

# Etude des Performances Asymptotiques des Turbo Codes Multiples

Didier LE RUYET, Han VU THIEN

Conservatoire National des Arts et Métiers  
292 rue Saint Martin, 75141 Paris Cedex 03, France  
leruyet@cnam.fr, vu-thien@cnam.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous comparons différentes structures de décodage itératif pour les turbo codes multiples. En considérant que les densités de probabilités des messages propagés entre les décodeurs sont indépendantes et gaussiennes, il est possible de déterminer simplement les seuils limites de fonctionnement de ces différentes structures.

**Abstract** – In this paper, we compare different structures of iterative decoders for multiple turbo codes. Using the independent gaussian approximation for the probability densities, we can easily find the thresholds of the different structures.

## 1 Introduction

Dans sa thèse, Wiberg [1] a observé que si les entrées du décodeur MAP sont gaussiennes et indépendantes, alors ses sorties peuvent également être approximées par des variables aléatoires gaussiennes. Cette approximation gaussienne a été récemment utilisée pour étudier les performances asymptotiques des décodeurs itératifs des codes LDPC et des codes convolutifs concaténés en parallèle et série [2] [3]. En utilisant cette approximation, il est possible de déterminer le rapport  $E_b/N_0$  minimum  $E_b/N_{0S}$  pour lequel le rapport signal à bruit  $SNR_{EXTR} \rightarrow \infty$  (et donc le taux d'erreurs bit  $P_e \rightarrow 0$ ) lorsque le nombre d'itération  $m \rightarrow \infty$ . Cette méthode permet également de choisir les meilleurs codes constituants pour les codes convolutifs concaténés du point de vue du décodage itératif.

Dans cet article, nous proposons de généraliser cette méthode aux codes convolutifs concaténés en parallèle composés de plus de 2 codes constituants ou turbo codes multiples. Nous nous intéresserons en particulier aux codes composés de codes convolutifs à une mémoire.

Nous commencerons par rappeler les travaux de El Gamal [2] sur l'approximation gaussienne des densités de probabilités des messages échangés entre les décodeurs. Ensuite, en utilisant l'approximation gaussienne, nous étudierons différentes structures de décodeurs itératifs pour les turbo codes multiples. Finalement, nous donnerons les seuils obtenus pour des turbo codes de rendement  $1/2$  constitués de  $J$  codes convolutifs à une mémoire de rendement  $\frac{J}{J+1}$ . Les performances de ces codes concaténés sont comparables à celles des turbo codes et leur décodage est particulièrement simple.

## 2 Modèle mathématique

Nous considèrerons que le mot code nul a été transmis sur un canal à bruit blanc additif gaussien. Le rapport signal à bruit d'une variable aléatoire gaussienne  $x$  est

défini par  $SNR(x) = [E(x)]^2 / \text{VAR}(x)$  ou  $E(x)$  et  $\text{VAR}(x)$  sont respectivement la valeur moyenne et la variance de  $x$ . Si les informations sont des logarithmes de rapport de vraisemblance gaussien, on a la relation  $\text{VAR}(x) = 2 \times E(x)$ . L'approximation gaussienne implique que les sorties du décodeur sont totalement déterminées à partir de ses entrées. On a alors la relation  $P_e = Q(\sqrt{SNR})$  entre le taux d'erreurs bit  $P_e$  et le rapport  $SNR$  ou  $Q(\cdot)$  est la fonction d'erreur. Nous nous placerons dans le cas où les séquences d'informations sont suffisamment longues pour pouvoir considérer que les cycles dans le graphe n'influencent pas le passage de l'information au cours des itérations. Dans ce cas, on peut considérer que les informations d'entrée *APRILLR* et *INTLLR* et de sortie *APLLR* et *EXTRLLR* du décodeur MAP sont gaussiennes et indépendantes. Dans le cas du décodage itératif d'un turbo codeur classique composé de 2 codeurs convolutifs récursifs systématiques de rendement  $1/n$ , le rapport signal à bruit des informations extrinsèques  $SNR_{EXTR}$  est indépendant de la position des bits dans la séquence. On peut donc considérer le décodeur MAP comme un amplificateur de rapport signal à bruit. Soit  $p$  l'indice d'itération partielle. Pour un rapport  $E_b/N_0$  fixé de l'information issue du canal *INTLLR*, et sous les hypothèses d'approximation gaussienne et d'indépendance, le rapport  $SNR_{EXTR}^{(p)}$  évolue à chaque itération partielle  $p$  comme suit :

$$\begin{aligned} SNR_{EXTR}^{(p)} &= f_{E_b/N_0}(SNR_{APRI}^{(p)}) \\ &= f_{E_b/N_0}(SNR_{EXTR}^{(p-1)}) \end{aligned} \quad (1)$$

La fonction  $f_{E_b/N_0}$  définit la relation entre les rapports signal à bruit  $SNR_{APRI}$  et  $SNR_{EXTR}$  du décodeur pour un rapport  $E_b/N_0$  fixé. Pour les codes convolutifs de rendement  $k/n$ , nous avons  $d$  différentes fonctions  $f_{E_b/N_0}$ . En effet, ses codes sont généralement anisotropiques (les bits d'information sont protégés différemment suivant leur position). De plus, comme seuls les bits d'information dis-

posent d'information *a priori* pendant le décodage itératif, les rapports  $SNR_{EXT}^{(p)}$  sont différents selon la position du bit d'information dans le symbole.

