

Extensions de la SVD aux données multidimensionnelles : Application à la séparation de sources

J. MARS¹, N. LE BIHAN¹, V. VRABIE¹²

¹Laboratoire des Images et des Signaux, Rue de la Houille Blanche, BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex

²Laboratorul de Analiza si Prelucrarea Imaginilor, Facultatea de Electronica, Universitatea Politehnica Bucuresti.
Jerome.Mars@lis.inpg.fr, Nicolas.Le-Bihan@lis.inpg.fr, Valeriu.Vrabie@lis.inpg.fr

Résumé – Dans de nombreux domaines d'application on utilise des données multidimensionnelles (cube de données, enregistrements multicomposantes), mais peu d'outils de séparation de sources prennent en compte la multidimensionnalité de ces données. A partir du filtrage SVD (méthode reconnue en séparation de sources), nous présentons quelques extensions de cette technique prenant en compte cet aspect multidimensionnel. Une extension présentée combine la SVD et l'ICA et permet d'améliorer la séparation de sources en proposant une contrainte d'orthogonalité moins forte sur les vecteurs de propagation. Une deuxième extension concerne la définition d'une méthode de filtrage purement multidimensionnelle ; la 3D SVD et la SVD Quaternionique. Des illustrations synthétiques et réelles sont présentées.

Abstract – In many fields as telecommunications, geophysics, remote sensing, multi-component datas (or 3D dataset) are collected. To separate recorded sources, we intensively use 2D filters as SVD filters, working. We present here some extensions based on the classical Singular Value Decomposition. The first part of this paper allows to enhance wavefield separation by using jointly SVD and ICA techniques. Second part is dedicated to the formulation of the 3D SVD and to the Quaternionic SVD. These two techniques are completely devoted to the multicomponent dataset. Real and synthetic examples are presented.

1. Introduction

Le filtrage basé sur la décomposition en valeurs singulières (Singular Value Decomposition) est appliqué classiquement et depuis de nombreuses années aux données 2D pour la séparation de sources et/ou l'amélioration du rapport signal sur bruit des données [3], [4] et ce dans de nombreux domaines d'application (imagerie, géophysique, acoustique sous-marine, télédétection, etc). A partir d'une image 2D, le principe de ce filtrage SVD consiste à trouver un espace de dimension le plus faible possible dans lequel les sources seront caractérisées. Ce filtrage décompose l'image initiale en deux sous-espaces orthogonaux appelés sous-espace signal et sous-espace bruit. Après un rappel de la formulation de la SVD, nous présentons une amélioration de ce filtrage par utilisation des statistiques d'ordre supérieur. La condition d'orthogonalité engendrée par la SVD force les ondelettes normalisées à être un mélange de source et amène des erreurs dans les sous-espaces estimés. Pour atténuer cette contrainte, nous exploitons le principe de l'analyse en composantes indépendantes (ICA) utilisée pour la séparation aveugle de sources. En introduisant le concept d'indépendance des signaux, on propose une nouvelle écriture du filtrage combinant la SVD et l'ICA. Ceci permet d'obtenir une nouvelle matrice des ondelettes normalisées statistiquement indépendantes à l'ordre quatre ayant pour conséquence de détendre la contrainte d'orthogonalité des vecteurs de propagation. L'amélioration de l'estimation des sous-espaces signal et bruit par cette méthode conjointe SVD-ICA est présentée sur données synthétiques et réelles. La deuxième partie de cet article est consacrée à la formulation de la SVD appliquée aux données de structure supérieure à 2 dimensions (cube de données et/ou donnée multicomposantes). Dans un

grand nombre de domaines, ces signaux sont générés à partir de réseaux d'antenne (cube 3D) ou d'une antenne comportant des capteurs multidimensionnels (enregistrement d'un même phénomène dans plusieurs dimensions spatiales et/ou fréquentielles). Nous proposons une formulation du filtrage par SVD étendu à des données à trois dimensions soit par l'intermédiaire de la 3DSVD, soit par une nouvelle approche basée sur l'utilisation des quaternions (Q-SVD). Chacune des nouvelles extensions de la SVD sera illustrée.

