

# Algorithmes d'estimation de la fréquence de fonctions périodiques inconnues et applications à la vibrométrie laser

Céline LÉVY-LEDUC

Equipe de probabilités, statistique et modélisation  
Bât 425, Université Paris-Sud ORSAY

et

Thalès Optronique

Rue Guynemer BP55 78283 Guyancourt Cédex

celine.levy-leduc@math.u-psud.fr, celine.levy-leduc@fr.thalesgroup.com

**Résumé** – Les méthodes permettant d'estimer la fréquence de signaux particuliers tels que les sinusoides ou les polynômes trigonométriques noyés dans du bruit ne fonctionnent plus pour les signaux périodiques généraux dont le spectre est composé d'un grand nombre d'harmoniques. En utilisant le périodogramme cumulé des observations nous proposons une méthode de sélection de modèles pour estimer la fréquence du signal inconnu. Nous appliquons notre méthode à des signaux issus de la vibrométrie laser et nous comparons les performances de notre méthode à celles d'une technique fréquemment utilisée dans ce domaine : le micro-doppler. On montre, de plus, que notre méthode fondée sur le périodogramme fournit une estimation précise de la fréquence cherchée à de faibles rapports signal sur bruit.

**Abstract** – The commonly used methods for frequency estimation of particular signals such as sinusoids or trigonometric polynomials embedded in white noise do not work anymore when we have to deal with periodic signals whose spectra possesses a large number of harmonics. Using the cumulated periodogram of the observed signal, we propose a model selection procedure for estimating the fundamental frequency of the non observed signal. We consider an application in laser vibrometry and compare the performances of our procedure with the so-called micro-doppler technique. We show that the cumulated periodogram method yields an accurate estimation at low signal to noise ratio.

## 1 Introduction

Nous nous sommes intéressés au problème suivant : on dispose de  $n$  observations  $x_j$  pour  $1 \leq j \leq n$  qui satisfont

$$x_j = s(j\delta_n) + \varepsilon_j$$

où  $s$  est une fonction périodique de forme inconnue et de fréquence  $f_s$ , les  $\varepsilon_j$  sont des variables aléatoires indépendantes de variance  $\sigma^2$  inconnue et  $\delta_n$  est la période d'échantillonnage. Notre but est d'estimer la fréquence  $f_s$  de  $s$ .

On a choisi le modèle précédent car les signaux intervenant en vibrométrie laser ont, pour une vibration sinusoidale, la forme suivante pour des  $a_l$  complexes et des  $c_l$  réels :

$$s(t) = \sum_{l=1}^L a_l \exp(ic_l \cos(2\pi f_s t)) \quad (1)$$

On montre qu'ils peuvent "approcher" n'importe quel signal d'énergie finie de même période pour un  $L$  assez grand (propriété de densité). Ils ont de plus un très grand nombre de raies ou d'harmoniques car les  $c_l$  sont grands devant 1. Lorsqu'un tel signal est noyé dans du bruit, ses harmoniques sont invisibles individuellement. Un exemple d'un tel signal est donné dans la figure 1 pour  $f_s = 40\text{Hz}$ ,  $L = 1$ ,  $c = 360$ ,  $\delta_n = 1/n = 2^{-18}$ ,  $a = 0.06$  et  $\sigma^2 = 1$ .

Les études faites jusqu'à présent sur ce type de modèle se sont restreintes à des signaux  $s$  particuliers tels que les polynômes trigonométriques. Elles sont recensées dans le livre de Quinn et Hannan (c.f [7]). On trouve aussi des méthodes fondées sur des analyses temps-fréquence (par exemple microdoppler) qui

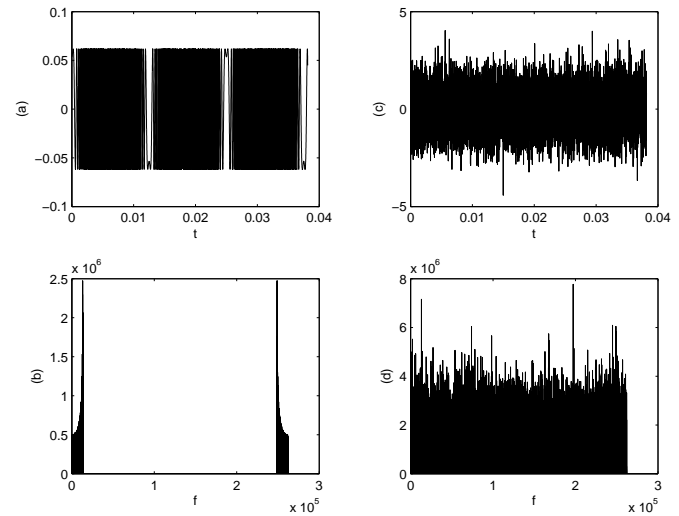


FIG. 1 – (a) partie imaginaire de  $s$ , (b) périodogramme de  $s$ , (c) partie imaginaire de  $x$ , (d) périodogramme de  $x$

visent à déterminer la fréquence instantanée du signal et ses variations au cours du temps.

