de Barankin.

4 Bornes de Barankin

Les bornes de Barankin ([2]) d'ordre infini correspondent aux plus grandes bornes minimales de la covariance de tout estimateur non-biaisé de paramètres déterministes inconnus. Traditionnellement, pour des raisons de complexité d'implémentation, seules les bornes de Barankin d'ordre 2 sont étudiés ([12, 10, 5]). Elles sont alors définies comme suit

$$\text{BB}(\phi_0, \phi_1) = \sup_{\varepsilon_0, \varepsilon_1} S(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$$

avec

$$S(\varepsilon_0, \varepsilon_1) = \mathbf{P}(\mathbf{B}(\varepsilon_0, \varepsilon_1) - \mathbf{1}\mathbf{1}^T)^{-1} \mathbf{P}^T$$

où $\mathbf{P} = \text{diag}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ s'appelle une matrice de points-tests (en l'occurrence 2 points-tests). On note $\mathbf{1} = [1, 1]^T$, et $\mathbf{B}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ une matrice 2×2 dont les entrées valent

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{0,0} &= \mathbb{E} \left[\frac{p(\mathbf{y}|\phi_0 + \varepsilon_0, \phi_1)^2}{p(\mathbf{y}|\phi_0, \phi_1)^2} \right], \\ \mathbf{B}_{0,1} &= \mathbf{B}_{1,0} = \mathbb{E} \left[\frac{p(\mathbf{y}|\phi_0 + \varepsilon_0, \phi_1)p(\mathbf{y}|\phi_0, \phi_1 + \varepsilon_1)}{p(\mathbf{y}|\phi_0, \phi_1)^2} \right], \\ \mathbf{B}_{1,1} &= \mathbb{E} \left[\frac{p(\mathbf{y}|\phi_0, \phi_1 + \varepsilon_1)^2}{p(\mathbf{y}|\phi_0, \phi_1)^2} \right] \end{aligned}$$

avec $p(\mathbf{y}|\phi)$ désignant la densité de probabilité de \mathbf{y} sachant ϕ .

La borne de Cramer-Rao a pour valeur $\lim_{(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \rightarrow 0} S(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ ce qui confirme que cette borne ne permet d'évaluer que des phénomènes proches du point recherché et donc ne fournit des bornes fiables que lorsque les estimateurs ont suffisamment convergés autour du point-cible. En revanche, comme les bornes de Barankin inspectent les rapports de vraisemblance pour tous

les points de l'intervalle de recherche, les valeurs fournies par ces bornes constituent des minimums de performances pertinents pour l'estimation, c'est-à-dire, même lorsque les estimateurs n'ont pas encore convergés dans le voisinage du paramètre recherché.

Après quelques manipulations algébriques basées sur la distribution de Wishart ([9, 11]), nous avons prouvé que les éléments $\mathbf{B}_{k,l}$ permettant d'obtenir la borne de Barankin s'expriment de la manière suivante :

$$\mathbf{B}_{k,l} = \begin{cases} 1/\sqrt{\det(\mathbf{Q}_{k,l})} & \text{si } \mathbf{Q}_{k,l} > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\text{où } \begin{cases} \mathbf{Q}_{0,0} = 2\tilde{\mathbf{R}}_{\phi_0+\varepsilon_0, \phi_1}^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_{\phi_0, \phi_1} - \mathbf{Id}_{2N} \\ \mathbf{Q}_{0,1} = \mathbf{Q}_{1,0} = (\tilde{\mathbf{R}}_{\phi_0+\varepsilon_0, \phi_1}^{-1} + \tilde{\mathbf{R}}_{\phi_0, \phi_1+\varepsilon_1}^{-1}) \tilde{\mathbf{R}}_{\phi_0, \phi_1} - \mathbf{Id}_{2N} \\ \mathbf{Q}_{1,1} = 2\tilde{\mathbf{R}}_{\phi_0, \phi_1+\varepsilon_1}^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_{\phi_0, \phi_1} - \mathbf{Id}_{2N} \end{cases}$$

avec

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\psi_0, \psi_1} = \begin{pmatrix} (1 + \sigma^2)\mathbf{Id}_N & \rho\Gamma_{\psi_0, \psi_1}^2 \\ (\rho\Gamma_{\psi_0, \psi_1}^2)^H & (1 + \sigma^2)\mathbf{Id}_N \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\psi_0, \psi_1}^{-1} = \frac{1}{(1 + \sigma^2)^2 - |\rho|^2} \begin{pmatrix} (1 + \sigma^2)\mathbf{Id}_N & -\rho\Gamma_{\psi_0, \psi_1}^2 \\ -(\rho\Gamma_{\psi_0, \psi_1}^2)^H & (1 + \sigma^2)\mathbf{Id}_N \end{pmatrix}.$$

