

Modèle variationnel de l'analyse autoregressive complexe et schémas numériques EDP associés

Frédéric BARBARESCO

THALES AIR DEFENCE, Unité de Développement Radar, Filière Algorithmes et Etudes Fonctionnelles

7/9, rue des Mathurins, F-92223 Bagneux Cedex, France

frederic.barbaresco@fr.thalesgroup.com

Résumé – Dans le cadre de la théorie globale des courbes planes fermées, c'est à dire l'étude des classes d'équivalences d'immersions du cercle complexe unité dans le plan Euclidien, nous proposons une formalisation variationnelle de la prédiction linéaire régularisée pour l'étude des séries temporelles courtes. L'équation de Yule-Walker s'identifie alors à l'équation d'Euler-Lagrange du problème (solution d'une EDP de Fourier avec potentiel). L'approche se généralise au cepstre via la transformation de Bäcklund et conduit à une EDP de type Burgers. En utilisant la définition de la courbure algébrique d'une fonction complexe et le théorème d'Emmy Noether, nous déduisons également un nouveau schéma numérique EDP de type « Flot de courbure moyenne » agissant sur les coefficients de réflexion, qui s'étend aux courbes spatiales périodiques. Nous concluons en remarquant que la solution de l'équation de Fourier avec potentiel, par analogie avec l'équation de Schrödinger, est fournie par une intégrale de Wiener, mais est également solution de l'intégrale de chemin de Feynman-Kac.

Abstract – The global Closed plane curves theory, where curves are considered as an unit complex circle immersion in the Euclidean plane, is used to demonstrate that the regularized linear prediction model for short time series analysis can be solved by calculus of variation. Then, the Yule-Walker equation is identified with the Euler-Lagrange equation (solution of Fourier heat PDE with potential). This approach can be extended to cepstrum analysis with the Bäcklund transform and leads to a Burgers PDE. The Algebraic curvature definition and Emmy Noether theorem provides a new PDE numerical scheme based on Mean-Curvature flow that drives the evolution of reflection coefficients, and could be extended for periodic space curves. Finally, we observe that the solution of the Fourier heat PDE with potential, by schrödinger equation analogy, is also provided by Wiener integral and Feynman-Kac path integral.

1. Introduction

Grâce à l'isomorphisme canonique entre le plan Euclidien et le plan complexe, nous reformalisons le problème de régularisation de la prédiction linéaire sous l'angle du calcul des variations. Cette nouvelle modélisation [3] permet l'établissement de nouveaux schémas numériques EDP agissant sur les coefficients de réflexion. L'approche permet, en particulier, de s'affranchir du réglage d'un hyper-paramètre Lagrangien, de réglage habituellement peu aisé.

2. Immersion du cercle unité dans le plan Euclidien & courbure associée

Nous considérons le polynôme autorégressif complexe donné par : $A^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} z^{-k}$ avec $a_0^{(n)} = 1$ et $|z| = 1$ comme une

courbe paramétrique fermée *orientée* dans le plan. Comme z appartient au cercle unité, cette courbe peut être paramétrée par une variable réelle, la fréquence, f telle que $z = e^{i2\pi f}$, ou l'abscisse curviligne s tel que $ds = |\nabla_f A^{(n)}(f)| df$. Nous

définissons sur cette courbe le vecteur tangent $\vec{\tau} = \frac{\nabla_f A^{(n)}}{|\nabla_f A^{(n)}|}$ et

le vecteur normal par une rotation de $\pi/2$ ($Rot(\vec{x}, \theta) = e^{i\theta} \cdot x$) :

$\vec{n} = e^{i\frac{\pi}{2}} \vec{\tau} = i \vec{\tau}$. Le produit scalaire entre vecteurs $\vec{x} \circ \vec{y}$ est défini de la façon suivante : $\vec{x} \circ \vec{y} = Re[x \cdot y^*]$. Le point le plus intéressant concerne la courbure. Un résultat classique de l'analyse complexe nous fournit la courbure κ de la courbe

image $\Gamma = \{A^{(n)}(z) / z \in \tilde{\Gamma}\}$ en $A^{(n)}(z)$ lorsque $\tilde{\Gamma}$ est de courbure connue $\tilde{\kappa}$ [4] :