## 2 Estimation de $f_s$

### 2.1 Définition de l'estimateur

On pose :

$$\Lambda_K(f) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=-K}^K \left| \sum_{j=1}^n e^{-2ik\pi j \delta_n f x_j} \right|^2$$

Cette quantité est appelée le périodogramme cumulé.

Si  $f^* = f^*(K) = \underset{f \in [f_{min}; f_{max}]}{\text{Arg Max}} \Lambda_K(f)$ , alors on prendra pour estimateur de  $f_s$ ,  $f_\varepsilon^* = n_\varepsilon f^*$  où  $n_\varepsilon$  est le plus grand entier  $n$  tel que  $\Lambda_K(nf) \geq (1 - \varepsilon)\Lambda_K(f)$  avec  $\varepsilon \in ]0; h[$ ,  $h$  satisfaisant la propriété suivante :

$$\exists h > 0, \forall m \geq 2, \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{mk}(s)|^2 \leq (1 - h) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(s)|^2$$

où  $c_k(s)$  est le  $k$ -ième coefficient de Fourier défini par :

$$c_k(s) = f_s \int_0^{1/f_s} e^{-2ik\pi f_s t} s(t) dt.$$

La maximisation du critère  $\Lambda_K$  peut être vue comme une approximation du critère des moindres carrés optimisé par rapport aux paramètres inconnus  $c_k(s)$  (cf [4]).

Remarquons que dès que l'on est à un  $msnr$  "suffisant" (typiquement 27dB),  $f^*(K)$  est selon les valeurs de  $K$  autour d'un multiple ou d'un sous-multiple de la vraie fréquence du signal  $s$ . Prenons l'exemple du signal  $s$  donné dans le paragraphe 1, nous donnons dans la table 1 les valeurs de  $f^*(K)$  pour toutes les valeurs de  $K$  envisagées. Rappelons que dans ce cas le nombre d'harmoniques significatifs vaut 334.

TAB. 1 – Maximisant du périodogramme cumulé en fonction de  $K$

$K$	[40;266[	[265;675[	[675;727[	[727;775[
$\hat{f}(K)$	80	40	20	40

### 2.2 Résultats théoriques

Sous les hypothèses suivantes :  $K = K(n) \rightarrow +\infty$ ,  $n\delta_n \rightarrow +\infty$  et  $\delta_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on montre dans [1], à partir des idées exposées par Golubev ([2]), que  $f_\varepsilon^*$  est un estimateur consistant et asymptotiquement efficace de  $f_s$  et on quantifie la dégradation au niveau de la performance de l'estimation de  $f_s$  provoquée par la méconnaissance de  $s$ .

Cependant, en pratique, le choix de  $\varepsilon$  et de  $K(n)$  n'étant pas du tout trivial, on a mis en place une méthode d'estimation par pénalisation fondée sur les mêmes idées que celles qui ont permis de construire  $f_\varepsilon^*$ .

### 2.3 Pénalisation

Notre idée est de remplacer  $s$  par un polynôme trigonométrique de degré suffisamment grand pour approximer  $s$  de façon convenable. Un bon choix pour  $K$  correspondrait alors au nombre

inconnu d'harmoniques de  $s$ . La méthode proposée ci-dessous permet de trouver de manière adaptative le nombre d'harmoniques de  $s$  par une méthode de pénalisation inspirée par celle exposée dans [3].

Pour  $K$  fixé, rappelons que

$$f^*(K) = \underset{f \in [f_{min}; f_{max}]}{\text{Arg Max}} \Lambda_K(f).$$

On choisit  $K$  de la façon suivante :

$$\hat{K}_\beta = \underset{K}{\text{Arg Max}} \{ \Lambda_K(f^*(K)) - \beta K \}.$$

L'introduction de la pénalité  $\beta K$  doit être vue comme un moyen de réaliser un compromis entre le respect des données et le nombre d'harmoniques à utiliser pour reconstituer le signal  $s$  inconnu.