La borne de Barankin pour le seul paramètre ϕ_1 se simplifie comme suit ([12])

$$\text{BB}(\phi_1) = \sup_{\varepsilon_0, \varepsilon_1} \frac{\varepsilon_1^2}{(\mathbf{B}_{1,1} - 1) - (\mathbf{B}_{0,1} - 1)(\mathbf{B}_{0,0} - 1)^{-1}(\mathbf{B}_{0,1} - 1)}$$

Grâce à l'expression précédente de la borne de Barankin, nous sommes en mesure de la calculer numériquement.

5 Simulations

Lors des simulations, nous avons construit, par souci de simplicité, un processus $a(n)$ admettant un taux de non-circularité ρ réel. Ceci signifie que la partie réelle et la partie imaginaire de $a(n)$ sont décorréélées entre elles (donc indépendantes puisque gaussiennes). En revanche les variances des parties réelle et imaginaire sont différentes ce qui induit justement la non-circularité du signal $a(n)$.

Sur la figure 1, nous avons tracé, d'une part, l'erreur quadratique moyenne empirique de l'estimateur (4) et, d'une part, l'erreur d'estimation commise lorsque l'initialisation de l'étape fine est forcée par nous-mêmes à être correcte, en fonction du Rapport Signal-à-Bruit (RSB) (avec $\rho = 0, 25, \rho = 1$ et $N = 128$). Nous avons fait figurer de plus les bornes de Barankin et de Cramer-Rao.

Sur la figure 2, nous avons reporté les mêmes critères de performances que ceux de la figure 1 en fonction de N (avec $\rho = 0, 25, \rho = 1$ et RSB = 10dB).

Sur la figure 3, nous avons tracé les mêmes erreurs et les mêmes bornes en fonction du taux de non-circularité ρ (avec RSB = 10dB et $N = 128$).

Les bornes de Barankin montrent que l'effet de décrochement est inhérent au problème d'estimation d'harmoniques dans un bruit multiplicatif. Nous remarquons que les performances se dégradent rapidement en fonction du taux de circularité. En effet, si ρ est proche de 0 (à partir de $\rho \approx 0, 3$), alors une estimation correcte de la fréquence s'avère impossible.

