

# Lissage anisotrope Doppler par extension de l'opérateur de diffusion de Laplace-Beltrami dans le cadre de la géométrie Riemannienne de l'information de Chentsov

N. RIVEREAU<sup>1</sup>, C. GERMOND<sup>1</sup>, F. BARBARESCO<sup>1</sup>

<sup>1</sup>THALES AIR DEFENCE, JOINT RADAR SENSORS UNIT, Direction Technique de l'Innovation, Service Algorithmes et Simulation, 7/9, rue des Mathurins, F-92223 Bagneux, Cedex, FRANCE

[frederic.barbaresco@fr.thalesgroup.com](mailto:frederic.barbaresco@fr.thalesgroup.com)

**Résumé** – Nous traitons le problème du débruitage spatial de l'estimation des paramètres de lois statistiques grâce au flot géométrique non-linéaire de Laplace-Beltrami. Cet opérateur, récemment introduit par N. Sochen et R. Kimmel [2] en traitement d'image, est étendu au cas d'un espace hybride formé des coordonnées spatiales (géométrie Euclidienne de la mesure) et des paramètres des lois statistiques (géométrie de l'information de Chentsov dont la métrique est donnée par la matrice d'information de Fisher). Cet opérateur EDP agissant intrinsèquement sur la variété entropique possède la propriété de conserver les discontinuités, ce qui permet de lisser les estimateurs des paramètres de lois statistiques de façon anisotrope. Nous appliquons ce formalisme au lissage spatial de paramètres statistiques de processus autorégressifs via la métrique de Siegel, en déduisant l'expression des opérateurs agissant sur les coefficients de réflexion qui permettent de lisser anisotropiquement des spectres Doppler. Que ce soit, pour la théorie des « Espaces d'Echelle », pour la métrique de Chentsov des densités gaussiennes, ou pour les modèles AR, le modèle de géométrie hyperbolique de Poincaré dans le disque unité semble jouer un rôle central.

**Abstract** - Our problem addresses the spatial denoising of statistical parameters estimation via the geometric non-linear Laplace-Beltrami Flow based on the embedding space geometry deduced from Information geometry. Input of our problem is a map  $W : \Sigma \rightarrow M$  where  $\Sigma$  is a n-dimensional Riemannian manifold and  $X$  is the embedding of this manifold in a space which is hybrid space of spatial coordinates and statistical parameters coordinates (Chentsov space of Information geometry deduced from Fisher metric). Then, our problem is solved viewing parameters space of Chentsov as embedding maps, that flow toward minimal surfaces. This spatial denoising, recently introduced by N. Sochen & R. Kimmel [2] in Image processing, and presently extended for spatial statistical parameters estimation denoising preserves discontinuities (The operator has the good behaviour that the projection is edge preserving.). After the definition of the Laplace-Beltrami flow for any statistical parameters space based on Fisher metric, we provide different applications for anisotropic spatial smoothing of Gaussian law parameters and reflection coefficient in Doppler analysis. In case of Doppler analysis, the hybrid space is the Embedding Siegel space. In all cases, Poincaré's hyperbolic geometry model in unit disk seems to play a central role.

## 1 D'une géométrie différentielle l'autre

### 1.1. Géométrie non-Euclidienne de l'espace d'échelle et diffusion isotrope

#### 1.1.1 Diffusion isotrope et noyau gaussien : opérateur de Fourier de la chaleur

La théorie du filtrage par EDP est basée sur la correspondance entre l'équation de la chaleur linéaire parabolique et la convolution avec un noyau gaussien d'écart type  $\sqrt{2t}$ , c'est à dire un filtrage basse-fréquence:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Delta u(t,x), & t \geq 0, x \in \mathfrak{R}^2 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \Leftrightarrow u(t,x) = (G_{\sqrt{2t}} * u_0)(x)$$

Le pseudo-temps « t » s'interprète alors comme une nouvelle dimension supplémentaire d'échelle. Malheureusement, ce filtrage est isotrope et non sélectif et lisse indifféremment bruit et contours. Cet opérateur est invariant par rotation et translation.

#### 1.1.2 Diffusion isotrope et géométrie hyperbolique

Si l'on rajoute aux invariances par rotation et translation, une invariance par rapport à l'unité de mesure, la métrique naturelle dans l'espace d'échelle (x,t) est donnée par :  $ds^2 = \frac{dx^2}{t^2} + \frac{dt^2}{t^2}$ .