On utilise alors la moyenne de ces fonctions pour déterminer les seuils de fonctionnement.

L'application du théorème de Lebesgue-Borel nous permet de dire que la séquence  $\{SNR_{EXT}^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$  tend soit vers un point fixe  $\tau(E_b/N_0) < \infty$  soit vers l'infini. Comme cette séquence est non décroissante, on a  $\tau(E_b/N_0) < \infty$  pour  $E_b/N_0 < E_b/N_{0S}$  ( $P_e \neq 0 \forall p$ ) et  $\tau(E_b/N_0) = \infty$  pour  $E_b/N_0 > E_b/N_{0S}$  ( $P_e \rightarrow 0$  quand  $p \rightarrow \infty$ ). Ainsi le rapport signal à bruit  $E_b/N_{0S}$  est le seuil qui va déterminer de la convergence ou de la non convergence du décodeur itératif. Pour obtenir le seuil  $E_b/N_{0S}$ , il suffit de simuler le décodeur seul puis de tracer les courbes  $SNR_{EXT} = f_{E_b/N_0}(SNR_{APRI})$  pour différentes valeurs du rapport  $E_b/N_0$ . Pour les turbo codes, le seuil  $E_b/N_{0S}$  correspond au rapport  $E_b/N_0$  de la courbe qui tangente la droite  $SNR_{EXT} = SNR_{APRI}$ . Ainsi, l'approximation gaussienne permet une détermination rapide du seuil  $E_b/N_{0S}$ .

### 3 Généralisation aux turbo codes multiples

Les codes convolutifs concaténés en parallèle composés de plus de 2 codes constituants ou turbo codes multiples ont été introduits dans [4]. Par rapport aux turbo codes classiques, plusieurs structures de décodeur itératif sont envisageables. Parmi toutes ces structures, on peut citer la structure série, la structure série modifiée et la structure parallèle. La figure 1 présente un schéma simplifié d'un décodeur itératif de structure série pour  $J = 3$ .

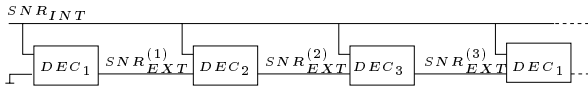


FIG. 1 – décodeur itératif série

Les entrelaceurs ne sont pas présentés sur les figures compte tenu de l'hypothèse d'indépendance. Pour la structure série, le rapport  $SNR_{EXT}^{(i)}$  évolue à chaque itération partielle comme dans le cas des turbo codes classiques.

Comme on utilise seulement l'information extrinsèque du décodeur précédent pour le calcul de  $EXTR^{(p)}$ , les performances de cette structure sont les moins bonnes des trois structures étudiées.

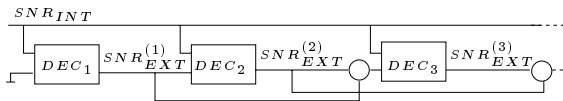


FIG. 2 – décodeur itératif série modifié pour  $J=3$ .

Pour la structure série modifiée présentée sur la figure 2, l'information *a priori* en entrée de chaque décodeur est

la somme des informations extrinsèques calculées précédemment par les autres décodeurs. Par exemple pour le cas  $J=3$ , le rapport  $SNR_{EXT}^{(i)}$  évolue à chaque itération partielle comme suit :

$$\begin{aligned} SNR_{EXT}^{(p)} &= f_{E_b/N_0}(SNR_{APRI}^{(p)}) \\ &= f_{E_b/N_0}(SNR_{EXT}^{(p-1)} + SNR_{EXT}^{(p-2)}) \end{aligned} \quad (2)$$

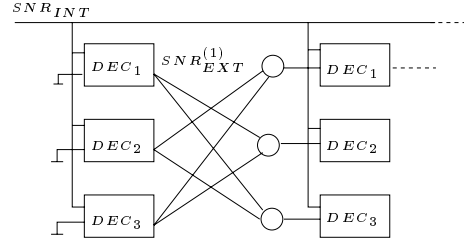


FIG. 3 – décodeur itératif parallèle pour  $J=3$ .