$$\kappa = \frac{1}{|\nabla_z A^{(n)}(z)|} \left(\text{Im} \left[\frac{\Delta_z A^{(n)}(z) \cdot z_\phi}{\nabla_z A^{(n)}(z)} \right] + \tilde{\kappa} \right) \text{ avec } z_\phi = e^{i\phi}$$

où z_ϕ correspond au nombre complexe unité décrivant le vecteur tangent à la courbe $\tilde{\Gamma}$ en z . Pour la cas de l'analyse harmonique, $\tilde{\Gamma} = \{z \in C / |z| = 1\}$ correspond au cercle unité où

le vecteur tangent est $z_\phi = e^{i(\arg(z) + \frac{\pi}{2})} = i \cdot z$ et la courbure $\tilde{\kappa} = 1$.

Finalement, la courbure de $A^{(n)}(z)$ lorsque z évolue suivant $D = \{z \in C / |z| = 1\}$ est donnée par [3] :

$$\kappa = \text{Im} \left[\frac{i}{z \cdot \nabla_z A^{(n)}(z)} \left(\frac{z^2 \cdot \Delta_z A^{(n)}(z)}{z \cdot \nabla_z A^{(n)}(z)} + 1 \right) \right] = \text{Re} \left[\frac{i \cdot \Delta_f A^{(n)*}(f)}{\nabla_f A^{(n)*}(f) \cdot |\nabla_f A^{(n)}(f)|} \right]$$

Nous avons de plus la relation de Frenet : $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \kappa \cdot \vec{n}$.

3. Modèle variationnel et analyse harmonique

3.1 Equation d'Euler Lagrange de la prédiction linéaire régularisée

Considérons le cas de la prédiction linéaire à horizon fini, pour lequel le signal x_k est décrit par un modèle autorégressif que l'on écrit habituellement :

$$x_k = -\sum_{p=1}^n a_p^{(n)} x_{k-p} + b_k \text{ et } E[b_k \cdot b_{k-p}^*] = \sigma^2 \cdot \delta_{p,0}$$

Classiquement, l'identification des paramètres est obtenue en minimisant l'erreur quadratique moyenne de l'estimation :

$$\rho_0 = E[x_k - \hat{x}_k]^2 = E[e_n(k)^2] \text{ avec } e_n(k) = x_k - \hat{x}_k = \sum_{p=0}^n a_p^{(n)} \cdot x_{k-p}$$

L'idée principale de notre approche est de considérer ce critère sous forme intégrale grâce au théorème de Parseval [2]:

$$\rho_0 = \int_{-1/2}^{1/2} |A^{(n)}(f)|^2 \cdot S_x(f) \cdot df \text{ avec } A^{(n)}(f) = \sum_{p=0}^n a_p^{(n)} \cdot e^{-j2\pi p f}$$

et $S_x(f) = E[X(f)^2]$ la densité spectrale de puissance. Ce cas est asymptotique et dans le cas de l'analyse de séries temporelles courtes, le critère s'exprime de la façon suivante :

$$\text{Min}_{A^{(n)}} \int_{-1/2}^{1/2} g(A^{(n)}(f))^2 \cdot df = 0 \text{ avec } g(A^{(n)}(f))^2 = |A^{(n)}(f)|^2 \cdot \hat{S}_x(f)$$

$$\text{où } \hat{S}_x(f) = \sum_{l=-N}^{+N} \hat{r}_l^x \cdot e^{-j2\pi f l} \text{ et } \hat{r}_l^x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \cdot x_{n-l}^*$$

Quand la série temporelle analysée est trop courte, le problème devient mal posé, et en l'absence de test statistique consistant pour estimer l'ordre du modèle, on régularise le modèle d'ordre maximum (nombre d'échantillon moins un) en rajoutant une contrainte traduisant notre a priori via un hyper-paramètre λ . Il s'agit alors de minimiser l'intégrale :

$$W(A^{(n)}) = \int_{-1/2}^{1/2} F(f, A^{(n)}(f), \nabla_f A^{(n)}(f)) \cdot df \text{ avec } F(f, A^{(n)}(f), \nabla_f A^{(n)}(f)) = \left(|A^{(n)}(f)|^2 \cdot \hat{S}_x(f) \right) + \lambda \cdot \Phi \left(\left| \nabla_f A^{(n)}(f) \right| \right)$$

