# Développements d'Edgeworth pour les statistiques linéaires de processus linéaires à courte et longue mémoire


Gilles FAŸ[1], Eric MOULINES[2], Philippe SOULIER[3]

[1]Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex 00, France

[2]Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications
46 rue Barrault, 75634 Paris, France

[3]Laboratoire de Probabilité, Evry Val d'Essonne
gilles.fay@univ-lille1.fr, eric.moulines@enst.fr, soulier@maths.univ-evry.fr



**Résumé –** Dans cette contribution nous établissons la validité du développement d'Edgeworth de la densité de probabilité d'une statistique linéaire (renormalisée de façon adéquate) d'un processus linéaire au sens strict. Contrairement aux travaux précédents sur ce sujet, les résultats que nous obtenons restent valables pour des processus à mémoire longue; diverses applications sont présentés dont le développement de la loi de la moyenne empirique d'un processus à longue mémoire et l'étude du risque quadratique d'un estimateur du coefficient de longue mémoire, s'exprimant comme une fonctionnelle non linéaire du périodogramme



**Abstract –** The validity of the Edgeworth expansion for densities of linear statistics of linear processes is proved. In contrast with previous works on Edgeworth expansions for dependent processes, this result is valid under long range dependence. Several applications are presented including the expansion of the sample mean of a long-memory process and the derivation of the quadratic risk of an estimator of the long-memory coefficient based on log-periodogram regression


La validité du développement d'Edgeworth pour des fonctionnelles de la forme

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right]$$

où $\phi$ est une fonction régulière a été prouvée pour des suites $\{X_t\}_{t\geq 0}$ fortement mélangeantes, avec un coefficient de mélange tendant vers $0$ à une certaine vitesse (voir par exemple Götze and Hipp (1983), Götze and Hipp (1994) pour les vitesses exponentielles; voir les travaux récents de Lahiri (1996) pour l'extension au cas des vitesses polynomiales).

L'utilisation des conditions de mélange autorise des structures de dépendance complexes et en particulier des dynamiques non-linéaires (modèles autorégressifs fonctionnels, modèles bilinéaires, etc.); en revanche, les hypothèses techniques sous lesquelles ces résultats ont été obtenus ne permettent pas à ce jour de traiter une classe de processus dont l'importance s'est considérablement affirmée au cours des dernières années, à savoir les processus à longue mémoire Doukhan et al. (2002).

Nous nous proposons d'étendre les résultats précédents dans deux directions; notre premier objectif est de pourvoir considérer des fonctionnelles singulières, par exemple, d'établir la validité du développement d'Edgeworth pour le logarithme du périodogramme

$$\mathbb{E}\left(\log\left|(2\pi n)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} X_t e^{-j\frac{2\pi k}{n}t}\right|\right)$$

qui intervient dans le calcul des coefficients cepstraux. L'étude de la validité des développements pour de telles fonctionnelles requiert de s'intéresser au développement de la densité, et d'obtenir les développements des fonctionnelles à partir du développement des densités. Notre second objectif est de couvrir des classes de processus plus générales que les processus fortement mélangeants, incluant en particulier certains types de processus à mémoire longue.

Nous avons réalisé ce programme pour une classe particulière de statistique et de processus. Plus précisément, nous avons limité notre étude

- aux fonctionnelles linéaires,

$$T_n = \sum_{t=1}^{n} b_{n,t} X_t \qquad (1)$$

  où $(b_{n,t})_{t\in\{1,\ldots,n\}}$ sont des coefficients déterministes vectoriels; les résultats que nous avons obtenus couvrent en particulier la moyenne empirique, les coefficients de Fourier, mais aussi les coefficients d'ondelettes, etc.

- aux processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ linéaires au sens strict.

Rappelons que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus linéaire au sens strict s'il admet une représentation sous la forme d'une moyenne mobile infinie (non nécessairement causale) :

$$X_t = \sum_{t\in\mathbb{Z}} \psi_j Z_{t-j}, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j^2 < \infty, \qquad (2)$$

où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont des variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), que nous supposerons de plus de moyenne nulle et de variance unité. Cette classe de processus inclut à la fois les processus ARMA et leurs variantes fractionnaires, les processus ARFIMA. Pour les processus ARMA, les coefficients $\psi_j$ décroissent à une vitesse exponentielle et donc $\sum_j |\psi_j| < \infty$. Pour les processus ARFIMA, les coefficients $\psi_j$ décroissent de façon hyperbolique, $\psi_j \sim cj^{d-1}$ quand $j \to \infty$, pour $d \in (-1/2, 1/2)$. Lorsque $d \in (0, 1/2)$, nous avons en particulier $\sum_j |\psi_j| = \infty$. De tels processus sont dits à *mémoire longue*.