2. Rappel sur la SVD Classique

Les signaux reçus sur une antenne composée d'un ensemble de capteurs simples et équidistants s'écrivent dans une matrice réelle \underline{w} de dimension (N_x, N_t) où une ligne est fonction du temps et une colonne représente les variations d'amplitude à un temps donné en fonction de la distance x . La SVD de cette matrice \underline{w} est une factorisation en un produit de deux matrices orthogonales \underline{u} et \underline{v} et d'une matrice pseudo-diagonale $\underline{\lambda}$ décrite par :

$$\underline{w} = \underline{u} \underline{\lambda} \underline{v}^T = \sum_{k=1}^N \lambda_k \underline{u}_k \underline{v}_k^T \quad (1)$$

Les éléments λ_k de $\underline{\lambda}$ sont les valeurs singulières rangées par ordre décroissant. N est le rang de la matrice \underline{w} . La matrice orthogonale $\underline{u} = [\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k, \dots, \underline{u}_{N_x}]$ de dimension (N_x, N_x) est composée par les vecteurs singuliers gauches (vecteurs propres de $\underline{w}\underline{w}^T$). La matrice orthogonale \underline{v} de dimension (N_t, N_t) est composée par les vecteurs singuliers droits (vecteurs propres de $\underline{w}^T \underline{w}$). Le produit $\underline{u}_k \underline{v}_k^T$ est une matrice unitaire dénommée $k^{\text{ème}}$ image ou section singulière. En notant $\underline{u}_k = [u_{k1}, \dots, u_{ki}, \dots, u_{kN_x}]^T$ et $\underline{v}_k = [v_{k1}, \dots, v_{kj}, \dots, v_{kN_t}]^T$, la donnée reçue sur le $i^{\text{ème}}$ capteur à l'instant j est :

$$x_{ij} = \lambda_k u_{ki} \cdot v_{kj} \quad (2)$$

Les valeurs v_{kj} caractérisent la dépendance en fonction du temps de la $k^{\text{ième}}$ section singulière (\underline{v}_k est appelé ondelette normalisée). Les valeurs u_{ki} caractérisent les variations d'amplitude de l'onde normalisée \underline{v}_k . Le vecteur \underline{u}_k est appelé vecteur de propagation. Le filtrage par SVD décompose la section initiale \underline{w} en N matrices de même dimension, pondérées par les valeurs singulières λ_k . Au regard des variations des valeurs singulières, cette décomposition sépare \underline{w} en un sous-espace signal $\underline{w}^{\text{sig}}$ donné par les P premières sections singulières et un sous-espace bruit $\underline{w}^{\text{bruit}}$ caractérisé par les autres $N-P$ sections singulières par la relation :

$$\underline{w} = \sum_{k=1}^P \lambda_k \underline{u}_k \underline{v}_k^T + \sum_{j=P+1}^N \lambda_j \underline{u}_j \underline{v}_j^T \quad (3)$$

$$\underline{w} = \underline{w}^{\text{sig}} + \underline{w}^{\text{bruit}} \quad (4)$$

Sur la figure 1A, l'image sans bruit comporte deux ondes de vitesse infinie, de même amplitude selon x et arrivant à deux instants différents. Une seule valeur singulière est significative (fig. 1B), les autres étant à zéro. Le vecteur \underline{v}_1 caractérise l'ondelette normalisée dominante (fig. 1C). Les autres ondelettes sont incohérentes. Seul \underline{u}_1 est significatif (fig. 1D). Le sous-espace signal construit avec $\lambda_1 \underline{u}_1 \underline{v}_1^T$ reconstitue l'image de départ.

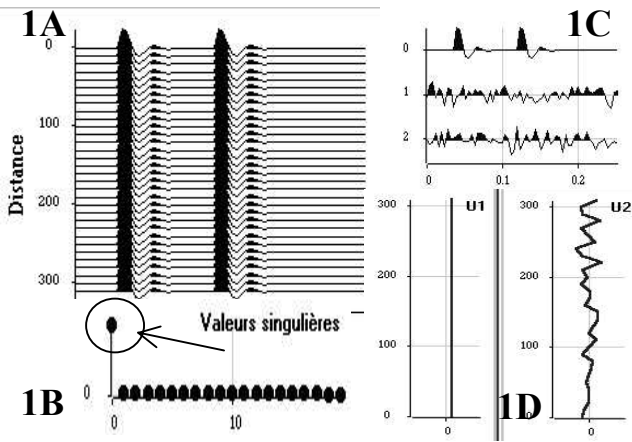


Fig.1 : Filtrage SVD (une source sans bruit).