L'espace d'échelle apparaît alors comme hyperbolique, et la dérivée totale sur  $u$  s'exprime comme suit :

$du = t \cdot \nabla u \cdot \frac{dx}{t} + t \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{dt}{t}$  et le processus de diffusion correspondant

à cette métrique est donnée par :  $t \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = t \cdot \nabla \cdot (t \cdot \nabla u)$  qui peut

également s'écrire :  $\left( t \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) u = (t \cdot \nabla)^2 \cdot u$ .

Si  $x \in \mathfrak{R}$  (cas unidimensionnel), l'équation de diffusion dans l'espace (t,x) hyperbolique est alors donnée par  $\frac{\partial u}{\partial \tau} = t^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)$ .

Si  $x \in \mathfrak{R}$ , il est en particulier judicieux de construire la variable complexe  $z = x + it$  qui appartient au-demi plan supérieur, puis en appliquant la transformation de Cayley  $\omega = \frac{z-i}{z+i}$ , on obtient une

variable dans le disque unité de métrique :  $ds^2 = \frac{4|d\omega|^2}{(1-|\omega|^2)^2}$  qui se

réduit en coordonnées polaires hyperboliques en posant :  $\omega = e^{i\theta} \cdot \tanh\left(\frac{v}{2}\right)$  pour la métrique finale suivante :

$ds^2 = dv^2 + \sinh(v)^2 \cdot d\theta^2$ . Nous verrons que l'on retrouve ce cas dans la géométrie de Chentsov pour la métrique des lois gaussiennes définies dans l'espace des paramètres  $(m, \sigma^2)$ .

### 1.2 Géométrie non-Euclidienne et diffusion anisotrope : opérateur de Laplace-Beltrami

#### 1.2.1 Opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété

L'opérateur de Beltrami est défini en terme de carte locale (application injective homéomorphe d'un ouvert de  $\mathfrak{R}^2$  dans la

surface)  $W : (\Sigma, f) \rightarrow (M, q)$  et diffuse dans un espace hybride défini par un choix d'un système local adéquate de coordonnées. : la variété  $\Sigma$  de métrique  $f$  et la variété  $M$  de métrique  $q$ . La longueur de la distance infinitésimale sur la variété est déduite sur la variété mais également dans l'espace Euclidien de coordonnées dans lequel est plongé la variété, grâce à la définition de la dérivée totale  $dW^i = \partial_\mu W^i dx^\mu$  :

$$ds^2 = f_{\mu\nu} dW^\mu dW^\nu = q_{ij} \partial_\mu W^i \partial_\nu W^j dx^\mu dx^\nu$$

Polyakov [2] a été le premier dans le cadre de la théorie des cordes en physique des hautes énergies, à introduire la fonctionnelle suivante associée à cette carte  $W : (\Sigma, f) \rightarrow (M, q)$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{S}[W^i, f_{\mu\nu}, q_{ij}] &= \int \langle \nabla W^i, \nabla W^j \rangle_f q_{ij} dV \text{ avec } f \equiv \det(f_{\mu\nu}) \\ \langle \nabla W^i, \nabla W^j \rangle_f &= f^{\mu\nu} \partial_\mu W^i \partial_\nu W^j \text{ et } dV = dx^1 \dots dx^m \sqrt{f} \end{aligned} \right.$$

Dans l'approche variationnelle de Polyakov, l'opérateur de Beltrami est déduit par l'équation d'Euler-Lagrange associée à cette fonctionnelle :

$$-\frac{1}{2\sqrt{f}} q^{il} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta W^l} = \frac{1}{\sqrt{f}} \partial_\mu (\sqrt{f} f^{\mu\nu} \partial_\nu W^i) + \Gamma_{jk}^i \langle \nabla W^j, \nabla W^k \rangle_f \text{ où le}$$

terme  $\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} q^{il} (\partial_j q_{ik} + \partial_k q_{jl} - \partial_l q_{jk})$  est la connexion de Levi-

Civita. La solution est obtenue comme état stable de l'EDP correspondante à la descente de gradient décrite par :

$$\frac{\partial W^i}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{f}} \partial_\mu (\sqrt{f} f^{\mu\nu} \partial_\nu W^i) + \Gamma_{jk}^i \langle \nabla W^j, \nabla W^k \rangle_f$$

