

Analyse de signaux vectoriels basée sur le modèle quaternionique

Nicolas LE BIHAN¹, Stephen J. SANGWINE²

¹Laboratoire des Images et des Signaux, UMR 5083 CNRS/OSUG/UJF/INPG, ENSIEG, BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France

²University of Essex, Department of Electronic Systems Engineering, Wivenhoe Park, Colchester, United Kingdom
nicolas.le-bihan@lis.inpg.fr, sjs@essex.ac.uk

Résumé – L'utilisation du modèle quaternionique pour les images et signaux vectoriels autorise la définition de l'Analyse en Composantes Principales (ACP) Quaternionique. Sa définition et quelques propriétés sont présentées. Une comparaison avec le modèle tensoriel (d'ordre 3) est également donnée. En s'appuyant sur les résultats de la HOSVD (ACP trimodale) et de l'ACP Quaternionique sur un exemple d'image couleur, la pertinence du modèle quaternionique à rendre compte du contenu couleur des images est mise en évidence. Au prix d'une interprétation géométrique plus difficile, l'ACP Quaternionique se révèle plus facile d'emploi et autorise la généralisation de notions algébriques simples pour l'analyse des signaux vectoriels (telles que le rang) que n'autorise pas l'approche tensorielle.

Abstract – Using a quaternion model for vector signals and images, it is possible to define the Quaternionic Principal Component Analysis (PCA). Its definition and basic properties are given. Also, a comparison with a 3rd order tensor model is investigated. The fact that the quaternionic model is more accurate for colour (and so vector) images than the tensor model is illustrated on a colour image example. Despite a more complicated geometrical interpretation, the Quaternionic PCA is much easier to manipulate and allows the generalisation of simple linear algebra (such as rank) for vector signal and images analysis. Such concepts are sometimes not accessible via the tensor model.

1 Introduction

Lors d'acquisition de certains signaux, l'information portée par l'onde se déplaçant dans le milieu apparaît dans les différentes dimensions du système de mesure. Un capteur scalaire isolé nous renseigne sur le comportement au cours du temps du signal enregistré (signal 1D). Le déploiement d'un ensemble de capteurs permet d'avoir accès au comportement spatial (2D) des signaux. Un réseau bidimensionnel rendra une image 2D, à plusieurs instants, du milieu observé (signal 3D). Ce raisonnement s'étant aisément à N dimensions.

Dans certains types d'acquisition, la quantité transportée par le signal est intrinsèquement vectorielle. Cette nature spéciale du signal peut avoir différentes origines. Principalement, c'est la nature de la source ou celle du milieu qui détermine celle du signal. Par exemple en optique, le comportement de la lumière est correctement appréhendé sous condition de considérer sa nature vectorielle. C'est également le cas en électromagnétisme ou en sismologie, ainsi qu'en sismique.

Dans tous ces domaines, le support des ondes (lumineuses, électromagnétiques ou élastiques) est par nature vectoriel. La source est par nature vectorielle et dans le cas où elle rayonne de manière uniforme, les anisotropies du milieu qu'elle traverse peuvent la rendre vectorielle. L'utilisation de capteurs vectoriels est alors nécessaire pour enregistrer le champ d'onde vectoriel et permet

d'accéder à l'information de polarisation des ondes.

Dans le cas de l'enregistrement des images couleurs, la lumière naturelle est enregistré sur trois canaux : Rouge, Vert et Bleu (RVB). Il en découle que chaque pixel d'une image couleur est codé par un triplet correspondant à sa position dans le cube RVB. Chaque pixel couleur est donc vectoriel et les images couleurs sont des images vectorielles.

Nous proposons d'utiliser les quaternions pour modéliser les signaux et images vectorielles. Afin de montrer l'apport de cette approche, nous présentons l'extension de l'Analyse en Composantes Principales (ACP) aux signaux et images quaternioniques. Nous comparons ce modèle au modèle tensoriel (classiquement utilisé pour les signaux multidimensionnels) et présentons des résultats comparatifs entre l'ACP tensorielle et l'ACP Quaternionique. Les résultats sont présentés sur un exemple d'image couleur.