Dans la structure parallèle présentée sur la figure 3, les  $J$  décodeurs calculent en parallèle les informations extrinsèques à partir des informations extrinsèques calculées à l'itération précédente  $m-1$ . Dans cette structure, le rapport  $SNR_{EXT}^{(m)}$  s'exprime par :

$$\begin{aligned} SNR_{EXT}^{(m)} &= f_{E_b/N_0}(SNR_{APRI}^{(m)}) \\ &= f_{E_b/N_0}((J-1) \times SNR_{EXT}^{(m-1)}) \end{aligned} \quad (3)$$

Pour cette structure, le seuil  $E_b/N_{0S}$  correspond au rapport  $E_b/N_0$  de la courbe qui tangente la droite  $SNR_{EXT} = \frac{1}{J-1} \times SNR_{APRI}$ .

Pour les décodeurs itératifs série modifié et parallèle, il y a  $J-1$  informations extrinsèques impliquées dans le calcul de  $EXTR^{(m)}$ . Comme dans le paragraphe précédent, on peut utiliser les relations données ci-dessus pour déterminer les seuils de fonctionnement du décodeur itératif.

Nous avons comparé l'évolution du rapport  $SNR_{EXT}$  en fonction du nombre d'itérations pour le décodeur itératif série modifié et parallèle sur les figures 4 et 5. On peut constater que le rapport  $SNR_{EXT}$  croît plus rapidement avec la structure parallèle. Cependant, le seuil  $E_b/N_{0S}$  est le même pour les deux structures.

### 4 Turbo codeurs multiples composés de codeurs convolutifs récurrents systématiques à une mémoire

Un codeur  $(A, r, s)$  est un codeur convolutif récurrent systématique de rendement  $\frac{r+s}{r+s+1}$  à une seule mémoire, de  $r$  bits impliqués dans la récursion et de  $s$  de bits non impliqués dans la récursion. Comme on peut le voir sur la figure 6, le graphe de Tanner de ce code constituant est un arbre. Ces codes sont en général anisotropiques de degré 2.

Pour les structures série modifiée et parallèle, les performances médiocres des codes  $(A, r, s)$  sont compensées par le nombre  $J-1$  d'informations extrinsèques utilisées pour le calcul de  $EXTR^{(p)}$ .

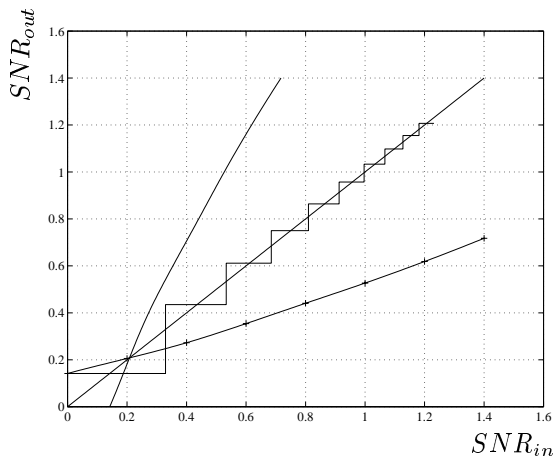


FIG. 4 – Evolution du rapport  $SNR_{EXTR}$  avec  $E_b/N_0=0.8\text{dB}$  pour le décodeur itératif série modifié  $p=1$  à 20.

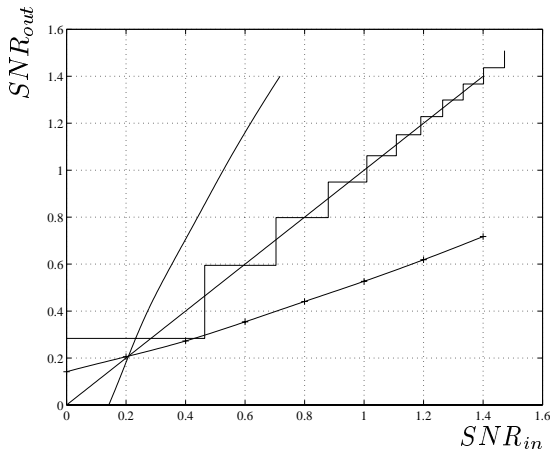


FIG. 5 – Evolution du rapport  $SNR_{EXTR}$  avec  $E_b/N_0=0.8\text{dB}$  pour le décodeur itératif parallèle  $m=1$  à 20.

En construisant l'entrelaceur de manière à protéger tous les bits identiquement, on obtient le graphe de Tanner du code concaténé présenté sur la figure 7.

Lorsque la taille du bloc d'information est infinie, il est possible d'appliquer directement l'algorithme Somme-Produit sur ce graphe comme pour les codes LDPC. L'étude de la propagation des densités de probabilités des informations extrinsèques permet alors de déterminer les seuils limites de fonctionnement.