### 1.2.2 Surface minimale et flot de courbure moyenne

Le flot de Beltrami s'interprète comme un flot de courbure moyenne qui minimise la surface  $S = (x^1, \dots, x^m, W^1, \dots, W^n)$ . Le flot de courbure moyenne est effectivement donné par :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \kappa \cdot \bar{N} \text{ , or en fixant la paramétrisation } (x^1, \dots, x^m) \text{ le long du}$$

flot, alors  $\frac{\partial S}{\partial t} = \left( 0, \dots, 0, \frac{\partial W^1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial W^n}{\partial t} \right)$  et suivant l'expression de la

courbure  $\kappa$ , on retrouve l'expression du flot de Laplace-Beltrami.

## 1.3 Géométrie non-Euclidienne de Chentsov en géométrie de l'information

Chentsov [1] fut le premier à introduire l'information de Fisher comme une métrique dans l'espace des paramètres des distributions de probabilités. La matrice de Fisher étant égale au Hessien de l'entropie, les géodésiques entre distributions de probabilité sont définies sur la variété entropique (l'entropie considérée comme une surface plongée dans l'espace des paramètres). Chentsov était conduit par la théorie de la décision quand il considéra une catégorie dont les objets étaient les espaces de probabilités et dont les morphismes étaient les noyaux de Markov. Il a montré que l'information de Fisher est la seule famille monotone des métriques différentielles sur la classe des complexes de probabilité finis. La matrice de Fisher est un tenseur symétrique de 2<sup>ème</sup> espèce, aussi la métrique associée est invariante suivant les transformations admissibles des paramètres des distributions de probabilité.

### 1.3.1 Métrique de Fisher sur la variété entropique

Chentsov a donc introduit une distance entre familles paramétriques de distributions de probabilité  $G_\Theta = \{p(.|\theta) : \theta \in \Theta\}$  avec  $\Theta$  l'espace des paramètres. :

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(\theta) d\theta_i^* d\theta_j = d\theta^* I(\theta) d\theta$$

Ce qui s'obtient de façon naturelle en effectuant un développement de Taylor à l'ordre 2 sur la divergence de Kullback entre deux distributions de probabilités de paramétrages voisins :

$$K[p(.|\theta), p(.|\theta + d\theta)] = \frac{1}{2!} \sum_{i,j} g_{ij}(\theta) d\theta_i d\theta_j^* + O(|d\theta|^3)$$

avec  $I(\theta) = [g_{ij}(\theta)]$  la matrice de Fisher et

$$g_{ij}(\theta) = E \left[ \frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial \theta_j^*} \right] = -E \left[ \frac{\partial^2 \ln p(x|\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j^*} \right]$$

où la matrice de Fisher apparaît comme étant le Hessien de l'Entropie de Shannon (la distance est donc une géodésique sur H):

$$g_{ij}(\theta) = \frac{\partial^2 H(p)}{\partial \theta_i \partial \theta_j^*} \text{ avec } H(p) = -\int p(x|\theta) \ln p(x|\theta) dx$$

### 1.3.2 Métrique hyperbolique dans le cas Gaussien

Dans le cas d'une densité gaussienne  $N(m, \sigma^2)$

La matrice de Fisher dans ce cas  $I(\theta) = \sigma^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  donne :

$$ds^2 = \frac{dm^2}{\sigma^2} + 2 \frac{d\sigma^2}{\sigma^2} = 2 \sigma^{-2} \left[ \left( \frac{dm}{\sqrt{2}} \right)^2 + (d\sigma)^2 \right]$$

On observe que le seul changement de variable permettant une intégration de la métrique, nous ramène au disque unité en appliquant les deux changements de variables successifs :

$$z = \frac{m}{\sqrt{2}} + i\sigma \text{ et } \omega = \frac{z-i}{z+i} \quad (|\omega| < 1)$$

La métrique hyperbolique est alors donnée par :  $ds^2 = 8 \frac{|d\omega|^2}{(1-|\omega|^2)^2}$