Afin d'étudier le développement de fonctionnelles non nécessairement régulières, nous établirons la validité du développement d'Edgeworth de la densité de probabilité de la variable aléatoire $T_n$. La remarque clef qui sous-tend ce travail est qu'il est possible de réécrire :

$$T_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} U_{n,j} Z_j$$

avec $U_{n,j} = \sum_{t=1}^n b_{n,t}\psi_{t-j}$. Ainsi, le problème que nous nous posons revient à étudier la validité d'un développement d'Edgeworth de la densité d'une somme infinie pondérée de variables i.i.d. La principale difficulté de cette approche provient du fait que nous n'excluons pas a priori que $\sum_j |U_{n,j}| = \infty$, pour pouvoir prendre en compte la mémoire longue.

# 1 Développements d'Edgeworth

Pour pouvoir présenter les résultats, nous aurons besoin de notations que nous empruntons à Bhattacharya and Rao (1976). Soit $d$ un entier naturel. Pour $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in \mathbb{N}^d$ et $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d$, nous notons $|\boldsymbol{\nu}| = \sum_{i=1}^d \nu_i$, $\boldsymbol{\nu}! = \nu_1!\nu_2!\cdots\nu_d!$ et $\mathbf{z}^{\boldsymbol{\nu}} = z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2}\cdots z_d^{\nu_d}$. Soit $\boldsymbol{\chi} = \{\chi_{\boldsymbol{\nu}};\ \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{N}^d\}$ un ensemble de nombres réels. Pour tout entier $r \geq 2$ et tout $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d$, définissons

$$\chi_r(\mathbf{z}) := r! \sum_{|\boldsymbol{\nu}|=r} \frac{\chi_{\boldsymbol{\nu}}\, \mathbf{z}^{\boldsymbol{\nu}}}{\boldsymbol{\nu}!}. \tag{3}$$

Soit $\tilde{P}_r(\mathbf{z}, \boldsymbol{\chi})$ les polynômes définis, pour $r \geq 1$, par l'identité :

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \tilde{P}_r(\mathbf{z}, \boldsymbol{\chi}) u^r &= \exp\Big\{\sum_{r=3}^{\infty} \frac{\chi_r(\mathbf{z})}{r!} u^{r-2}\Big\} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\Big(\sum_{r=3}^{\infty} \frac{\chi_r(\mathbf{z})}{r!} u^{r-2}\Big)^m, \end{aligned}$$

et posons $\tilde{P}_0 \equiv 0$ (voir Bhattacharya and Rao (1976) p.52). Notons par $\phi_{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$ la densité d'une variable gaussienne $d$-dimensionnelle de moyenne nulle et de matrice de covariance (non singulière) $\mathbf{V}$ et par $\hat{\phi}_{\mathbf{V}}(\mathbf{t})$ la transformé de Fourier de $\phi_{\mathbf{V}}$. Notons finalement $P_r : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$P_r(\mathbf{x}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\chi}) = \Big[\tilde{P}_r(-D, \boldsymbol{\chi})\Big]\, \phi_{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) \tag{4}$$

où, pour tout polynôme $P(\mathbf{z}) = \sum_{\boldsymbol{\nu}} a_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{z}^{\boldsymbol{\nu}}$, $P(-D)$ est le polynôme en l'opérateur de différentiation $D$,

$$P(-D) = \sum_{\boldsymbol{\nu}} a_{\boldsymbol{\nu}} (-1)^{|\boldsymbol{\nu}|} D^{\boldsymbol{\nu}}$$

$$D^{\boldsymbol{\nu}} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\nu}|}}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_d^{\nu_d}}, \qquad \boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in \mathbb{N}^d.$$

Notons que par construction $\tilde{P}_r(i\mathbf{t}, \boldsymbol{\chi}) e^{-\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}/2}$ est la transformée de Fourier de $P_r(\mathbf{x}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\chi})$.