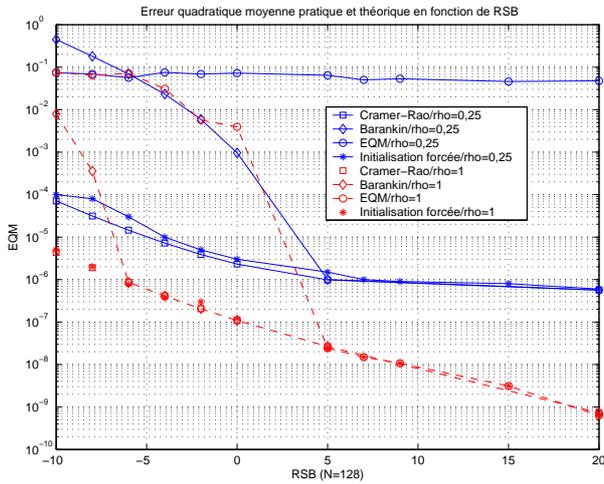


FIG. 1 – Erreur Quadratique Moyenne en fonction de RSB

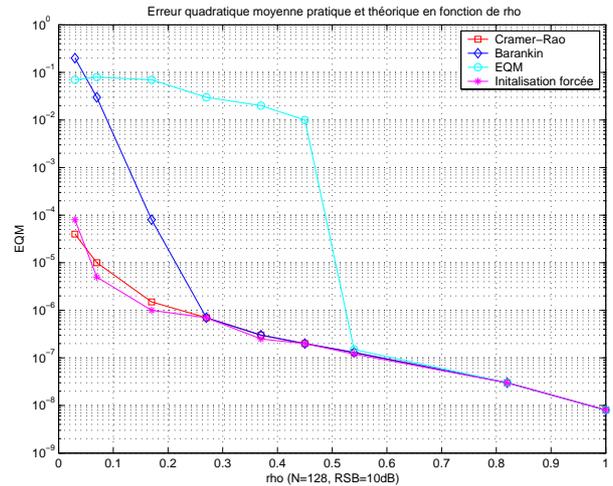


FIG. 3 – Erreur Quadratique Moyenne en fonction de ρ

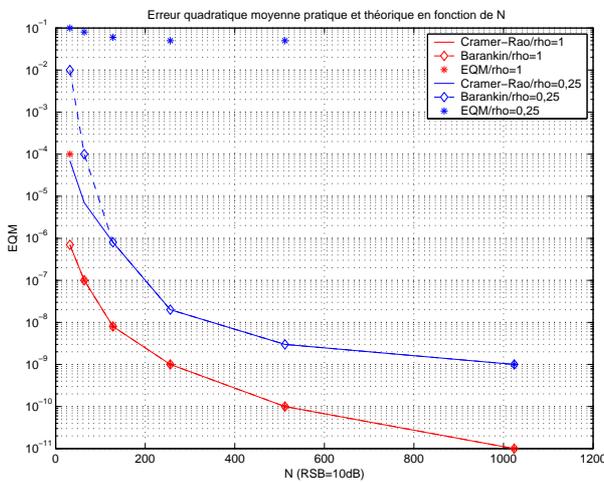


FIG. 2 – Erreur Quadratique Moyenne en fonction de N

Références

- [1] R.J. MC AULAY et E.M. HOFSTETTER, « Barankin bounds on parameter estimation », *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 17, n° 6, p. 669–676, Novembre 1971.
- [2] E.W. BARANKIN, « Locally best unbiased estimates », *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 20, p. 447–501, 1949.
- [3] O. BESSON et P. STOICA, « Nonlinear least-squares approach to frequency estimation and detection for sinusoidal signals with arbitrary envelope », *Digital Signal Processing*, vol. 9, n° 1, p. 45–56, Janvier 1999.
- [4] PH. CIBLAT, PH. LOUBATON, E. SERPEDIN et G.B. GIANNAKIS, « Performance of blind carrier offset estimation for non-circular transmissions through frequency-selective channels », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 50, n° 9, p. 2295–2305, Septembre 2002.
- [5] P. FORSTER et P. LARZABAL, « On lower bounds for deterministic parameter estimation », *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, p. 1137–1140, Orlando (FL), Mai 2002.
- [6] J. FRANCOIS et B. FRIEDLANDER, « Bounds for estimation of complex exponentials in unknown colored noise », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 43, n° 9, p. 2176–2185, Septembre 1995.
- [7] M. GHOGHO, A.K. NANDI et A. SWAMI, « Cramer-Rao bounds and maximum likelihood estimation for random amplitude phase-modulated signals », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 47, n° 11, p. 2905–2916, Novembre 1999.
- [8] M. GHOGHO, A. SWAMI et T.S. DURRANI, « Frequency estimation in the presence of Doppler spread : performance analysis », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, n° 4, p. 777–789, Avril 2001.
- [9] P. GRACZYK, G. LETAC et H. MASSAM, « The complex Wishart distribution and the symmetric group », *Annals of Statistics*, to appear in.
- [10] L. KNOCKAERT, « The Barankin bound and threshold behavior in frequency estimation », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, p. 2398–2401, Septembre 1997.
- [11] D. MAIWALD et D. KRAUS, « Calculation of moments of complex Wishart and complex inverse Wishart distributed matrices », *IEE Proceedings in Radar Sonar Navigation*, vol. 147, p. 162–168, Août 2000.
- [12] H. MESSER, « Source localization performance and the array beampattern », *Signal Processing*, vol. 28, n° 2, p. 163–181, Août 1992.
- [13] B. PORAT, *Digital Signal Processing of Random Signals*, Prentice Hall, 1994.
- [14] D.C. RIFE et R.R. BOORSTYN, « Single-tone parameter estimation from discrete-time observations », *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 20, n° 5, p. 591–598, Septembre 1974.
- [15] G. ZHOU et G.B. GIANNAKIS, « Harmonics in gaussian multiplicative and additive white noise : Cramer-Rao bounds », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 43, p. 1217–1231, Mai 1996.