

Longueur de signaux stochastiques à bandes limitées : Filtres de Lorentz.

Jean-Marc GIRAULT¹, Denis KOUAMÉ¹, Michel LECORFF²

¹Laboratoire d'UltraSons Signaux et Instrumentation (LUSSI)
2 boulevard Tonnellé, BP 3223, 37032 Tours, France

²Département SRC de l'IUT de Blois
3 place Jean Jaurès, BP 2903, 41029 Blois Cedex, France
jmgirault@univ-tours.fr

Résumé – Ce travail de recherche présente une étude sur des signaux stochastiques filtrés par une méthode géométrique originale. Cette étude souligne l'intérêt de la mesure de longueurs pour caractériser un système linéaire. Ici nous montrons que le rapport des longueurs de signaux en sortie et en entrée du filtre est une fonction du coefficient de corrélation du système. Pour terminer, nous illustrons les calculs théoriques de rapports de longueurs pour différents types de filtres de Lorentz.

Abstract – This work deals with an original geometric method applied to filtered stochastic signals. This study highlights that the length measurement is an interesting way to characterize linear systems. In this research work we show that the length ratio between the output and the input signals is a function of the correlation coefficient of the system. Finally we illustrated our theoretical study by different kinds of Lorentz filters.

1 INTRODUCTION

Ce papier traite de la caractérisation de signaux stochastiques à bandes limitées par une approche originale fondée sur la mesure de la longueur de signaux.

Le premier objectif que nous voulons donner à ce travail est de montrer que la mesure de la longueur d'un signal est un outil intéressant pour caractériser un signal à bande limitée. Le second objectif est de présenter sous un autre regard le traitement de signaux par des mesures géométriques. Enfin le dernier objectif est de familiariser le lecteur à une technique en marge des techniques classiques : la mesure de longueur.

Dans cet article, nous étendons la mesure de longueur, souvent associée aux signaux fractals, à celles de signaux stochastiques à bandes limitées. L'idée majeure qui justifie cette extension est due en partie aux nombreux points communs entre les signaux fractals stochastiques et les signaux aléatoires filtrés.

Le travail de recherche que nous présentons ici est la poursuite logique d'un travail préliminaire dont le point

central traite de l'estimation de la fréquence de signaux déterministes par mesures de longueurs [1]. Ce travail met à notre disposition un nouvel outil pour caractériser des signaux à la fois déterministes et aléatoires. En un mot, l'originalité de ce travail tient simplement en l'adaptation d'un outil classiquement utilisé pour la mesure de la dimension fractale de signaux [2], [3], à la caractérisation de signaux à caractères *a priori* non fractals.

Dans cet article nous commençons par rappeler les hypothèses de travail sur le système et les signaux étudiés. Dans un deuxième temps nous rappelons la définition de la longueur dans le cas de signaux aléatoires réels ou stochastiques. Enfin dans une troisième étape nous calculons le rapport de longueurs dans un cadre général puis nous l'appliquons aux cas de filtres de Lorentz.

2 LONGUEUR DE SIGNAUX STOCHASTIQUES FILTRÉS

Le travail que nous présentons ici est volontairement restreint à la caractérisation de bruits filtrés Lorentziens. Cette caractérisation consiste en la mesure de la longueur du signal analytique en sortie du système ci-dessus en figure (1).

Soit $w(t)$ un bruit blanc gaussien $N(0, \sigma^2)$ et soit $h(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre de Lorentz définie par :

$$h(t) = \omega_c e^{-\omega_c t} \cos(\omega_0 t),$$

où ω_c est la pulsation de coupure et ω_0 est la pulsation

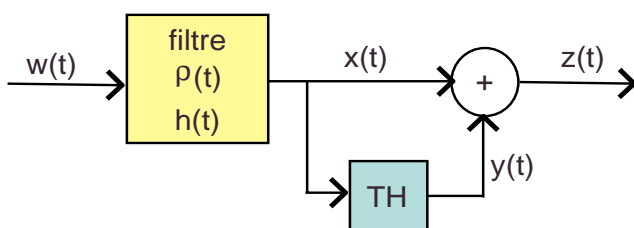


Fig.1 - Système étudié.

centrale du filtre. Soit $z(t)$ le bruit filtré défini par :

$$z(t) = x(t) + jy(t)$$

où $y(t) = TH(x(t))$ est la transformée de Hilbert du signal $x(t)$.