Soit $(Z_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite de v.a. i.i.d. telles que $\mathbb{E}[Z_1] = 0$, $\mathbb{E}[Z_1^2] = 1$ et $\mathbb{E}[|Z_1|^s] < \infty$, pour un entier $s \geq 3$. Notons $\hat{Q}(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tZ_1}]$ la fonction caractéristique de $Z_1$. Pour tout entier $j \leq s$, définissons les cumulants

$$\kappa_j = \mathrm{cum}(\underbrace{Z_1, \ldots, Z_1}_{j \text{ fois}}) = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dt^j} \log \hat{Q}(t)\Big|_{t=0}.$$

Soit $\{\mathbf{U}_{n,j}\}_{n\geq 1, j\in\mathbb{Z}}$ un tableau triangulaire de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ tels que, pour tout $n$,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^2 < \infty,$$

où $\|\mathbf{x}\|$ est la norme euclidienne du vecteur $\mathbf{x}$ dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbf{x}'$ est le transposé de $\mathbf{x}$. Considérons

$$\mathbf{T}_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} Z_j \ \text{ et } \ \mathbf{V}_n = \mathbb{E}[\mathbf{T}_n \mathbf{T}_n'] = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} \mathbf{U}_{n,j}' \tag{5}$$

et notons $\hat{Q}_n(\mathbf{t}) = \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}\mathbf{t}'\mathbf{T}_n}]$ la fonction caractéristique de $\mathbf{T}_n$. Pour tout $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{N}^d$ tel que $2 \leq |\boldsymbol{\nu}| \leq s$, le cumulant d'ordre $\boldsymbol{\nu}$ de $\mathbf{T}_n$, $\chi_{n,\boldsymbol{\nu}}$, est donné par :

$$\chi_{n,\boldsymbol{\nu}} := \frac{1}{\boldsymbol{\nu}!} D^{\boldsymbol{\nu}} \log \hat{Q}_n(\mathbf{t})\Big|_{\mathbf{t}=0} = \kappa_{|\boldsymbol{\nu}|} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j}^{\boldsymbol{\nu}}.$$

Notons $\lambda_{\min}(M)$ et $\lambda_{\max}(M)$ les valeurs propres minimales et maximales de la matrice $M$. Considérons les hypothèses suivantes :

**(A1)** $(s, p, k)$ $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite i.i.d. de variables telle que

$$\mathbb{E}[|Z_1|^s] < \infty \ \text{ et } \int_{\mathbb{R}} |t|^k\, |\hat{Q}(t)|^p\, \mathrm{d}t < \infty.$$

**(A2)** Il existe des constantes positives $\lambda^* \leq \Lambda^*$ telles que

$$\lambda^* \leq \liminf_n \lambda_{\min}(\mathbf{V}_n) \leq \limsup_n \lambda_{\max}(\mathbf{V}_n) \leq \Lambda^*.$$

**(A3)** Il existe des constantes positives $\eta$, $c_0$, une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de nombres positifs, une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de sous-ensembles de $\mathbb{Z}$, tels que, pour $n \geq 0$ :

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\| \leq M_n \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0 \tag{7}$$

$$\mathrm{card}(J_n) \leq c_0 M_n^{-2} \quad \text{ et } \quad \frac{\sum_{j\in J_n} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^2}{\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^2} \geq \eta. \tag{8}$$

**(A4)** Il existe $\tau \geq 1$ et une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ vérifiant (6) telle que

$$\sup_{n\geq 0} M_n^\tau \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\| < \infty.$$

*Remarque* 1. L'hypothèse **(A1)**$(s, q, k)$ est un renforcement de la condition de Cramér sur la regularité de la distribution qui est importante dans la preuve pour traiter le cas où $\sum_j |\mathbf{U}_{n,j}| = \infty$. Cette condition est satisfaite toutefois par toutes les distributions continues d'intérêt. La condition **(A3)** implique la négligibilité asymptotique uniforme. Les conditions (6) et (7) impliquent que $\mathbf{V}_n^{-1/2}\mathbf{T}_n$ converge faiblement vers une loi gaussienne $d$-dimensionnelle de covariance identité.

**Théorème 1.** *Soit $s \geq 3$ et $k \geq 0$ deux entiers et $p \geq 1$ un nombre réel. Supposons* **(A1)**$(s, p, k)$*,* **(A2)** *et* **(A3)***. Si $k < s$, supposons de plus* **(A4)***. Alors, il existe une constante $C$ et un entier $N$ (dépendant uniquement de la distribution de $Z_1$, et des différentes constantes apparaissant dans les hypothèses) telles que, pour tout $n \geq N$, la distribution de $\mathbf{T}_n$ admet une densité $q_n$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ qui satisfait*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} (1 + \|\mathbf{x}\|^s) \Big| q_n(\mathbf{x}) - \sum_{r=0}^{s-3} P_r(\mathbf{x}, \mathbf{V}_n, \{\chi_{n,\boldsymbol{\nu}}\}) \Big| \leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s. \quad (9)$$

# 2 Applications

## 2.1 Développement d'Edgeworth de la moyenne

Pour illustrer le résultat énoncé par le Théorème 1, considérons tout d'abord le développement d'Edgeworth de la moyenne d'un processus linéaire (2), étendant ainsi les résultats obtenus par Hall (1992) qui a caractérisé les vitesses de convergence, dans le théorème de la limite centrale, des moyennes de processus MA($\infty$) sous des conditions impliquant la longue mémoire.