Ce problème rentre alors dans le cadre du calcul des variations et sa solution est donnée par l'équation de Yule-Walker en remarquant que $\hat{S}_x(f) \in \mathfrak{R} \Rightarrow \hat{S}_x^*(f) = \hat{S}_x(f)$:

$$\frac{d}{df} \left(\frac{\partial F}{\partial (\nabla_f A^{(n)*})} \right) = \frac{\partial F}{\partial A^{(n)*}} \text{ dont le développement nous donne :}$$

$$\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{d}{df} \left(\Phi' \left(\left| \nabla_f A^{(n)} \right| \right) \cdot \frac{\nabla_f A^{(n)}}{\left| \nabla_f A^{(n)} \right|} \right) = A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f)$$

En utilisant, la décomposition de $\Delta_f A^{(n)}$ sur la base locale de frenet $(\vec{\tau}, \vec{n})$, nous obtenons [3] :

$$\frac{\lambda}{2} \left(\Phi'' \left(\left| \nabla_f A^{(n)} \right| \right) (\Delta_f A^{(n)} \circ \vec{\tau}) \vec{\tau} + \frac{\Phi' \left(\left| \nabla_f A^{(n)} \right| \right)}{\left| \nabla_f A^{(n)} \right|} (\Delta_f A^{(n)} \circ \vec{n}) \vec{n} \right) = A^{(n)}(f) \hat{S}_x(f)$$

3.2 Cas quadratique : Equivalence des Equations de Yule-Walker et Euler-Lagrange

Dans le cas quadratique $\Phi \left(\left| \nabla_f A^{(n)} \right| \right) = \left| \nabla_f A^{(n)} \right|^2$, la solution est donnée par la relation suivante : $\lambda \cdot \Delta_f A^{(n)}(f) = A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f)$

Si nous considérons alors la transformée en Z de cette équation, nous déduisons cette seconde équation :

$$-\lambda \cdot 4\pi^2 \cdot \left[z^{-2} \cdot \frac{d^2 A^{(n)}(z)}{d(z^{-1})^2} + z^{-1} \cdot \frac{dA^{(n)}(z)}{dz^{-1}} \right] = A^{(n)}(z) \cdot \hat{S}_x(z)$$

et en comparant les termes de même puissance en z^{-1} dans le terme de droite :

$$A^{(n)}(z) \cdot \hat{S}_x(z) = \dots + \left(\hat{r}_1^x + \sum_{q=0}^n a_q^{(n)} \cdot \hat{r}_{1-q}^x \right) z^{-1} + \dots + \left(\hat{r}_n^x + \sum_{q=0}^n a_q^{(n)} \cdot \hat{r}_{n-q}^x \right) z^{-n} + \dots$$

et le terme de gauche dans l'équation précédente :

$$-\lambda \cdot 4\pi^2 \cdot \left[z^{-2} \cdot \frac{d^2 A^{(n)}(z)}{d(z^{-1})^2} + z^{-1} \cdot \frac{dA^{(n)}(z)}{dz^{-1}} \right] =$$

$$-\lambda \cdot 4\pi^2 \cdot \sum_{p=0}^n p^2 a_p^{(n)} \cdot z^{-p} = -\lambda \cdot 4\pi^2 \cdot \left((1)^2 \cdot a_1^{(n)} z^{-1} + \dots + (n)^2 \cdot a_n^{(n)} z^{-n} \right)$$

On retrouve l'équation de Yule-Walker régularisée [3] :

$$\begin{bmatrix} a_1^{(n)} \\ a_2^{(n)} \\ \vdots \\ a_n^{(n)} \end{bmatrix} = - \left[\hat{R}_n + \lambda \cdot J_n^+ \cdot J_n \right]^{-1} \begin{bmatrix} \hat{r}_1^x \\ \hat{r}_2^x \\ \vdots \\ \hat{r}_{n-1}^x \end{bmatrix} \text{ avec } J_n = (2\pi \cdot i) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{bmatrix} \quad 2.4$$

et $\hat{R}_n = [\hat{r}_i]_{i \text{ Toeplitz}}$

3.3 Equation de Fourier avec potentiel

Nous remarquons à cette étape de notre développement que la solution de l'équation précédente est également état stable de l'EDP suivante:

$$\frac{\partial A^{(n)}(f)}{\partial t} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 A^{(n)}(f)}{\partial f^2} - A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f)$$

qui converge vers le minimum global de la fonctionnelle :

$$W(A^{(n)}) = \int_{-1/2}^{1/2} \left[|A^{(n)}(f)|^2 \cdot \hat{S}_x(f) + \lambda \cdot \left| \nabla_f A^{(n)}(f) \right|^2 \right] \cdot df$$

qui se ré-écrit par intégration par parties :

$$W(A^{(n)}) = \int_{-1/2}^{1/2} A^{(n)*}(f) \left[A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f) - \lambda \cdot \Delta_f A^{(n)}(f) \right] \cdot df$$