Ou en coordonnées polaires  $z = e^{i\theta} \tanh\left(\frac{v}{2}\right)$  pour la métrique

finale suivante, identique à celle de l'espace d'échelle :

$$ds^2 = 2 dv^2 + 2 \sinh(v)^2 d\theta^2$$

### 1.3.3 Métrique de Siegel dans le cas multivarié Gaussien

Considérons un processus complexe multivarié gaussien complexe

$$\text{de densité : } \begin{cases} p(X_n / R_n) = (\pi)^{-n} |R_n|^{-1} e^{-Tr[\hat{R}_n R_n^{-1}]} \\ \text{avec } \hat{R}_n = (X_n - m_n)(X_n - m_n)^* \text{ et } E[\hat{R}_n] = R_n \end{cases}$$

Nous savons que la matrice de Fisher est donnée par :

$$g_{ij}(\theta) = -Tr[\partial_i R_n \partial_j R_n^{-1}] + \partial_i m_n^+ R_n^{-1} \partial_j m_n$$

Si, on suppose le processus de moyenne nulle, on obtient

$$g_{ij}(\theta) = Tr[(R_n \partial_i R_n^{-1})(R_n \partial_j R_n^{-1})]$$

De laquelle, on déduit la métrique de Chentsov qui s'identifie à la métrique de Siegel :  $ds^2 = Tr[(R_n dR_n^{-1})^2] = Tr[(d \ln R_n)^2]$  qui sera utile pour les processus autorégressifs.

De façon équivalente, en effectuant une analyse en sous-espace :

$$ds^2 = tr[(R_n dR_n^{-1})^2] = tr[\Lambda_n^{-1} d\Lambda_n \Lambda_n^{-1} d\Lambda_n] = \sum_{i=1}^n \left( \frac{d\lambda_i}{\lambda_i} \right)^2$$

avec  $R_n^{-1} = U_n^+ \Lambda_n U_n$

## 2 Diffusion anisotrope Doppler

Nous allons traiter le cas du lissage anisotrope de spectre Doppler. Pour résoudre ce problème, nous allons exprimer l'opérateur de Beltrami agissant sur les paramètres du modèle autoregressif du signal dont la métrique est donnée par la matrice de Fisher.

## 2.1 Métrique non-Euclidienne des processus autorégressifs

On peut particulariser cette métrique hybride dans le cas des modèles autoregressifs utilisés pour l'analyse Doppler du signal échographique ou radar complexe.

### 2.1.1 Groupe Affine et Groupe de Siegel

Dans le cas d'un modèle autoregressif, la matrice de corrélation et son inverse ont une structure blocs spécifique donnée par [4] :

$$R_n^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} \cdot A_{n-1}^+ \\ \alpha_{n-1} \cdot A_{n-1} & R_{n-1}^{-1} + \alpha_{n-1} \cdot A_{n-1} \cdot A_{n-1}^+ \end{bmatrix}$$

$$R_n = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}^{-1} + A_{n-1}^+ \cdot R_{n-1} \cdot A_{n-1} & -A_{n-1}^+ \cdot R_{n-1} \\ -R_{n-1} \cdot A_{n-1} & R_{n-1} \end{bmatrix}$$

avec  $\alpha_n^{-1} = [1 - |\mu_n|^2] \alpha_{n-1}^{-1}$  et  $A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_n \cdot \begin{bmatrix} A_{n-1}^{(-)} \\ 1 \end{bmatrix}$

On peut faire apparître la decomposition de Choleski de la matrice :

$$\Omega_n = (\alpha_n R_n)^{-1} = W_n W_n^+ = (1 - |\mu_n|^2) \begin{bmatrix} 1 & A_{n-1}^+ \\ A_{n-1} & \Omega_{n-1} + A_{n-1} \cdot A_{n-1}^+ \end{bmatrix}$$

avec  $W_n = \sqrt{1 - |\mu_n|^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ A_{n-1} & \Omega_{n-1}^{1/2} \end{bmatrix}$  et  $\Omega_{n-1} = \Omega_{n-1}^{1/2} \Omega_{n-1}^{1/2+}$

Toute distribution de variable n-dimensionnel est associée naturellement au groupe Affine [3] : c'est l'élément tel que son action sur le vecteur  $Z \sim N_n(0, I_n)$  le transforme en vecteur aléatoire  $X \sim N_n(A_n, \Omega_n)$  :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ A_{n-1} & \Omega_{n-1}^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & A_{n-1}^+ \\ \Omega_{n-1}^{1/2} \cdot Z + A_{n-1} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix}$$

On peut considerer cette representation des éléments du groupe affine comme la racine carrée non-symétrique d'un élément du groupe de Siegel :  $\begin{bmatrix} 1 & A_{n-1}^+ \\ A_{n-1} & \Omega_{n-1} + A_{n-1} \cdot A_{n-1}^+ \end{bmatrix}$ .