Définissons $v_n = \mathrm{var}(\sum_{t=1}^n X_t)$ et

$$\mathbf{T}_n = v_n^{-1/2} \sum_{t=1}^n X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} Z_j,$$

où

$$\mathbf{U}_{n,j} = v_n^{-1/2} \sum_{t=1}^n \psi_{t-j}.$$

Puisque $\mathbf{V}_n := \mathrm{var}(\mathbf{T}_n) = 1$, **(A2)** est vérifiée (avec $\lambda^* = \Lambda^* = 1$). Les hypothèses (6) et (7) sont vérifiées dès que $v_n \to \infty$ (voir Ibragimov and Linnik, 1971, Theorem 18.6.5).

Pour vérifier que $v_n \to \infty$ et (8), nous avons besoin de spécifier le comportement de $\psi_j$ lorsque $j \to \infty$. Nous supposons que pour une constante $1/2 < H < 1$, nous avons :

$$\psi_j = 0 \quad \text{pour } j < 0, \quad \psi_j = j^{H-3/2} l(j), \quad \text{pour } j > 0 \quad (10)$$

où $x \to l(x)$ est une fonction à variation lente à l'infini. Cette condition est vérifiée en particulier pour les processus ARFIMA($p, H - 1/2, q$). Un tel processus est à mémoire longue et l'hypothèse **(A4)** n'est pas vérifiée. Dans la suite de l'exposé, nous noterons par $C$ une constante qui peut prendre des valeurs différentes lors de ses différentes apparitions. En utilisant des résultats classiques sur les fonctions à variations lentes (voir Hall (1992)), on peut montrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{v_n}{n^{2H} l(n)^2} = \frac{\Gamma(H-1/2)\Gamma(2-2H)}{(H-1/2)\Gamma(3/2-H)},$$

Donc, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n$ suffisamment grand, $v_n \geq C n^{2H} l(n)^2$. Sous l'hypothèse (10), nous avons :

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{t=1}^n \psi_{t-j} \right| = O(n^{H-1/2} l(n)).$$

Donc, (6) est vérifiée avec $M_n = C n^{-1/2}$ pour une certaine constante $C$. Pour $\gamma \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, définissons $J_n(\gamma) = \{j \in \mathbb{Z}, -\gamma n \leq j \leq \gamma n\}$. Par construction, pour $n \geq 1$,

$$\mathrm{card}(J_n(\gamma)) \leq 2\gamma(n+1) \leq C M_n^{-2}$$

et pour tout $n$ suffisamment grand,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus J_n(\gamma)} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^2 \leq C n^{-2H} (l(n))^{-2} \sum_{j > \gamma n} \left| \sum_{t=1}^n \psi_{t+j} \right|^2 \leq C n^{2-2H} \sum_{j > \gamma n} j^{2H-3} \leq C(\gamma - 1)^{2H-2}.$$

Pour tout $\eta \in (0,1)$, nous pouvons choisir $\gamma$ tel que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus J_n(\gamma)} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^2 \leq C \gamma^{2H-2} \leq 1 - \eta.$$

Donc, **(A3)** est vérifiée. Finalement, sous **(A1)**$(s, p, s)$, notre résultat prouve la validité du développement d'Edgeworth de la densité $q_n$ de la moyenne empirique d'un processus à mémoire longue. Par exemple, pour $s = 4$, nous pouvons déterminer le premier terme de correction de la densité (Hall, 1992, Theorem 2.1) :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^4) \big| q_n(x) - \phi(x) - \frac{1}{6} c(H)\, n^{-1/2}\, \mathbb{E}[Z_1^3](1 - x^2)\phi(x) \big| = O(n^{-1})$$

où $c(H)$ est donné, pour $1/2 \leq H < 1$, par

$$c(H) = \frac{1}{-1/2 + 3H} + \Gamma(1/2 - 3H) \Big( \frac{1}{\Gamma(3/2 - 3H)} - \frac{3\Gamma(1/2 + H)}{\Gamma(1 - 2H)} + \frac{3\Gamma(2H)}{\Gamma(1/2 - H)} \Big)$$