2 Modèle quaternionique pour les signaux vectoriels

Classiquement, un mode supplémentaire dans un jeu de données se traduit par une augmentation du nombre de variables dans la fonction représentant le signal issu de la mesure de la grandeur à plusieurs dimensions. Cette variable supplémentaire est, la plupart du temps, sur le

même corps algébrique que les précédentes. Par exemple, les données bimensionnelles (à valeurs réelles et de dimensions N et M suivant les deux modes) sont modélisées par des matrices des éléments de $\mathbb{R}^{N \times M}$. Un mode supplémentaire (de dimension P) peut donner lieu à la description des données par un tenseur de $\mathbb{R}^{N \times M \times P}$. Ce processus s'étend à l'ordre Q , donnant lieu à la modélisation des signaux N dimensionnels à l'aide des tenseurs d'ordre Q .

Nous nous plaçons ici dans le cas de signaux de dimension 3. Si, pour de tels signaux, la quantité mesurée ne possède pas d'interprétation géométrique évidente, le modèle tensoriel est bien adapté. Mais il existe des cas où il ne permet pas de rendre compte explicitement de la nature des données. C'est le cas pour les signaux polarisés et les images couleurs qui sont par définition *vectoriels*, dans le sens où chaque échantillon (ou pixel) représente un vecteur dans un espace à trois dimensions. L'approche proposée ici consiste à coder chaque échantillon (ou pixel) par un quaternion.

L'utilisation des quaternions [1] pour les images couleurs a été initialement proposé dans [2] afin de définir une transformée de Fourier qui leur soit dédiée, et son utilisation pour développer des outils de traitement des images couleurs a trouvé des applications, entre autres, en détection de contours [3] et filtrage [4].

Un quaternion est constitué d'une partie réelle et de trois parties imaginaires :

$$q = a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d \quad (1)$$

Les nombres imaginaires \mathbf{i} , \mathbf{j} et \mathbf{k} satisfont les relations :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} &= -1 \\ \mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k} = -\mathbf{j}\mathbf{i} \end{aligned}$$

Le conjugué de q est $\bar{q} = a - \mathbf{i}b - \mathbf{j}c - \mathbf{k}d$. Un quaternion est dit *pur* quand sa partie réelle est nulle. Le modèle que nous adoptons ici consiste à considérer les signaux et images vectoriels comme ayant des échantillons (ou pixels) à valeurs quaternioniques pures. Une onde polarisée collectée sur trois capteurs (c_1, c_2, c_3), enregistrant trois directions de vibrations orthogonales entre elles, sera modélisé par un signal $\mathbf{s}(t)$ tel que :

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}_{c_1}(t)\mathbf{i} + \mathbf{s}_{c_2}(t)\mathbf{j} + \mathbf{s}_{c_3}(t)\mathbf{k} \quad (2)$$

De la même façon, le pixel d'une image couleur $\mathbf{I}(x, y)$, à la position (x, y) , est modélisé par :

$$\mathbf{I}(x, y) = \mathbf{R}(x, y)\mathbf{i} + \mathbf{V}(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{B}(x, y)\mathbf{k} \quad (3)$$

où $\mathbf{R}(x, y)$, $\mathbf{V}(x, y)$ et $\mathbf{B}(x, y)$ sont respectivement les canaux rouges, verts et bleus de l'image.

Les quaternions font partie des algèbres géométriques (ou algèbre de Clifford) [5]. L'algèbre des quaternions est isomorphe à \mathcal{C}_3^+ (algèbre de Clifford de \mathbb{R}^3) [5] et ne doit pas être confondu avec \mathbb{R}^3 car sa structure est particulière et différente de \mathbb{R}^3 .