Dans le cas de signaux stochastiques analytiques stationnaires, la définition de la longueur s'écrit :

$$L_z(\epsilon) = \frac{T}{\epsilon} E[\lambda], \quad (1)$$

où $E[\lambda]$ est l'espérance mathématique de l'élément de longueur euclidienne généralisée. Cet élément de longueur euclidienne généralisée $\lambda(t, \epsilon)$, illustré en figure (2), est défini par :

$$\lambda(t, \epsilon) = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} = |\Delta_z|,$$

où $\Delta_x = (x(t+\epsilon) - x(t))$, (idem pour $y(t)$ et $z(t)$), où ϵ est une jauge (rôle de zoom) et où T est la durée d'analyse. Dans le cas de signaux réels la définition de l'élément de longueur se réduit à :

$$\lambda(t, \epsilon) = \sqrt{\Delta_x^2 + \epsilon^2}.$$

Dans le cas où $\epsilon \rightarrow 0$, nous reconnaissons la définition classique de la longueur euclidienne notée ici L_0 :

$$L_0(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} L_z(\epsilon),$$

où l'élément de longueur s'exprime par :

$$\lambda_0(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Notons pour information que dans le cas de signaux fractals, la longueur s'exprime en fonction de la dimension fractale D comme suit :

$$L(\epsilon) = T^D \epsilon^{1-D}.$$

Pour calculer la longueur L_z du bruit filtré, il faut dans un premier temps calculer les densités de probabilité des processus Δ_x et Δ_y . Sachant que les processus aléatoires $x(t)$ ou $y(t)$ sont régies par des lois gaussiennes $N(0, \sigma^2)$, on peut montrer que les lois des processus Δ_x et Δ_y sont aussi des lois gaussiennes $N(0, \sigma'^2)$ où $\sigma' = \sigma\sqrt{2(1-\rho(\epsilon))}$.

De la même façon on peut montrer que la loi de l'élément de longueur $\lambda(t, \epsilon)$ est une loi de Rayleigh d'écart-type σ' . Précisons que les processus $x(t)$ et $y(t)$ sont indépendants car ils sont gaussiens et non-corrélés. Les processus sont gaussiens car la linéarité du filtre conserve la propriété de gaussiennité. Les processus sont non-corrélés car le coefficient de corrélation associé au filtre de Hilbert est nul. L'espérance mathématique de l'élément de longueur λ , qui par définition est ≥ 0 , s'écrit :

$$E[\lambda] = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^2}{\sigma'^2} e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma'^2}} d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma'.$$

Notez pour information que $E[\lambda^2] = 2\sigma'^2$.

Dans ces conditions, la longueur $L_z(\epsilon)$ devient :

$$L_z(\epsilon) = L_x(\epsilon) \frac{\pi}{2},$$

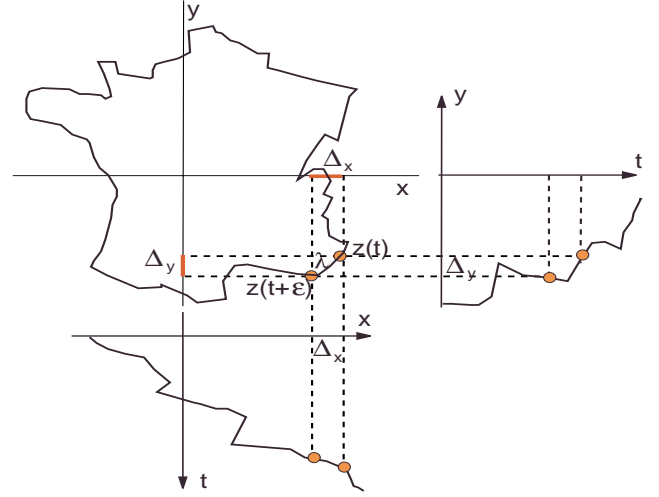


Fig.2 - Plan polaire du signal étudié.

Tableau I
Coefficient de corrélation et Rapports de Longueurs de bruits analytiques colorés.