Dans le cas d'une source (fig. 2.A) sans bruit de vitesse infinie mais présentant un déphasage entre capteurs, la construction de l'espace signal nécessite les deux premières sections singulières (fig. 2B).

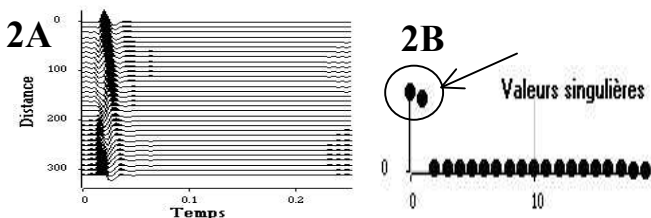


Fig. 2 : Filtrage SVD (une source déphasée sans bruit).

Dans le cas d'une source (fig. 3.A) sans bruit, mais de vitesse non infinie, la construction de l'espace signal nécessite l'ensemble de toutes les sections singulières. En effet, l'étude des valeurs singulières montre une décroissance régulière des λ_k sans seuil particulier (fig. 3B). Cela a pour conséquence qu'un pré-traitement par recalage est nécessaire.

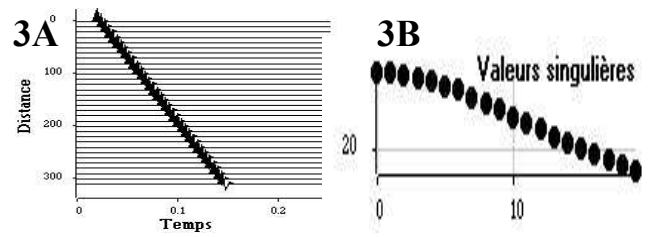


Fig. 3 : Filtrage SVD (une source sans bruit décalée).

Dans le cas d'une source de vitesse infinie bruitée (fig. 4A), la séparation ne nécessite qu'une seule valeur singulière pour le caractériser le sous-espace signal (fig. 4B). Le sous-espace bruit ne présente aucun alignement particulier (fig. 4C).

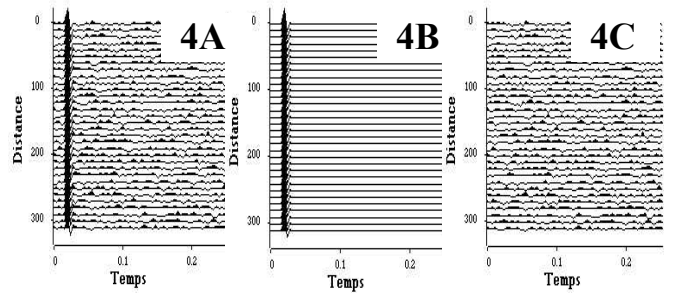


Fig. 4 : Filtrage SVD (une source bruitée).

3. SVD-ICA

Après une SVD, lorsque plusieurs ondes sont présentes, il n'y a aucune raison physique pour que ces ondes aient des vecteurs de propagation orthogonaux. Cette condition d'orthogonalité force les ondelettes normalisées à être un mélange des ondes source et amène souvent des erreurs dans les sous-espaces estimés. Exploitant le concept de l'analyse en composantes indépendantes (ICA), nous calculons une autre matrice des ondelettes normalisées statistiquement indépendantes à l'ordre quatre. Ceci a pour conséquence de «détendre» la contrainte d'orthogonalité et donc d'améliorer la qualité des sous-espaces estimés. On cherche une nouvelle matrice orthogonale $[\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_P] = \underline{b} = \underline{v} \underline{D}$, pour laquelle les nouvelles ondelettes normalisées \underline{b}_k sont les plus indépendantes possibles à l'ordre 4 [9]. $\underline{w}^{\text{sig}}$ va se réécrire :

$$\underline{w}^{\text{sig}} = \underline{u} \underline{\lambda} \underline{v}^T = \underline{u} \underline{\lambda} \underline{D} \underline{D}^T \underline{v}^T = \underline{C} \underline{b}^T \quad (5)$$