Remarquons que plus  $\beta$  est grand plus  $\hat{K}_\beta$  est petit.

Soit,

$$\hat{f}_\beta = \underset{f}{\text{Arg Max}} \Lambda_{\hat{K}_\beta}(f).$$

A chacun des  $\hat{K}_\beta$  correspond donc un  $\hat{f}_\beta$  et une longueur  $l_\beta$  d'intervalle dans lequel se trouve  $\beta$ . Il se peut que des  $\beta$  différents conduisent au même estimateur  $\hat{f}$  de  $f_s$ .

Finalement, on prendra pour estimateur de  $f_s$ ,

$$\hat{f} = \hat{f}_\beta = \underset{\beta, \hat{f}_\beta = \hat{f}}{\text{Arg Max}} \sum l_\beta$$

## 3 Simulations

On a fait des simulations pour un signal de la forme (1) pour  $L = 1$ ,  $f_s = 46.5136\text{Hz}$ ,  $c = 360$ ,  $\delta_n = 1/n = 2^{-18}$ ,  $\sigma^2 = 1$  et pour différentes valeurs de  $msnr$ , le  $msnr$  (voir [6]) étant le rapport entre la puissance moyenne du signal i.e la somme des puissances de toutes les raies et la puissance moyenne du bruit dans une bande de fréquence égale à l'inverse du temps d'observation. Pour un signal de type (1), il

est défini par  $10 \log \left( \frac{n \sum_{i=1}^L a_i^2}{2\sigma^2} \right)$  et s'exprime en dB. Ainsi,

la valeur du  $msnr$  détermine la valeur de  $a_1$  quand  $L = 1$  puisque  $n$  est connu et égal à  $2^{18}$ . On a comparé notre méthode à une technique classiquement utilisée en vibrométrie laser : le micro-doppler ([5]). Cette comparaison est faite dans la table 2 grâce à l'évaluation du risque quadratique moyen défini ici

par :  $\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{100} (\hat{f}_j - f_s)^2}{100}}$  où les  $\hat{f}_j$  sont les différents estimateurs de  $f_s$  obtenus.

TAB. 2 – Risque quadratique moyen pour le micro-doppler ( $e_1$ ) et le périodogramme cumulé pénalisé ( $e_2$ ) pour différents  $msnr$

$msnr$	20	25	30	35	40	45
$e_1$	32.52	29.97	27.19	29.15	25.69	0.497
$e_2$	28.78	10.41	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004

Les différences de performances entre le micro-doppler et le périodogramme cumulé pénalisé peuvent s'expliquer par la

différence de nature des deux méthodes. En effet, le micro-doppler est une méthode de recherche de fréquence instantanée du signal ce qui pourrait expliquer que l'on ait besoin d'un rapport signal/bruit instantané important pour pouvoir faire du suivi de fréquence au cours du temps et donc d'un  $msnr$  plus important que celui requis pour le périodogramme cumulé pénalisé. Le risque quadratique moyen décroît extrêmement vite dès que  $msnr \geq 30\text{dB}$  puisque d'après ce que l'on a expliqué dans le paragraphe 2.1, à ce type de  $msnr$ , on est presque sûrs de trouver la bonne fréquence si notre pénalisation sélectionne une bonne valeur de  $K$ .

## 4 Extension

Des travaux sont actuellement en cours pour étendre les résultats précédents aussi bien théoriques que pratiques au cas où  $s$  est remplacé par une somme de plusieurs signaux périodiques de fréquences différentes et inconnues (c.f [4] et [1]).

**Remerciements :** L'auteur remercie la société Thalès Optronique et plus particulièrement Michel Prenat qui est à l'origine de cette étude.

## Références

- [1] E. Gassiat and C. Lévy-Leduc. Efficient semiparametric estimation of the periods in a superposition of periodic functions with unknown shape. To be submitted.
- [2] G. K. Golubev. Estimation of the period of a signal with an unknown form against a white noise background. *Problemy Peredachi Informatsii*, 24(4) :38–52, 1988.
- [3] M. Lavielle. Using penalized contrasts for the change-points problems. Submitted.
- [4] M. Lavielle and C. Lévy-Leduc. A model selection approach for estimating the period of periodic functions with unknown shape and applications in laser vibrometry. Submitted.
- [5] Millnert. Robust coherent laser radar design and signal processing for vibrometry. *SPIE*, 1996.
- [6] M. Prenat. Vibration modes and laser vibrometry performance in noise. *PSIP*, 2001.
- [7] B. G. Quinn and E. J. Hannan. *The estimation and tracking of frequency*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.