### 2.1.2 Métrique hyperbolique pour les coefficients de réflexion

Nous avons montré également dans [4], que dans le cas d'un processus autorégressif, cette métrique se déduit, à partir de la structure bloc précédente dans l'espace des coefficients de réflexions  $\mu_i$  (coefficient de PARCOR) faisant apparaître une géométrie hyperbolique de métrique suivante :

$$ds_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{d\alpha_k}{\alpha_k} \right)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|d\mu_k|^2}{1 - |\mu_k|^2} \quad \text{avec} \quad \alpha_i^{-1} = (1 - |\mu_i|^2) \alpha_{i-1}^{-1}$$

### 2.1.3 Opérateur de Laplace-Beltrami en statistique

Nous allons étendre l'approche de diffusion de Laplace-Beltrami dans un espace hybride faisant intervenir les métriques de la géométrie de l'information, ce qui nous donnera les équations de diffusion agissant sur les paramètres des lois statistiques. Nous allons ainsi étudier le plongement de la variété 2 dimensionnelle dans l'espace (2+n) dimensionnel  $\mathfrak{R}^2_{x\Theta}(n)$  (2 coordonnées x et y de l'espace Euclidien et n coordonnées de l'espace de Chentsov  $\theta$ ). Pour ce plongement, on définit la métrique hybride :

$$ds^2 = ds_{\mathfrak{R}^2}^2 + ds_{\Theta(n)}^2 = dx^2 + dy^2 + d\theta^T \cdot I(\theta) \cdot d\theta^2$$

### 2.1.4 Opérateur de Laplace-Beltrami dans le cas Gaussien

Comme exposé précédemment, dans le cas gaussien la métrique s'exprime en 1-D, comme  $ds^2 = dx^2 + \beta^2 (dv^2 + \sinh(v)^2 \cdot d\theta^2)$

où  $\beta$  est un paramètre permettant de contrôler la préservation des discontinuités. A partir de cette métrique, on obtient les deux tenseurs :

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \sinh(v) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f = [1 + \beta^2 (v_x^2 + \sinh(v)^2 \cdot \theta_x^2)]$$

En posant  $W^1 = v$  et  $W^2 = \theta$ , il apparait que tous les termes de Levi-Civita sont nuls sauf :  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \coth(\sinh(v))$ .

Finalement, les équations de Beltrami s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} v_t = \frac{\Delta v}{(1 + \beta^2 (v_x^2 + \sinh^2(v) \theta_x^2))^2} \\ \theta_t = \frac{\Delta \theta}{(1 + \beta^2 (v_x^2 + \sinh^2(v) \theta_x^2))^2} + 2 \coth(\sinh(v)) v_x \theta_x \end{cases}$$

## 3 Schéma numérique de diffusion anisotrope Doppler

Pour terminer, nous allons présenter un algorithme de lissage du spectre autoregressif Doppler, sur des données échographiques ou radar.

### 3.1 Opérateur de Laplace-Beltrami agissant sur les coefficients de réflexion

Le lissage du spectre autoregressif va nécessiter le lissage de deux composantes : la puissance du spectre et la forme du spectre. Dans ce but, nous allons séparer en deux composantes la métrique de Chentsov associée à ce problème (cf 2.1.2).

#### 3.1.1 Lissage anisotrope de l'amplitude : lisseur entropique

Dans un premier temps, nous allons travailler sur la puissance d'erreur. En notant  $\alpha_k$  la puissance d'erreur à l'ordre k, la métrique associée est de la forme :

$$ds_n^2 = dx^2 + \sum_{k=0}^{n-1} (d \ln \alpha_k)^2 \quad \text{avec} \quad \alpha_i^{-1} = (1 - |\mu_i|^2) \alpha_{i-1}^{-1}$$

En posant  $v_k = \ln(\alpha_k)$  l'équation anisotrope de Beltrami devient finalement

$$v_t = \frac{v_{xx}}{\left( 1 + \beta^2 \sum_{k=0}^{n-1} (v_k)_x^2 \right)^2}$$

Cette dernière équation s'avère très simple à résoudre par les méthodes d'analyse numérique classiques.