Filtres	$\rho(\epsilon)$	$\frac{\Lambda(\epsilon)}{\frac{\Lambda(\epsilon)}{\pi/2}}$
Bande Large	$e^{-\omega_c \epsilon } \cos(\omega_0\epsilon)$	$\sqrt{1 - e^{-\omega_c \epsilon } \cos(\omega_0\epsilon)}$
Bande étroite	$\cos(\omega_0\epsilon)$	$\left \sin \frac{\omega_0\epsilon}{2} \right \sqrt{2}$
Bande de Base	$e^{-\omega_c \epsilon }$	$\sqrt{e^{-\frac{\omega_c \epsilon }{2}} sh\left(\frac{\omega_c\epsilon}{2}\right) \frac{\sqrt{8}}{\pi}}$
Passé tout	0	1

où L_x est la longueur du signal en sortie du filtre $x(t)$. La longueur $L_x(\epsilon)$ du signal réel $x(t)$ s'exprime par :

$$L_x(\epsilon) = L_w(\epsilon) \sqrt{1 - \rho(\epsilon)},$$

où $L_w(\epsilon)$ est la longueur du signal en entrée du filtre. La longueur $L_w(\epsilon)$ s'exprime dans le cas d'un bruit blanc gaussien réel $N(0, \sigma^2)$ par :

$$L_w(\epsilon) = \frac{2\sigma}{\epsilon} \frac{T}{\sqrt{\pi}}.$$

Dans ces conditions, pour ne mettre en évidence *a priori* que les paramètres du filtre, nous définissons un rapport de longueurs $\Lambda(\epsilon)$:

$$\Lambda(\epsilon) = \frac{L_z(\epsilon)}{L_w(\epsilon)} = \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \rho(\epsilon)}. \quad (2)$$

Nous vérifions effectivement que ce rapport $\Lambda(\epsilon)$ est dépendant des paramètres du filtre (ω_0 et ω_c) via le coefficient de corrélation ρ et de la jauge ϵ .

Tableau II
Rapports de Longueurs de bruits analytiques colorés.

Filtres	$\Lambda_0(\epsilon)$	D	Ψ	H
Bande Large	?	?	?	?
Bande étroite	$\frac{\pi}{2} \left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}\epsilon\right)^1$	1	$\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$	1
Bande de Base	$\frac{\pi}{2} (\omega_c\epsilon)^{0.5}$	1.5	ω_c	0.5
Passé tout	$\frac{\pi}{2} \epsilon^0$	2	1	0

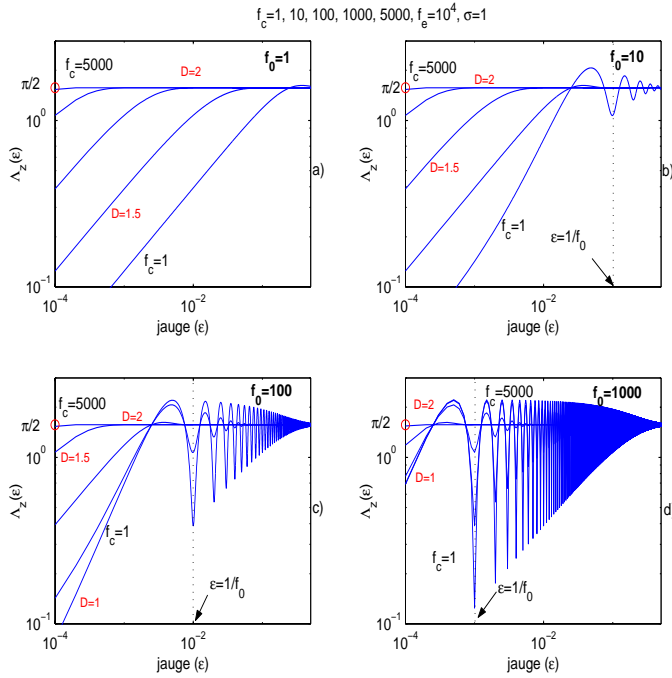


Fig.3 - Rapport de Longueurs de signaux aléatoires colorés.

Dans le cas des filtres de Lorentz (passe-bas, bande étroite et passe tout) et pour de petites valeurs de la jauge ϵ nous définissons par $\Lambda_0(\epsilon)$ le développement limité du rapport de longueurs $\Lambda(\epsilon)$. Sous ces hypothèses, on montre que la dimension fractale est une puissance de la fonction Ψ - image des paramètres du filtre (ω_0 et/ou ω_c)- et de la jauge (ϵ) :

$$\Lambda_0(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Lambda(\epsilon) = \frac{\pi}{2} (\Psi\epsilon)^H, \quad (3)$$

où H correspond la plupart des cas à l'exposant de Hölder. Tricot [4] (p. 154) démontre que H dans le cas de signaux höldériens et anti-höldériens, est fonction de la dimension fractale D :

$$H = 2 - D. \quad (4)$$

Différentes valeurs de la fonction Ψ sont données en exemple dans le tableau II. Dans les cas de signaux réels ou analytiques, nous vérifions que la dimension fractale d'un bruit blanc est $D = 2$ (voir le tableau II). Dans les deux tableaux nous avons indiqué les différentes expressions des rapports de longueurs $\Lambda(\epsilon)$ et $\Lambda_0(\epsilon)$ dans le cas de signaux analytiques filtrés par des filtres de Lorentz en bande de base ou en bande transposée - large bande ou en bande étroite -.