La matrice de rotation \underline{D} de dimension (P,P) sera donnée par la diagonalisation de la famille des cumulants de \underline{v} [1]. \underline{C} se décompose en deux matrices \underline{a} et $\underline{\Sigma}$, avec $\underline{a} = [\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_P]$, les nouveaux vecteurs de propagation non orthogonaux et $\underline{\Sigma}$ une matrice diagonale. Les éléments σ_k de cette matrice diagonale n'étant pas ordonnés, une permutation entre les colonnes de \underline{a} ainsi que celle de \underline{b} est nécessaire. La décomposition est :

$$\underline{w}^{\text{sig}} = \underline{a} \underline{\Sigma} \underline{b}^T \quad (6)$$

Pour séparer les ondes ayant un fort degré de corrélation inter-capteurs, nous définissons un nouveau sous-espace passe-bas $\underline{w}^{\text{sigPB}}$ associé aux premières valeurs singulières Q les plus fortes parmi les P donnant le sous-espace signal. Le sous-espace des résidus $\underline{w}^{\text{bruit}}$ qui reste après cette extraction contient les ondes avec un faible degré de corrélation inter-

capteurs et le bruit. En utilisant la SVD-ICA, le sous-espace signal et le sous-espace bruit seront donnés par :

$$\underline{\underline{w}} = \sum_{k=1}^Q \sigma_k \underline{\underline{a}}_k \underline{\underline{b}}_k^T + \sum_{j=Q+1}^P \sigma_j \underline{\underline{a}}_j \underline{\underline{b}}_j^T + \sum_{j=P+1}^N \lambda_j \underline{\underline{u}}_j \underline{\underline{v}}_j^T \quad (7)$$

La figure 5 présente une comparaison entre SVD et SVD-ICA sur données synthétiques. Les données initiales (fig.5C) sont issues de l'addition d'un modèle de source (fig.5A) et d'un modèle de bruit (fig.5B). Après SVD, l'espace signal (fig. 5.E) est caractérisé par troncature de rang 1. Cet espace ne permet de restituer le modèle source car l'ondelette trouvée par SVD est perturbée par le bruit (voir cercle fig. 5G). La SVD-ICA est calculée à partir des 8 premières valeurs singulières (fig. 5K). La nouvelle ondelette trouvée (fig.5J) n'est plus perturbée par le bruit. La troncature de rang 1 caractérise alors un espace signal (fig.5H) et un espace bruit (fig.5I) proche des modèles sources et bruit initiaux.