Le modèle proposé ici est justifié par la faculté des quaternions à représenter les objets 3D (ici les échantillons ou pixels). Le corps des quaternions est également isomorphe à certains tenseurs antisymétriques d'ordre 2 [6]. La représentation quaternionique conserve donc la

nature vectorielle des échantillons en codant chacun d'eux comme un tenseur antisymétrique. L'application d'opérateurs sur les signaux ou images est alors gouvernée par une relation de type produit vectoriel.

Ce formalisme est très proche de celui fondé sur les matrices de Jones et Mueller (ainsi que les vecteurs de Stokes) utilisées dans l'étude de la lumière polarisée en optique [7]. Il est d'ailleurs intéressant de remarquer que la structure d'une matrice de Jones \mathbf{J} représentant un élément optique quelconque est $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & A^* \end{pmatrix}$. Ceci n'est rien d'autre que la représentation complexe d'un quaternion [8] (*i.e.* isomorphisme $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$). Un objet agissant sur une onde polarisée est donc représentable par un quaternion, et l'objet lui-même également.

Les signaux vectoriels et leurs interactions sont donc codés de façon homogène sur \mathbb{H} . La pertinence du modèle quaternionique provient également du fait qu'il manipule des quantités vectorielles qui permettent une interprétation géométrique directe. Ceci est mis en avant dans l'étude de l'ACP Quaternionique.

3 Analyse en Composantes Principales sur \mathbb{H}

Afin d'illustrer l'apport de l'approche quaternionique dans le traitement des signaux vectoriels, nous présentons ici l'extension de l'ACP au corps des quaternions. Cette technique sera ensuite comparée à l'extension tensorielle de l'ACP (HOVSD [9] ou ACP trimodale [10]). Les champs d'application de l'ACP sont vastes, et la version quaternionique présentée ici permet de tenir compte de la nature particulière des signaux vectoriels dans ce traitement.

Par la suite, nous nous focalisons sur l'application de l'ACP sur les images couleurs. La transposition à d'autres types de signaux vectoriels est triviale.

3.1 Définition

Une image couleur (ou un ensemble de signaux reçus sur un réseau de capteurs vectoriels) peut être modélisé comme une matrice \mathbf{S} à valeurs dans $\mathbb{H}^{N \times M}$. Il est alors possible de faire une ACP sur ce jeu de données. Cela consiste tout d'abord à estimer la matrice de covariance à retard nul :

$$\tilde{\Gamma} = \mathbf{S}\mathbf{S}^\triangleleft \quad (4)$$

où \triangleleft est l'opérateur de transposition-conjugaison (quaternionique). La matrice de covariance ainsi définie est quaternionique hermitienne : $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}^\triangleleft$. L'ACP consiste ensuite à diagonaliser la matrice $\tilde{\Gamma}$, *c.à.d.* à estimer sa décomposition en valeurs propres :

$$\tilde{\Gamma} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}^\triangleleft \quad (5)$$

Ensuite la construction du projecteur de rang α , $\mathbf{P}_\alpha = \sum_{n=1}^{\alpha} \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^\triangleleft$, permet de projeter l'image originale sur le sous-espace engendré par les α valeurs propres. On obtient ainsi une approximation de rang α de l'image. Dans le cas quaternionique, cette approximation de l'image

couleur est la meilleure approximation (au sens des moindres carrés) de l'image originale [11]. La projection sur un sous-espace engendre donc une approximation de l'image initiale, de dimensionnalité plus faible.

3.2 Interprétation géométrique

Il est possible de voir l'ACP sur le corps des quaternions comme la recherche des axes principaux non plus d'un nuage de points mais d'un nuage de vecteurs tridimensionnels. L'ACP Quaternionique donnera donc comme première composante l'axe de dispersion maximale des vecteurs, et en même temps la direction dominante de tous les vecteurs du nuage. Dans le cas des images couleurs, cette information est liée à la répartition des fréquences spatiales ainsi qu'à l'information de couleur.