A titre d'illustration, nous avons reporté sur la figure (3) le rapport des longueurs de signaux analytiques filtrés. Les simulations de séries temporelles (10^4 points) sont réalisées pour une fréquence d'échantillonnage $f_e = 10^4$ Hz, $\sigma = 1$, pour différentes valeurs de la fréquence de coupure $f_c = \{1, 10, 100, 1000, 5000\}$ Hz et pour différentes valeurs de la fréquence centrale du filtre $f_0 = \{1, 10, 100, 1000\}$ Hz. Les valeurs minimale et maximale de la jauge sont respectivement pour $N = 10^4$ points et $f_e = 10^4$ Hz : $\epsilon_{min} = 10^{-4}$ et $\epsilon_{max} = 1$. Précisons que dans le cas d'une jauge maximale ($\epsilon_{max} = 1$), d'une part la mesure des longueurs (et donc du rapport de longueur)

est effectué à partir de seulement 2 points : le premier et le dernier de la série temporelle et d'autre part le rapport de longueur $\Lambda(\epsilon) \rightarrow \pi/2$ indiquant des signaux non-corrélés. La figure (3a) souligne que lorsque $f_c = 5000$ Hz et $f_0 = 1$ Hz (filtre passe-tout) la courbe associée au rapport de longueurs des signaux possède une pente égale à -1 impliquant une dimension fractale $D = 2$, ce qui correspond bien à la dimension fractale d'un bruit blanc. Lorsque $f_c = 1$ Hz et $f_0 = 1$ Hz (filtre passe-bas) la courbe associée au rapport de longueurs des signaux possède une pente égale à -0.5 impliquant une dimension fractale $D = 1.5$. Ce cas de figure correspond à la dimension fractale d'une marche aléatoire. Dès que le signal est transposé en fréquence (passe-bande), on voit apparaître des oscillations dont la position du premier minimum vaut $\epsilon = 1/f_0$. A partir de ce constat, on peut mettre au point un certain nombre d'estimateurs de fréquence basés sur la recherche du ou des minimums de $L_z(\epsilon)$ [1]. Lorsque le filtrage est bande étroite, par exemple lorsque $f_c = 1$ Hz et $f_0 = 100$ Hz (voir la figure (3c)), le signal correspondant est un sinusöide dont la dimension fractale vaut $D = 1$ (si cela a un sens) pour des valeurs petites de la jauge ϵ .

Remarquons que le choix de la gamme de la jauge ϵ est important. Ce dernier est conditionné par la fréquence d'échantillonnage dans le cas de l'étude de séries temporelles. Si on ne dispose d'aucune information *a priori* sur les paramètres du filtre, alors nous pouvons imposer comme valeurs limites de la jauge la période d'échantillonnage (la plus petite valeur) et l'unité (la plus grande valeur correspondant respectivement aux premier et dernier points de la série).

3 CONCLUSION

Dans ce papier nous avons montré que la mesure de la longueur de signaux aléatoires filtrés est un moyen original pour caractériser un système linéaire. En effet nous avons montré que le rapport de longueurs de signaux en sortie et en entrée du système linéaire est une fonction des paramètres du filtres permettant ainsi une caractérisation du filtre.

Références

- [1] J.M. Girault and D. Kouamé, "Length and frequency of band-limited signals," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 9, pp. 371-374, 2002.
- [2] B. Mandelbrot, "Self-affine fractals and fractal dimension," *Physica Scripta*, vol. 32, pp. 257-260, 1986.
- [3] L. Burlaga and L. Klein, "Fractal structure of the interplanetary magnetic field," *Journal of Geophysical Research*, vol. 91, no. A1, pp. 347-350, 1986.
- [4] C. Tricot, "Courbes et dimension fractale," *Springer Berlin*, 1993.