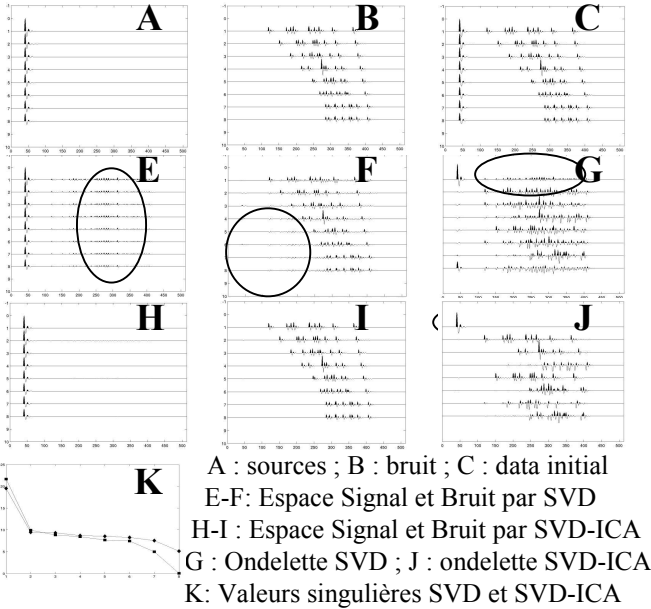


Fig.5 : Comparaison SVD et SVD-ICA : data synthétique

4. Extension aux données 3D

Nous présenterons une extension de la SVD aux données 3D (cubes). Cet outil, nommé 3DSVD est introduit par De Lathauwer [2] pour la séparation de sources sous l'appellation HOSVD (High Order SVD). Il permet une analyse en éléments singuliers d'un volume de données tridimensionnel. Pour un tableau 3D, il existe trois produits n-modaux suivant les trois directions du tableau. Par définition, le n-mode produit suivant la dimension n, d'un tableau $\underline{\underline{A}}$, par une matrice $\underline{\underline{B}}$, est noté $\underline{\underline{A}} \times_n \underline{\underline{B}}$. Il existe trois versions possibles (n=1,2 et 3) pour le produit d'un tableau 3D et d'une matrice. Il est possible d'obtenir, en découpant le cube par tranches suivant les trois modes du tableau, trois matrices dépliantes $\underline{\underline{A}}_{(1)}$, $\underline{\underline{A}}_{(2)}$, $\underline{\underline{A}}_{(3)}$ (versions matricielles du cube). En adoptant ce formalisme, la décomposition SVD se réécrit comme:

$$\underline{\underline{w}} = \hat{\lambda} \times_1 \underline{\underline{u}} \times_2 \underline{\underline{v}} \quad (8)$$

Dans le cas 3D, $\underline{\underline{w}}$ se décomposera en $\underline{\underline{C}} \times_1 \underline{\underline{u}}_1 \times_2 \underline{\underline{u}}_2 \times_3 \underline{\underline{u}}_3$ où les trois matrices orthogonales $\underline{\underline{u}}_1$, $\underline{\underline{u}}_2$ et $\underline{\underline{u}}_3$ sont les matrices

gauches obtenues à partir de la SVD des matrices dépliantes $\underline{\underline{w}}_{(1)}$, $\underline{\underline{w}}_{(2)}$, $\underline{\underline{w}}_{(3)}$. $\underline{\underline{C}}$ est le tableau, de dimension N_x, N_y, N_t , contenant l'équivalent des valeurs singulières. La 3DSVD permet de séparer un cube de données en un sous-espace signal et un sous-espace bruit [5]. La troncature en deux sous-espaces est alors légèrement plus complexes car il faut réaliser une approximation de rang sur les trois matrices $\underline{\underline{u}}_1$, $\underline{\underline{u}}_2$ et $\underline{\underline{u}}_3$. Cette méthode a donné d'excellents résultats sur des cubes de données de sismique pétrolière notamment [7 ; 9].

5. SVD Quaternionique

Nous proposons également une nouvelle modélisation des données 3D et/ou 4D basée sur l'utilisation des quaternions (nombre formé d'une partie réelle et de trois parties imaginaires tel que $q = a + bi + cj + dk$ où a, b, c et d sont des réels et les nombres i, j et k des nombres imaginaires obéissant à certaines lois [8]. Cette approche a été proposée initialement par Le Bihan [5 ;6] et s'inspire de la modélisation proposée par Sangwine [8] pour le traitement des images couleur. Les signaux multicomposantes (3 ou 4D) sont des signaux dont chaque échantillon est un quaternion. Afin d'étendre la SVD aux matrices de quaternions, nous introduisons des notations complexes pour les vecteurs et matrices de quaternions. Cette opération permet de ramener le problème de la diagonalisation d'une matrice de quaternions à celui de la diagonalisation d'une matrice complexe. La décomposition d'une matrice de quaternions en valeurs singulières a été formulée par Zhang [10]. Toute matrice de quaternions $\underline{\underline{A}}$, de rang r, admet une décomposition telle que :

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}} \begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\underline{V}}^\# \quad (9)$$

où $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{V}}$ sont des matrices unitaires quaternioniques, c'est à dire que $\underline{\underline{V}}\underline{\underline{V}}^\# = 1$ et $\underline{\underline{U}}\underline{\underline{U}}^\# = 1$ avec l'opérateur # désignant la transposition et la conjugaison quaternionique. Cette décomposition exprime la matrice quaternionique en une somme de matrices quaternioniques de rang 1. Elle peut se réécrire sous la forme :