La matrice de covariance diagonalisée lors de l'ACP Quaternionique est $\tilde{\Gamma} \in \mathbb{H}^{N \times N}$. La base des vecteurs propres estimée, exprimée sur $\mathbb{C}^{2N \times 2N}$ grâce à l'isomorphisme $\mathbb{H}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{C}^{2N \times 2N}$, est composée des vecteurs :

$$\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_1\mathbf{j}; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_2\mathbf{j}; \dots; \mathbf{e}_N; \mathbf{e}_N\mathbf{j}\} \quad (6)$$

où les \mathbf{e}_i sont des éléments de \mathbb{C}^N . Exprimée sur \mathbb{H} , cette base devient :

$$\{\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2; \dots; \mathbf{E}_N\} \quad (7)$$

avec $\mathbf{E}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\alpha\mathbf{j}$ avec $\alpha = 1, \dots, N$. L'espace vectoriel engendré par les \mathbf{E}_α est le complexifié de celui engendré par les \mathbf{e}_α , avec les relations particulières entre \mathbf{i} et \mathbf{j} propres aux quaternions.

De manière géométrique on peut voir qu'un vecteur propre quaternionique est composé d'un même vecteur propre complexe évoluant dans deux plans 2D orthogonaux entre eux dans \mathbb{R}^4 . En effet, la base $\{1, \mathbf{j}\}$ est une base orthonormée ce qui fait que \mathbf{e}_α et $\mathbf{e}_\alpha\mathbf{j}$ évoluent dans deux espaces orthogonaux.

Ceci se traduit dans l'ACP Quaternionique d'une image couleur, par le fait que lors de la projection de l'image couleur originale sur les premiers vecteurs propres, l'information couleur *réelle* est présente. Aucun axe n'est privilégié dans le cube RVB, ce qui permet le rendu des couleurs originales dès les premières valeurs d'approximation de rang de l'image.

4 Modèle tensoriel et HOSVD

Afin de comparer l'approche quaternionique à une approche multicomposante du traitement des signaux vectoriels, nous présentons brièvement ici l'ACP tensorielle. Pour plus de détails, se référer à [10, 9].

Une approche possible pour la modélisation des images couleurs (et les signaux vectoriels en général) consiste à les considérer comme des tableaux tridimensionnels. Dans ce cas, l'image couleur originale $\mathcal{I}(x, y, c)$ est un tenseur d'ordre 3 (ou trimodale), dont les modes sont : nombre de lignes, nombre de colonnes, canal de couleur. Sous l'hypothèse que l'image est séparable, elle peut se décomposer comme une somme de tenseurs de rang 1, telle que :

$$\mathcal{I}(x, y, c) = \sum_{n=1}^r \mathbf{w}_i^1(x) \otimes \mathbf{w}_i^2(y) \otimes \mathbf{w}_i^3(c) \quad (8)$$

avec $\mathbf{w}_i^1(x)$, $\mathbf{w}_i^2(y)$ et $\mathbf{w}_i^3(c)$ les composantes de l'image suivant les trois modes, et \otimes le produit tensoriel. Le rang du tenseur \mathcal{I} est égal à r . Un problème dans l'extension de l'ACP aux tenseurs est que ce rang peut être supérieur à la plus grande dimension de \mathcal{I} . Une décomposition canonique (équivalente de la SVD pour les matrices) ne conduit pas à une base trimodale orthogonale. Cette propriété est exhibée dans le modèle PARAFAC [9] où les éléments de la décomposition (canonique) ne sont pas orthogonaux entre eux.

Afin de comparer l'ACP Quaternionique à une méthode tensorielle décomposant les données en des bases orthogonales suivant les trois modes, la définition de la HOSVD pour les tenseurs d'ordre 3 est maintenant rappelée succinctement.