Il est alors aisé de montrer que le flot décrit par l'EDP précédente conduit à :

$$\frac{dW(A^{(n)})}{dt} = - \left[\int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{\partial A^{(n)}}{\partial t} \right|^2 \cdot df + Q^{(n)} \right]$$

où $Q^{(n)}$ est un terme positif :

$$Q^{(n)} = \int_{-1/2}^{1/2} \left[|A^{(n)}|^2 \cdot \hat{S}_x + \lambda^2 \cdot A^{(n)*} \cdot \nabla_f^4 A^{(n)} - \lambda A^{(n)*} \cdot (2 \nabla_f^2 A^{(n)} \hat{S}_x + 2 \nabla_f A^{(n)} \nabla_f \hat{S}_x + A^{(n)} \cdot \nabla_f^2 \hat{S}_x) \right] \cdot df$$

En définissant $G(u) = TF[g] = \int_{-1/2}^{1/2} g(f) \cdot e^{-i2\pi f u} \cdot df$ avec

$\hat{S}_x(u) = TF[\hat{S}_x]$ et $A(u) = TF[A]$. Le théorème de Parseval donne:

$$Q^{(n)} = \int_{-1/2}^{1/2} |A^{(n)}(u)|^2 \cdot \left[\hat{S}_x^2(u) + 5 \cdot (2\pi u)^2 \lambda \cdot \hat{S}_x(u) + (2\pi u)^4 \cdot \lambda^2 \right] \cdot du > 0$$

avec $\hat{S}_x > 0$ car $\hat{S}_x(f) = E[X(f)^2] > 0$

La convergence est alors assurée par $\frac{dW(A^{(n)})}{dt} < 0$.

3.4 Cepstre et Equation de Burgers

La transformée de Bäcklund $X = -2 \frac{v}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial f}$ linéarise l'équation

EDP de Burgers : $B(X) = \frac{\partial X}{\partial t} + X \cdot \frac{\partial X}{\partial f} - v \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial f^2} = 0$ grâce à la

relation suivante : $B \left(-2 \frac{v}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial f} \right) = -2v \cdot \frac{\partial}{\partial f} \left[\frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial t} - v \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial f^2} \right) \right]$

Or le cepstre différentiel $D^{(n)}(f) = 2v \cdot \frac{\partial C^{(n)}(f)}{\partial f}$ correspond

justement à la transformée de Bäcklund de $A^{(n)}(f)$:

$$D^{(n)}(f) = -2v \cdot \frac{1}{A^{(n)}(f)} \cdot \frac{\partial A^{(n)}(f)}{\partial f} \text{ avec } C^{(n)}(f) = -\ln A^{(n)}(f)$$

Ainsi, si $A^{(n)}(f)$ évolue suivant l'équation de Fourier avec potentiel précédente, l'évolution du cepstre différentiel est défini par un flot décrit par l'EDP de Burgers avec potentiel [3] :

$$\frac{\partial D^{(n)}(f)}{\partial t} + D^{(n)}(f) \cdot \frac{\partial D^{(n)}(f)}{\partial f} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 D^{(n)}(f)}{\partial f^2} + 2 \cdot \lambda \cdot \frac{\partial \hat{S}_x(f)}{\partial f}$$