#### 3.1.2 Lissage anisotrope en amplitude/phase : lisseur morphique de la « forme spectrale »

De la même façon, en notant  $\mu_k$ , les coefficients de réflexion (nombres complexes contenus dans le disque unité), nous obtenons la métrique élémentaire :

$$ds_n^2 = dx^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|d\mu_k|^2}{1 - |\mu_k|^2}$$

analytique de certains des coefficients du tenseur  $g$  nous empêche d'estimer les termes de Levi-Civita. Pour contourner ce problème, nous associons à chaque  $\mu_k$ , sa représentation polaire associée :  $\mu_k \leftrightarrow (\rho_k, \theta_k)$  ce qui transforme la métrique en :

$$ds_n^2 = dx^2 + \sum_{k=1}^{n-1} d(\arcsin(\rho_k))^2 + \tan^2(\rho_k)(d\theta_k)^2$$

Doté de cette métrique, et en posant  $u_k = \arcsin(|\mu_k|)$  les calculs conduisent finalement aux équations de lissage des coefficients de réflexion :

$$\begin{cases} \partial_x u_i = \frac{\left(-\frac{1}{2} g_x \partial_x u_i + g \partial_x^2 u_i\right)}{g^2} \\ \partial_x \theta_i = \frac{\left(-\frac{1}{2} g_x \partial_x \theta + g \partial_x^2 \theta\right)}{g^2} + 2 \left(\frac{1 - \tan^2 u_k}{\tan u_k}\right) g^{-1} \partial_x \theta_i \partial_x u_i \end{cases}$$

avec  $g = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\partial_x u_k)^2 + \tan^2(u_k)(\partial_x \theta_k)^2$

### 3.2 Réglage des paramètres $\beta$ et $dt$

La dernière difficulté reste à déterminer de façon automatique les coefficients  $\beta$  et  $dt$ . Le premier paramètre va contrôler la préservation des discontinuités, le second va contrôler la vitesse de diffusion.

Nous pouvons remarquer que dans tous les cas le déterminant  $g$ , peut s'écrire sous la forme  $1 + \beta^2(M_x)^2$  où  $M$  est une fonction réelle dépendant des paramètres à lisser. L'estimation de  $\beta$  doit nous permettre de lisser fortement les zones homogènes ( $M_x$  faible) tout en préservant les discontinuités ( $M_x$  fort). Par une estimation statique de  $M_x$ , (inégalité de Markov) nous pouvons estimer  $\beta \propto \frac{T}{E[|M_x|]}$ . Avec  $T$  une constante comprise en 0 et 1 assimilable à un taux de préservation des discontinuités.