4.1 HOSVD d'une image couleur

La HOSVD d'ordre 3 est l'extension de la SVD aux tenseurs d'ordre 3 (ou trimodaux). Elle décompose un tenseur de $\mathbb{R}^{N \times M \times P}$ sur une base trimodale orthonormale :

$$\mathcal{I}(x, y, c) = \mathcal{C} \times_1 \mathbf{U}^{(x)} \times_2 \mathbf{U}^{(y)} \times_3 \mathbf{U}^{(c)} \quad (9)$$

La notation \times_i , empreintée à [9], désigne le produit scalaire suivant le mode i du tenseur \mathcal{C} , ou i - mode produit. Une condition est imposée dans (9) quand à l'orthogonalité entre les composantes (équivalents des vecteurs singuliers dans le cas des matrices) de chaque mode. Cette condition se traduit par $\mathbf{U}^{(i)}\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{I}$ pour $i = x, y, c$. La différence majeure avec la décomposition des tenseurs d'ordre 2 (*i.e.* SVD) réside dans le fait que le tenseur \mathcal{C} n'est pas hyperdiagonal et qu'il ne possède que la contrainte de *tout orthogonalité* [9] dans ses trois modes. Il ne renseigne donc pas sur le rang r du tenseur. Il donne par contre le (r_1, r_2, r_3) -rang de \mathcal{I} [9].

Un problème dans l'utilisation de la HOSVD sur \mathcal{I} est que les colonnes des matrices $\mathbf{U}^{(x)}$, $\mathbf{U}^{(y)}$ et $\mathbf{U}^{(c)}$ ne correspondent pas aux éléments $\mathbf{w}_i^1(x)$, $\mathbf{w}_i^2(y)$ et $\mathbf{w}_i^3(c)$ du modèle tensoriel. Pour obtenir directement ces éléments, il faudrait utiliser une décomposition canonique de tenseurs d'ordre 3 de type PARAFAC. Ce modèle ne permettant par une décomposition en sous-espaces orthogonaux que procurent l'ACP Quaternionique et trimodale, il n'est pas retenu ici et nous utilisons la troncature de (α, β, γ) -rang du tenseur \mathcal{I} , obtenu par HOSVD, pour comparer les deux modèles. La HOSVD ne permet pas de remonter aux éléments de (8)¹.

La HOSVD permet d'estimer la meilleure approximation de (r_1, r_2, r_3) -rang d'un tenseur de rang 3 [9], tout comme la SVD Quaternionique permet d'obtenir la meilleure approximation d'une matrice de quaternions [11].

5 Application aux images couleur

Nous comparons les résultats de l'ACP Quaternionique et l'ACP trimodale sur une image naturelle (6). La difficulté

¹Dans le cas du modèle quaternionique, les éléments de l'ACP Quaternionique correspondent aux composantes élémentaires de l'image

de comparaison réside dans l'inhomogénéité entre les rangs des deux approches. Pour palier ceci, nous prenons dans toutes les images présentées un rang égal à 3 dans le mode couleur de la HOSVD. Cela implique que nous considérons bien un espace engendré par trois vecteurs principaux et ne restreignons pas les couleurs à un plan dans le cube RVB. De même, les deux autres rangs de la HOSVD sont pris égaux pour ne pas privilégier une direction de l'image.

Sur la figure (6) sont présentés les projections de rang 2 pour l'ACPQ et de (3,2,2)-rang pour la HOSVD. Le comportement annoncé plus haut est visible : alors que l'ACPQ permet un rendu des couleurs originales dès les rangs faibles, la HOSVD rend une information de type *luminence*. La structure spatiale de l'image est identique dans les deux approches.

Pour des troncatures de rang 5, figure (6), la différence est moins marquée : la taille de l'espace reconstruit augmentant, la HOSVD peut commencer à accéder aux valeurs extrêmes en termes de couleur.

Ces premiers résultats montrent la capacité de l'approche quaternionique à prendre en compte l'information couleur de manière plus pertinente que l'approche tensorielle. Ces résultats devront être validés sur une base de données plus large.

6 Conclusion

Nous avons utilisé le modèle quaternionique pour les signaux et images vectoriels afin de proposer l'extension de l'Analyse en Composantes Principales pour les signaux à échantillons vectoriels. Une comparaison de l'approche quaternionique avec l'approche tensorielle a été initiée. La pertinence de l'approche quaternionique à prendre en compte intrinsèquement la nature vectorielle des signaux a été mise en avant.