## 2.2 Applications à l'estimateur GPH

Un des estimateurs les plus couramment utilisés du paramètre de longue mémoire $d$ est l'estimateur introduit par Geweke and Porter-Hudak (1983), surnommé GPH. Il est fondé sur le calcul des paramètres de la régression linéaire du log-périodogramme des observations par rapport au logarithme des fréquences; rappelons en effet qu'au voisinage de la fréquence nulle la densité spectrale d'un processus à mémoire longue est de la forme

$$f(\lambda) \approx C \lambda^{-2d} \quad \lambda \to 0^+.$$

En prenant le logarithme de cette relation, nous avons

$$\log f(\lambda) \approx \log C - d(2 \log(\lambda)) \quad \lambda \to 0^+$$

et donc $\log f(\lambda)$ dépend localement linéairement de la log-fréquence, la pente étant le coefficient de différentiation fractionnaire. Giraitis et al. (1997) ont prouvé que l'estimateur GPH était optimal au sens minimax pour une classe adéquate de densités spectrales lorsque $X$ était un processus gaussien. Pour calculer le risque de l'estimateur GPH, il est nécessaire d'évaluer (ou plutôt d'approcher) les moments d'ordre 2 du log-periodogramme. Le log-périodogramme est une fonction non-régulière de la transformée de Fourier des observations; cette transformée de Fourier est gaussienne lorsque le processus est lui-même gaussien. La preuve de Giraitis et al. (1997)

repose dans ce cadre sur des bornes de moments de fonctions non-linéaires de variables gaussiennes. Cette méthode de preuve ne s'étend pas aux processus non-gaussiens.

Sous l'hypothèse que $X$ est un processus linéaire par rapport à une suite i.i.d. $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, nous pouvons utiliser les résultats que nous avons obtenus précédemment pour développer la densité de la distribution de la transformée de Fourier des observations $X_1,\dots,X_n$. En effet, la transformée de Fourier est une statistique linéaire et les coefficients de Fourier peuvent s'écrire dans ce cas sous la forme d'un tableau triangulaire infini de variables i.i.d. $(Z_t)_{t\geq 0}$. Ceci permet en retour de déterminer des développements de fonctionnelles non-régulières de la transformée de Fourier et en particulier d'évaluer des développements des moments du log-periodogramme, étendant ainsi les travaux de Janas and von Sachs (1995))

Pour établir le résultat, nous sommes amené à faire des hypothèses à la fois sur la fonction de transfert $\psi(\lambda) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\lambda}$ et sur les coefficients de la réponse impulsionnelle $(\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$. Pour $\vartheta \in (0,\pi)$, $\beta > 0$, $\delta \in [0,1/2)$ et $\mu > 0$, soit $\mathcal{F}(\vartheta,\beta,\delta,\mu)$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes $\psi$ définies sur $[-\pi,\pi]$ telles qu'il existe $d \in [-1/2,\delta]$ et une fonction mesurable $\psi^*$ vérifiant :

$$\psi(\lambda) = (1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda})^{-d}\psi^*(\lambda), \quad \psi^*(-\lambda) = \bar{\psi}^*(\lambda), \tag{11}$$

$$\frac{\int_0^\pi |\psi^*(\lambda)|\,\mathrm{d}\lambda}{\min_{0\leq|\lambda|\leq\vartheta}|\psi^*(\lambda)|} \leq \mu, \quad \left|\frac{\psi^*(\lambda)}{\psi^*(0)} - 1\right| \leq \mu|\lambda|^\beta, \tag{12}$$

$$\forall j \geq 0, \ \frac{\sum_{|t|\geq j}^\infty |\psi_{t+1} - \psi_t|}{\min_{0\leq\lambda\leq\vartheta}|\psi^*(\lambda)|} \leq \mu(1+j)^{d-1}. \tag{13}$$

où $\bar{z}$ est le conjugué $z$. Cette classe est très générale et inclut en particulier les processus FARIMA de tous ordres et aussi les processus FEXP (voir Doukhan et al., 2002).