3.5 Algorithme de Burg régularisé

Dans le cas quadratique, l'équation $\lambda \Delta_f A^{(n)}(f) = A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f)$ a été résolu en régularisant l'algorithme de Burg. La structure treillis est conservée et seule l'expression du coefficient de réflexion est modifiée [3] :

$$\hat{\mu}_n = - \frac{\frac{2}{N-n} \sum_{k=n+1}^N f_{n-1}(k) \cdot b_{n-1}^*(k-1) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k^{(n)} \cdot a_k^{(n-1)} \cdot a_{n-k}^{(n-1)}}{\frac{1}{N-n} \sum_{k=n+1}^N |f_{n-1}(k)|^2 + |b_{n-1}(k-1)|^2 + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k^{(n)} \cdot |a_k^{(n-1)}|^2}$$

avec $\beta_k^{(n)} = \lambda \cdot (2\pi)^2 \cdot (k-n)^2$

4. Flot de courbure moyenne & schéma EDP associé

4.1 Géodésique & analyse harmonique

Par analogie avec les approches EDP en traitement d'image, nous allons définir une nouvelle fonctionnelle, définie comme la longueur de la courbe dans le cas où la mesure d'arc classique est remplacée par une mesure d'arc relative au critère d'adéquation aux données, $ds'^2 = g(A^{(n)})^2 \cdot ds^2$. Soit :

$$L = \int_{-1/2}^{1/2} g(A^{(n)}(f)) \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right| df = \int_0^{L_g} g(A^{(n)}) ds = \int_0^{L_g} ds'$$

Le problème de minimisation est alors de trouver la courbe $A^{(n)}(f)$ qui minimise la nouvelle fonctionnelle :

$$S(A^{(n)}) = \int_{-1/2}^{1/2} F(f, A^{(n)}(f), \nabla_f A^{(n)}(f)) df = \int_{-1/2}^{1/2} g(A^{(n)}(f)) ds$$

$$\text{avec } F(f, A^{(n)}(f), \nabla_f A^{(n)}(f)) = g(A^{(n)}(f)) \cdot |\nabla_f A^{(n)}(f)|$$

$$\text{où } g(A^{(n)}(f)) = \sqrt{|A^{(n)}(f)|^2 \cdot \hat{S}_x(f)} \text{ et } ds = |\nabla_f A^{(n)}(f)| \cdot df$$

La solution est encore donnée par l'équation d'Euler-Lagrange, qui s'écrit : $\frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} \cdot |\nabla_f A^{(n)}| - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{df} [g(A^{(n)}) \cdot \bar{\tau}] = 0$

En utilisant l'équation de frenet $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \kappa \cdot \bar{n}$, la décomposition de

$\frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}}$ sur la base locale de frenet $(\bar{\tau}, \bar{n})$ et la définition précédente du produit scalaire, nous obtenons finalement [3] :

$$\frac{\partial A^{(n)}(f, t)}{\partial t} = \left[g(A^{(n)}) \cdot \kappa - \left(2 \cdot \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} \circ \bar{n} \right) \cdot \bar{n} + \frac{1}{|\nabla_f A^{(n)}|} \cdot \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial f} \cdot \bar{\tau} \right]$$

Si nous développons le terme $g(A^{(n)})$ dans l'équation d'Euler-Lagrange, nous obtenons une nouvelle équation qui est proche dans sa forme du cas quadratique [3] :

$$\frac{g^2(A^{(n)}(f))}{|\nabla_f A^{(n)}(f)|^2} \cdot \Delta A^{(n)}(f) = A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f)$$

à la différence près que le paramètre λ qui était constant dans le cas quadratique, est maintenant dépendant de la fréquence :

$$\lambda(f) \cdot \frac{d^2 A^{(n)}}{df^2} = A^{(n)} \cdot \hat{S}_x \text{ avec } \lambda(f) = \frac{g^2(A^{(n)})}{|\nabla_f A^{(n)}|^2}$$

A partir de la définition de $S(A^{(n)})$, l'équation d'Hamilton-

$$\text{Jacobi se réduit à : } \left[2 \cdot \frac{\partial S(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} \right]^2 = g(A^{(n)})^2 \text{ et } \frac{\partial S(A^{(n)})}{\partial f} = 0$$

Alors par intégration, on trouve une nouvelle expression du terme d'action :

$$S = \frac{1}{2} \left(\int_1^{A^{(n)*}} g(A^{(n)}) \bar{\tau} \cdot dA^{(n)*} + \int_1^{A^{(n)}} g(A^{(n)}) \bar{\tau}^* \cdot dA^{(n)} \right) = \int_1^{A^{(n)}} g(A^{(n)}) (\bar{\tau} \circ dA^{(n)})$$