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^r \underline{\underline{u}}_i \underline{\underline{v}}_i^\# \mathbf{d}_i \quad (10)$$

où les $\underline{\underline{u}}_i$ et les $\underline{\underline{v}}_i$ sont les vecteurs singuliers quaternioniques gauches et droits, correspondant aux colonnes de $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{V}}$. Les \mathbf{d}_i sont les valeurs singulières (réelles) de $\underline{\underline{A}}$. Il est possible de calculer la Q-SVD (Quaternionic SVD) à l'aide des algorithmes classiques de SVD complexe et de faire une réduction d'espace de façon analogue à la SVD classique.

6. Applications

Pour illustrer les différentes extensions, nous présentons quelques applications. Le premier exemple a pour but de comparer les deux méthodes SVD et SVD-ICA. Une section sismique est représentée (fig. 6A) après mise à plat de l'arrivée directe. On se propose de séparer les ondes à vitesse apparente infinie des autres ondes. La figure 6B montre la section des résidus de la SVD classique (différence entre la section initiale et les deux premières sections singulières issues de la SVD classique caractérisant les ondes à vitesse

infinie et non représentées ici). La figure 6.C montre les résultats de la section des résidus obtenus par la méthode SVD-ICA avec $P=5$ et $Q=2$. Les figures 6.D et E montrent respectivement la décroissance de toutes les valeurs singulières de la SVD classique et de la SVD-ICA. L'analyse des valeurs singulières de la SVD-ICA met clairement en évidence le fait que deux sections propres soient nécessaires et suffisantes pour caractériser le sous-espace signal. La comparaison des sections des résidus montre que la SVD-ICA est plus efficace que la SVD classique. L'onde à vitesse apparente infinie a pratiquement disparu sur la section des résidus issue de la SVD-ICA, alors qu'elle est encore présente sur la section des résidus issue de la SVD classique.

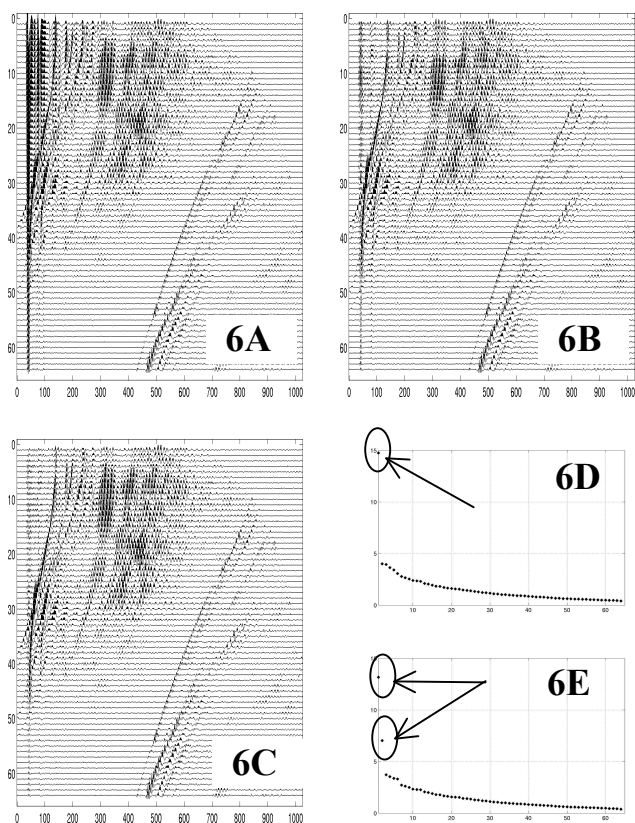


Fig.6 : Comparaison SVD et SVD-ICA : Données réelles
 A : Données initiales ; B : sous-espace signal par SVD
 C : Sous-espace signal par SVD-ICA ; D : Valeurs singulières par SVD; E: Valeurs singulières par SVD-ICA

Nous montrons l'efficacité de la méthode Q-SVD pour l'amélioration du rapport signal sur bruit. Nous prenons le cas de deux ondes dispersives et de polarisation elliptique enregistrée sur un réseau de 10 capteurs à trois composantes identifiés comme des quaternions purs. Les trois sections sismiques sont présentées respectivement en figure 7A. Les sous-espaces signal obtenus à partir de la première valeur singulière issue respectivement de la SVD et de la Q-SVD sont présentées en figure 7B et C. L'estimation de l'onde verticale n'est pas parfaitement restituée pour la SVD. Par contre, cette onde est correctement estimée par Q-SVD.