Soit $(h_{t,n})_{1\leq t\leq n}$ un tableau triangulaire de nombres complexes. La transformée de Fourier discrète (DFT) fenêtrée de $(X_1,\dots,X_n)$ à la fréquence $\lambda \in [-\pi,\pi]$ est définie par :

$$d_{n,h}(\lambda) := (2\pi\sum_{t=1}^n |h_{t,n}|^2)^{-1/2}\sum_{t=1}^n h_{t,n}X_t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}.$$

Dans la suite, nous prendrons $h_{t,n} = 1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t/n}$, mais les résultats s'étendent aisément à des fenêtres plus générales. L'estimateur GPH que nous considérons est obtenu en régressant $\log(I_{2k})$ sur $\log(k)$ pour $k = 1,\dots,m$:

$$(\hat{d}_m,\hat{C}) = \arg\min_{d',C}\sum_{k=1}^m \{\log(I_{2k}) + 2d'\log(k) - C\}^2.$$

où nous notons $I_k = |d_{n,h}(\lambda_k)|^2$. Il s'exprime simplement comme une combinaison linéaire de coefficients du log-périodogramme:

$$\hat{d}_m = s_m^{-2}\sum_{k=1}^m \nu_k \log(I_k), \tag{14}$$

avec $\nu_k = 2\log(k) - 2m^{-1}\sum_{j=1}^m \log(j)$ et $s_m^2 = \sum_{k=1}^m \nu_k^2$.

**Théorème 2.** *Soit $Z$ une suite de v.a. i.i.d. vérifiant* **(A1)** *avec $s \geq 5$ et $p \geq 1$. Soit $X$ un processus linéaire par rapport à $Z$, tel que $\psi \in \mathcal{F}(\vartheta,\beta,\delta,\mu)$. Soit $m = m(n)$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} 1/m + m/n = 0$. Il existe une constante $C$ qui dépend seulement de $\beta$, $\delta$, $\vartheta$, $\mu$ et de la distribution de $Z_1$ telle que*

$$\mathbb{E}[(\hat{d}_m - d)^2] \leq C\left\{\left(\frac{m}{n}\right)^{2\beta} + \frac{1}{m}\right\}.$$

*Remarque* 2. En prenant $m$ proportionnel à $n^{2\beta/(2\beta+1)}$, nous avons donc que $\mathbb{E}[(\hat{d}_m - d)^2] \leq Cn^{-2\beta/(2\beta+1)}$. qui est aussi la vitesse minimax optimale dans la classe $\mathcal{F}(\vartheta,\beta,\delta,\mu)$ pour les processus gaussiens. Le Théorème 2 montre que ce résultat reste valide pour des processus linéaires non gaussiens.

# References


R. Bhattacharya et R. R. Rao (1976). *Normal approximation and asymptotic expansions*. Wiley, 1st edition.

P. Doukhan, G. Oppenheim et M. Taqqu, editors (2002). *Long-range Dependence: Theory and Applications*. Birkhäuser.

G. Faÿ, E. Moulines, Ph. Soulier (2003). Asymtotic expansions for discrete Fourier transform of a linear process. *Publications IRMA, Université de Lille-1*

J. Geweke et S. Porter-Hudak (1983). The estimation and application of long memory time series models. *J. of Time Series Analysis*, 4:221–238.

L. Giraitis, P. Robinson et A. Samarov (1997). Rate optimal semiparametric estimation of the memory parameter of the Gaussian time series with long range dependence. *J. of Time Series Analysis*, 18:49–61.

F. Götze et C. Hipp (1983). Asymptotic expansions for sum of weakly dependent random vectors. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 64:211–239.

F. Götze et C. Hipp (1994). Asymptotic expansions for statistics in time series. *Annals of statistics*, 22:211–239.

C. Granger et R. Joyeux (1980). An introduction to long memory time series and fractional differencing. *J. of Time Series Analysis*, 1:15–30.

P. Hall (1992). Convergence rates in the central limit theorem for means of autoregressive and moving average sequences. *Stochastic Processes Appl.*, 43(1):115–131.

C. M. Hurvich et K. I. Beltrao (1993). Asymptotics for the low-frequency ordinates of the periodogram of a long- memory time series. *J. Time Ser. Anal.*, 14(5):455–472.

I. Ibragimov et Y. Linnik (1971). *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*. Wolters-Noordhorf, Groningen.

D. Janas et R. von Sachs (1995). Consistency for non-linear functions of the periodogram of tapered data. *J. of Time Series Analysis*, 16:585–606.

S. N. Lahiri (1996). Asymptotic expansions for sums of random vectors under polynomial mixing rates. *Sankhyā Ser. A*, 58(2):206–224.