4.2 Théorème d'Emmy-Noether et de Szegö-Kolmogoro-Krein

Il est intéressant d'observer que ce problème possède certaines symétries qui vont induire certaines invariances sur la solution. Ce lien symétrie/invariances, nous est donné par le théorème d'Emmy-Noether. Considérant, la minimisation de :

$$S(A^{(n)}(f)) = \int_{-1/2}^{1/2} F \left(f, A^{(n)}(f), \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right) df$$

Cette fonctionnelle possède une périodicité dans le domaine des fréquences, mais également une invariance par multiplication par un complexe de module unité :

$$S(\phi_s \bullet A^{(n)}(\psi_n(f))) = S(A^{(n)}(f))$$

$$\text{avec } \phi_s \bullet A^{(n)}(f) = \phi_s(A^{(n)}(f)) = e^{i \cdot s} \cdot A^{(n)}(f) \text{ et } \psi_n(f) = f + n$$

où $s \in \mathfrak{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

Si on calcule la dérivée de ces transformations par rapport à leur paramètre, nous avons : $\frac{d\psi_n(f)}{dn} = +1 = X(f)$ et

$$\frac{d\phi_s(A^{(n)}(f))}{ds} = i \cdot e^{i \cdot s} \cdot A^{(n)}(f) = i \cdot \phi_s(A^{(n)}(f)) = U(\phi_s(A^{(n)}(f)))$$

Le théorème d'Emmy-Noether établit alors que l'expression suivante est invariante par rapport à la fréquence f [3] :

$$\frac{\partial [-X(f) \cdot H(f) + U(A^{(n)}) P_{A^{(n)}}(f) + U(A^{(n)*}) P_{A^{(n)*}}(f)]}{\partial f} = 0$$

avec $H(f)$ l'Hamiltonien et $P_{A^{(n)}}(f)$ l'impulsion généralisée.

En développant ce terme on trouve l'invariance suivante [3] :

$$\frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial f} = 0 \text{ qui correspond au blanchissement du spectre en}$$

sortie du filtre de prédiction linéaire. Le terme d'adéquation aux données sera constant quelque soit f , et sa valeur nous est donnée par le théorème de Szegö-Kolmogorov-Krein [2] :

$$\text{Inf}_{A^{(n)}} \int_{-1/2}^{1/2} g(A^{(n)})^2 df = \text{Inf}_{A^{(n)}} \int_{-1/2}^{1/2} |A^{(n)}(f)|^2 \cdot S_x(f) \cdot df = e^{-\int_{-1/2}^{1/2} \log S_x(f) \cdot df}$$

4.3 Schéma de numérisation de l'EDP

Par application de deux lemmes de Cartan, nous pouvons montrer l'équivalence de la solution fournie par l'équation précédente du flot de courbure moyenne et l'extremum d'une autre fonctionnelle dont l'EDP associée est plus directement discrétisable :

$$\text{Min}_A \int_{-1/2}^{1/2} F(f, A^{(n)}(f), \nabla_f A^{(n)}(f)) df$$

$$\text{avec } F(f, A^{(n)}(f), \nabla_f A^{(n)}(f)) = g(A^{(n)}(f))^2 \cdot |\nabla_f A^{(n)}(f)|^2$$

dont l'EDP est donnée par la formule suivante [3] :

$$\frac{\partial A^{(n)}(f)}{\partial t} = \frac{d}{df} [g^2(A^{(n)}(f)) \nabla_f A^{(n)}(f)] - A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f) \cdot |\nabla_f A^{(n)}(f)|^2$$

dont on déduit le schéma numérique suivant agissant sur le vecteur des paramètres autorégressifs $A_n = [a_1^{(n)} \dots a_n^{(n)}]^T$ [3] :

$$\frac{\partial A_n}{\partial t} = J_n^T [\Sigma_n] J_n \cdot A_n - K(J_n \cdot A_n) T_n \cdot J_n \cdot A_n$$

Où Σ_n est la matrice de covariance des innovations

$\rho_k = E[e_n(i) \cdot e_n^*(i-k)]$ avec $e_n(i) = \sum_{p=0}^n a_p^{(n)} \cdot x_{i-p}$ et T_n la matrice

de corrélation entre le signal et les innovations

$\tau_k = E[e_n(i).x_{i-k}^*]$. Quand A_n converge vers la solution, nous avons $\lim_{A_n \rightarrow A_n^{opt}} \Sigma_n = \rho_0 . I_n$ et $\lim_{A_n \rightarrow A_n^{opt}} T_n = [0]_{n,n}$, et l'évolution de A_n est ralentie $\left(\frac{\partial A_n}{\partial t} = \rho_0 . J_n^T . J_n . A_n \right)$.