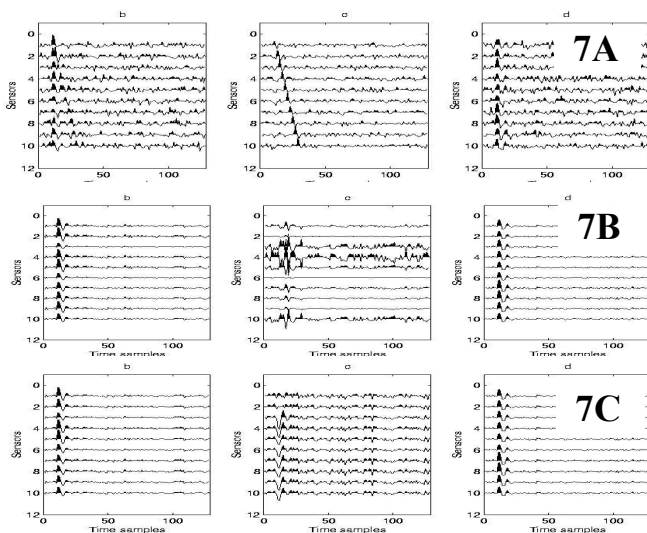


Fig.7 : Comparaison SVD et Q-SVD : A : données initiales (3 composantes) ; B : Sous-espace signal par SVD (1 valeur singulière) ; C : Sous-espace signal par Q-SVD (1 valeur singulière).

7. Conclusions

Nous avons présenté quelques extensions du filtrage SVD pour la séparation de source. L'association SVD-ICA utilisant des SOS permet d'améliorer l'estimation du sous-espace signal. Pour des données multidimensionnelles, le filtrage SVD à trois dimensions (3DSVD) est facilement réalisable par des outils matriciels classique. Nous présentons également une écriture de la SVD pour des données 3D et/ou 4D par l'introduction du modèle quaternionique.

Références

- [1] P. Comon, *Independent Component Analysis, A new Concept?*, Signal Processing, Special Issue HOS, 36, 3, 1994, pp. 287-314.
- [2] L. De Lathauwer, 1997, *Signal Processing based on multilinear algebra*, Ph.D thesis, Leuven Katholic Univer.
- [3] S.L.M. Freire, T.J. Ulrych, *Application of Singular Value Decomposition to Vertical Seismic Profiling*, Geophysics, 53, 1988, pp. 778-785.
- [4] V.C. Klema, A.J. Laub, *The Singular Value Decomposition: its Computation and Some Applications*, IEEE. Trans on Auto. Control, 25, No. 2, 1980, pp. 164-176.
- [5] N. Le Bihan, *Traitement algébrique des signaux vectoriels. Application en séparation d'ondes sismiques*, Thèse de doctorat, INPG, 2001.
- [6] N. Le Bihan et S. J. Sangwine, *Analyse de signaux vectoriels basée sur le modèle quaternionique*, Grestsi 2003.
- [7] J. Mars, F. Glangeaud, J.L. Mari et J.L. Lacoume, *Traitement du Signal en géosciences, Techniques Avancées*, CD-ROM, Editions technip, 2003.
- [8] S. Sangwine, *Fourier transforms of colour images using quaternions, or hypercomplex, numbers*, Electronics Letters, 32, (21), 1996, 1979-1980.
- [9] V. Vrabie, N. Le Bihan N. and J.I. Mars, 2002, *3DSVD and Partial ICA for 3D arrays sensors*, 72nd Meeting of Soc. of Exploration geophysicists, Salt Lake City, Exp. Abstract.
- [10] F. Zhang, *Quaternions and matrices of quaternions*, Linear algebra and its applications, 251: 21-57, 1997.