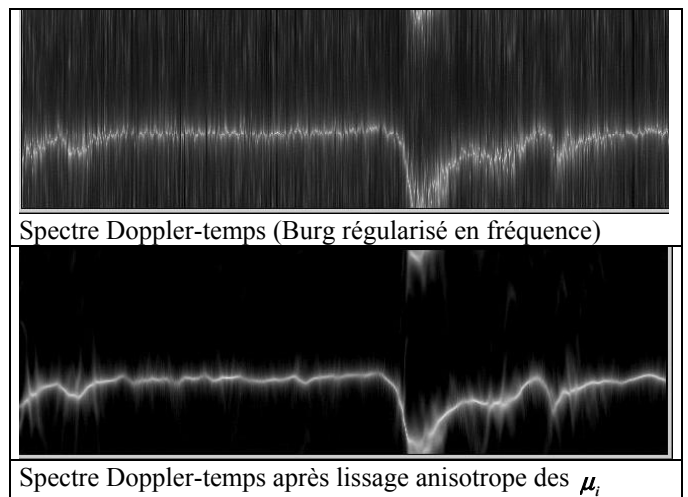
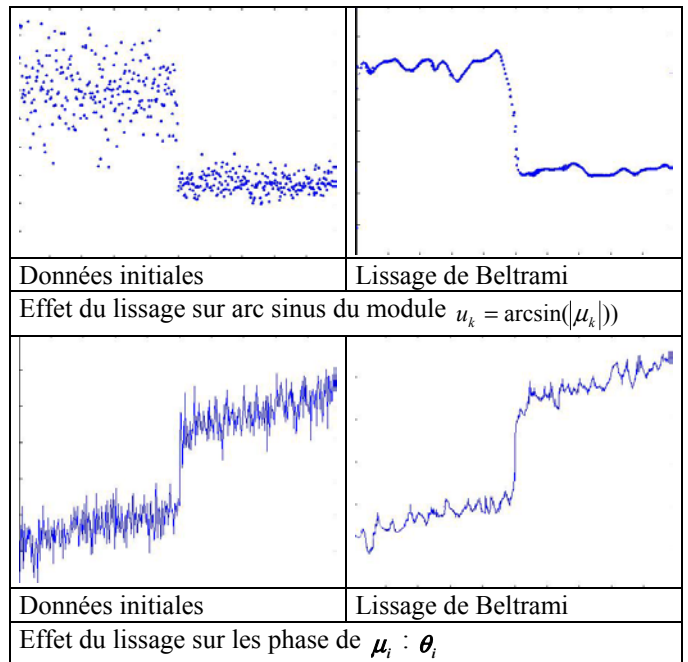
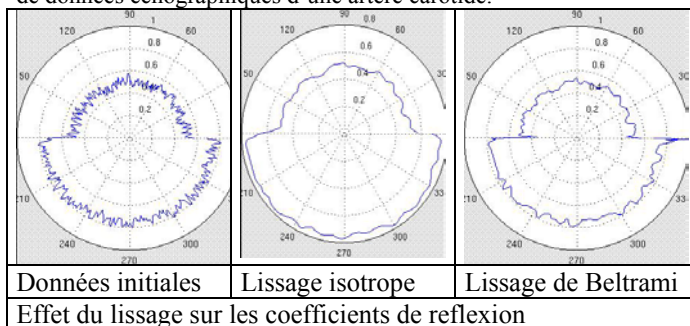
Le différentiel de temps «  $dt$  » utilisé lors de la linéarisation de l'équation différentielle est relativement important. S'il est trop petit le lissage sera très faible, s'il est trop grand le lissage sera trop fort et détruira les discontinuités du signal.

En bornant la norme du résidu (signal lisse à la dernière itération moins signal original), nous trouvons une expression du type (pour lisser un signal noté  $v$ )  $dt \propto \frac{D \|v(.t=0)\|}{\beta \|\Delta_g v(.t=0)\|}$  où  $N$  est le nombre

d'itérations maximum,  $D$  un coefficient de lissage compris entre 0 et 1, et  $\Delta_g$  est l'opérateur de Beltrami (termes de Levi Civita inclus)

### 3.3 Résultats sur données Réelles et simulées

Nous présentons en premier lieu les résultats de diffusion anisotrope de données synthétiques, présentant en distance des ruptures de module et de phase dans le disque unité (représentation dans le disque, ou module et phase). Ensuite, nous donnons le résultat pour un lissage anisotrope sur un spectre Doppler/Temps de données échographiques d'une artère carotide.



## 4 Vers une thermodynamique des formes

Il est possible d'étendre l'approche du flot de Beltrami sur les variétés de forme introduites par D.G. Kendall [5], basées sur la métrique de Fubini-Study. Comme le précisait Edgar Morin : « *Il nous manque cette thermodynamique des formes nécessaire selon Thom à une véritable théorie de l'information* ».

### Références

[1] N.N. Chentsov, « *Statistical decision rules and optimal inferences* », Translation of Math. Monog. 53 (Amer. Math Society, Providence, 1982)

[2] R. Kimmel, N. Sochen « *Orientation Diffusion or How to Comb a Porcupine* », Journal of Visual Communication and Image Representation, vol. 13, pp.238-248, 2002

[3] M. Calvo & J. Oller, « *A Distance Between Multivariate Normal Distributions in an Embedding into the Siegel Group* », Journal of Multi. Analysis, vol. 35, n°2, pp.223-242, Nov. 1990

[4] F. Barbaresco, « *Half-Quadratic Regularization & Recursive Siegel Metric Based on Information Riemannian Geometry* », PSIP'99, Paris, January 1999.

[5] D.G. Kendall & al, "Shape and Shape Theory", Wiley, Janvier 2002