4.4 Schéma EDP sur les coefficients de réflexion

Si on considère uniquement le terme relatif à l'équation du type équation de la chaleur anisotrope (premier terme de droite dans l'EDP précédente), nous avons un schéma numérique simplifié donné par :

$$\frac{\partial A^{(n)}(f)}{\partial t} = \frac{d}{df} \left[g^2(A^{(n)}, f) \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right] \Leftrightarrow \frac{\partial A_n}{\partial t} = J_n^T . [\Sigma_n] . J_n . A_n$$

En utilisant la structure blocs de Σ_n , on déduit une nouvelle EDP agissant sur le coefficient de réflexion $\mu_n = a_n^{(-)}$:

$$J_n = \begin{bmatrix} J_{n-1} & 0 \\ 0 & (-i.2\pi).n \end{bmatrix}, \quad \Sigma_n = \begin{bmatrix} \Sigma_{n-1} & P_{n-1}^{(-)} \\ P_{n-1}^{(-)+} & \rho_0 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } P_{n-1} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix} \text{ et } A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_n \begin{bmatrix} A_{n-1}^{(-)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial t} = (-i.2\pi)^2 . n^2 . \rho_0 . \mu_n + (-i.2\pi).n . P_{n-1}^{(-)+} . J_{n-1} . (A_{n-1} + \mu_n . A_{n-1}^{(-)})$$

dont la discrétisation est immédiate :

$$\mu_{n,k+1} = \left[1 + (-i.2\pi)^2 . n^2 . \rho_0 + \Delta t . (-i.2\pi).n . P_{n-1,k}^{(-)+} . J_{n-1} . A_{n-1}^{(-)} \right] \mu_{n,k} + \Delta t . (-i.2\pi).n . P_{n-1,k}^{(-)+} . J_{n-1} . A_{n-1}$$

avec $P_{n-1,k} = [\rho_i]_{i=1, \dots, n-1}$ et

$$\hat{\rho}_i = \frac{1}{N-n+i+1} \left[\frac{1}{2} \cdot \sum_{p=n+i}^N f_n(p) . f_n(p-i)^* + \frac{1}{2} \cdot \sum_{p=n+i}^N b_n(p) . b_n(p-i)^* \right]$$

et les récursions classiques sur les erreurs de prédiction directe

$$\begin{cases} f_n(k) = f_{n-1}(k) + \mu_n . b_n(k-1) \\ b_n(k) = b_{n-1}(k-1) + \mu_n^* . f_{n-1}(k) \end{cases}$$

4.5 Extension au cas Lagrangien homogène

Le fait que dans l'EDP du flot de courbure intervienne un terme tangentiel, aussi lié au fait que la courbe est orientée, indique, que la fréquence conserve un statut particulier. Nous proposons de plonger la courbe dans l'espace configuration-fréquence dans CxR, où le 3^{ème} axe est donné par la fréquence:

$$P^{(n)}(f) = \begin{bmatrix} A^{(n)}(f) \\ f \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \vec{\tau} = \nabla_s P^{(n)}, \quad \vec{n} = \frac{\Delta_s P^{(n)}}{|\Delta_s P^{(n)}|} = \frac{1}{\kappa} . \nabla_s \vec{\tau} \\ \vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n} \text{ et } L_{P^{(n)}} = \int_{-1/3}^{1/2} \sqrt{1 + |\nabla_f A^{(n)}|^2} df \end{cases}$$

La courbe est une hélicoïde périodique généralisée. Les équations de Frenet étant données par :

$$\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s} = \kappa . \vec{n}, \quad \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} = -\kappa . \vec{\tau} + \delta . \vec{b} \text{ et } \frac{\partial \vec{b}}{\partial s} = -\delta . \vec{n}$$