Nous avons montré sur un exemple d'image couleur le comportement des deux approches. Si elles sont équivalentes pour l'analyse de la structure des images, elles ne le sont pas pour l'information couleur. L'ACP Quaternionique permet, avec un rendu couleur meilleur, d'approcher par sous-espace de rang faible des images à contenu couleur très varié, alors que la HOSVD ne donne qu'une idée des couleurs dominantes dans les premiers rangs. Asymptotiquement (*i.e* à mesure que le rang augmente), les deux méthodes se rejoignent.

La définition de l'ACP Quaternionique s'inscrit dans le développement d'outils de traitement du signal dédiés à l'analyse des signaux et images vectoriels.

References

- [1] W.R. Hamilton. On quaternions. *Proceeding of the Royal Irish Academy*, 1843.
- [2] S.J. Sangwine. Fourier transforms of colour images using quaternions, or hypercomplex, numbers. *Electronics letters*, 32(21):1979–1980, 1996.
- [3] S.J. Sangwine, C.J. Evans, and T.A. Ell. Colour-sensitive detection using hypercomplex filters. In *X European Conference in Signal and Image Processing (EUSIPCO)*, Tampere, Finland, pages 107–110, 2000.
- [4] E. Moxey, S.J. Sangwine, and T.A. Ell. Hypercomplex operators and vector correlation. In *XI European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Toulouse, France, volume III, pages 247–250, 2002.
- [5] P. Lounesto. *Clifford algebra and spinors*. Electrical and computer engineering: digital signal processing. Cambridge University Press, 1997.
- [6] R. Deheuvels. *Formes quadratiques et groupes classiques*. PUF, 1981.
- [7] S. Huard. *Polarisation de la lumière*. Masson, 1993.
- [8] L.A. Wolf. Similarity of matrices in which the elements are real quaternions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42:737–743, 1936.
- [9] L. De Lathauwer. *Signal Processing based on multilinear algebra*. Phd thesis, K.U. Leuven, 1997.
- [10] P.M. Kroonenberg. *Three-mode principal component analysis*. DSWO Press, 1983.
- [11] N. Le Bihan and S.J. Sangwine. Color image decomposition using quaternion singular value decomposition. In *IEE International Conference on Visual Information Engineering (VIE)*, 2003.

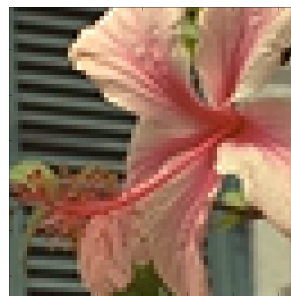


FIG. 1: Image originale

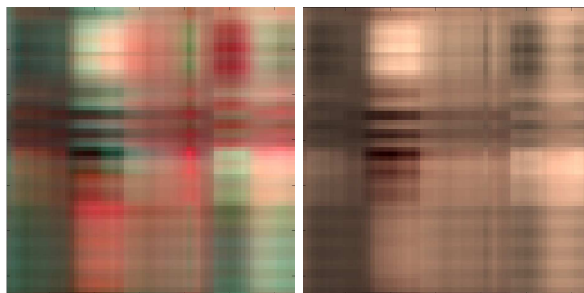


FIG. 2: ACPQ rang 2 et HOSVD rang(3,2,2)

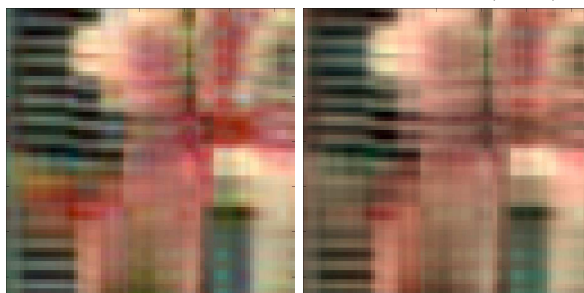


FIG. 3: ACPQ rang 5 et HOSVD rang(3,5,5)