L'EDP associée à la minimisation de la fonctionnelle [3] :

$$S(A^{(n)}) = \int_{-1/2}^{1/2} g(A^{(n)}(f)) . \sqrt{1 + |\nabla_f A^{(n)}(f)|^2} . df \text{ est alors donnée par:}$$

$$\frac{\partial P^{(n)}(f)}{\partial t} = g(A^{(n)}, f) . \kappa . \vec{n} - (\nabla P^{(n)}(f) \circ \vec{n}) \vec{n} - (\nabla P^{(n)}(f) \circ \vec{b}) \vec{b}$$

5. Intégrale de chemin de Feynman-Kac

L'équation de Fourier de la chaleur avec potentiel, établie précédemment est l'analogue de l'équation de Schrödinger lorsque t est remplacé par $-it$:

$$\frac{\partial A^{(n)}(f)}{\partial t} = \lambda . \frac{\partial^2 A^{(n)}(f)}{\partial f^2} - A^{(n)}(f) . \hat{S}_x(f)$$

L'opérateur auto-adjoint Hamiltonien H donne la solution :

$$A^{(n)}(f, t) = e^{-t.H} . A^{(n)}(f, 0) \text{ avec } H = \lambda \frac{\partial^2}{\partial f^2} - \hat{S}_x$$

Kac, sur la base des travaux de Feynman a montré que la solution du problème pouvait s'exprimer par une intégrale de

$$\text{Wiener [1] : } A^{(n)}(f, t) = \int e^{-\int_0^t S_x(v(\tau)+f).d\tau} . A^{(n)}(v(0)+f, 0).dW(v)$$

où $dW(v)$ est la mesure de Wiener pour le processus de Wiener de variance $\lambda^2 . d\tau$, définie sur les chemins continus $v(\tau), 0 \leq \tau \leq t$ avec $v(0) = 0$. Kac a alors établi l'analogue de l'intégrale de chemin de Feynman, où l'intégrale se fait sur un ensemble approprié de chemin finissant au temps t au point f :

$$A^{(n)}(f, t) = \int e^{-S_i(v)} . A^{(n)}(v(0), 0).dv$$

with $S_i(v) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{dv}{d\tau} \right)^2 . d\tau + \int_0^t \hat{S}_x(v(\tau)) . d\tau$

6. Résultats sur données échographiques

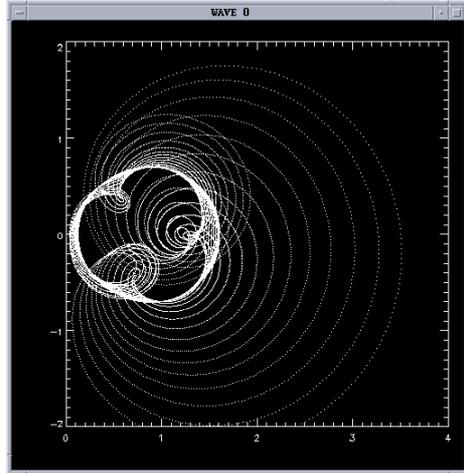


FIG. 1 : Evolution de la courbe A(f) soumise à l'EDP

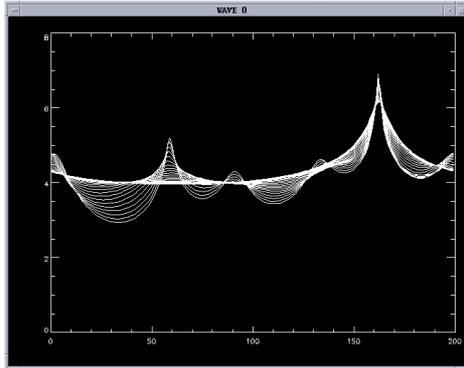


FIG. 2 : Evolution associée du spectre soumis à l'EDP

References

- [1] S.A. Alberverio, « Mathematical Theory of Feynman Path Integrals », Lectures Notes in Math., Springer-Verlag, 1976
- [2] D. Alpay, « Algorithmes de Schur, espaces à noyau reproduisant et théorie des systèmes », Panorama et Synthèses, n°6, Société Mathématique de France, 1998
- [3] F. Barbaresco, « Calcul des variations et analyse spectrale : Equations de Fourier & Burgers pour modèles autorégressifs régularisés », Revue Traitement du Signal, Vol.17, 2001
- [4] T. Needham, « Visual Complex Analysis », Oxford University Press, 2nd Edition, 1998