## 5 Résultats

Les tables 1, 2, 3 et 4 présentent les seuils obtenus pour des codes concaténés en parallèle de rendement  $1/2$  composé de  $J$  codes constituants de rendement  $\frac{J}{J+1}$  pour différentes structures de décodeur itératif. La table 1 donne les seuils  $E_b/N_{0S}$  pour différents codes concaténés déterminés par recherche exhaustive [5]. Comme attendu, les seuils sont identiques pour les structures série modifiée et

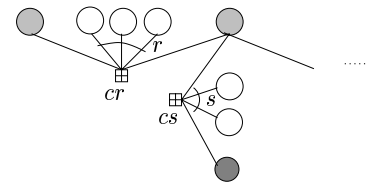


FIG. 6 – Graphe de Tanner d'un code  $(A, r, s)$ .

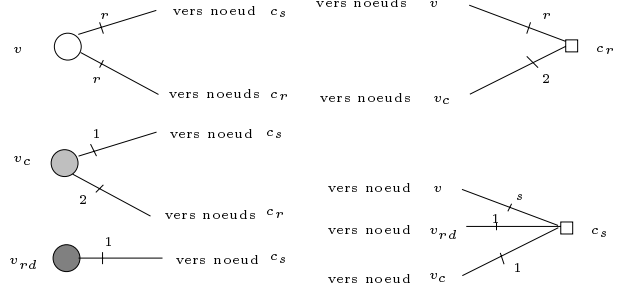


FIG. 7 – graphe de Tanner code MPCC simplifié composé de  $r + s$  codes  $(A, r, s)$

parallèle.

TAB. 1 – Performances asymptotiques des turbo code multiples de rendement  $1/2$  composés de codes convolutifs de rendement  $k/n$ .

code	série mo- difiée	parallèle
$R = 3/4 \quad m = 2$	0.44 dB	0.44 dB
$R = 3/4 \quad m = 3$	1.07 dB	1.07 dB
$R = 4/5 \quad m = 2$	1.18 dB	1.18 dB
$R = 4/5 \quad m = 3$	1.74 dB	1.74 dB

Les tables 2, 3 et 4 concernent les turbo codes multiples composés de  $J$  codes  $(A, r, s)$  de rendement  $\frac{J}{J+1}$ .

Certains codes présentent de très bons seuils. Par exemple, le seuil pour le code concaténé composé de 3 codes  $(A, 3, 1)$  égal à  $0.96\text{dB}$  est proche de celui obtenu par El Gamal pour le turbo code de rendement  $1/2$  composé de 2 codes convolutifs récursifs systématiques  $(15, 13)$  perforés.

Il est à noter que pour certains codes concaténés, il n'existe pas de seuil  $E_b/N_{0S}$ . Considérons par exemple le cas du turbo code multiple composé de 3 codes  $(A, 1, 2)$ . Les deux fonctions  $f_{E_b/N_0}$  et la moyenne de ces fonctions sont données sur la figure 8. Bien que le code  $(A, 2, 1)$  soit isotropique, le bit d'information exclu dans la récursion est beaucoup moins bien décodé car le bit de redondance voisin ne dispose pas d'information *a priori*. Ceci explique que dans certains codes concaténés, à cause des  $s$  bits exclus dans la récursion, il n'existe pas de seuil. Dans ces structures, pour toutes les valeurs de  $E_b/N_0$ , la valeur moyenne (ligne pointillée) coupe toujours la ligne droite  $SNR_{EXTR} = \frac{1}{J-1} \times SNR_{APRI}$ .

Finalement, sur la figure 9 nous comparons les limites obtenues en utilisant l'approximation gaussienne avec les résultats obtenus par simulation pour le turbo code mul-

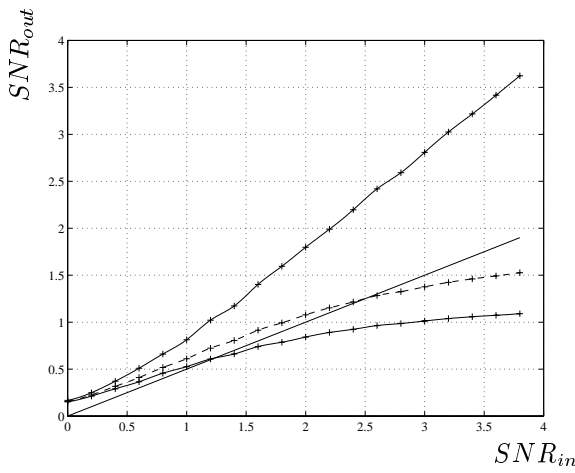


FIG. 8 – Fonctions  $f_{E_b/N_0}$  pour les turbo codes multiples avec 3 codes  $(A, 1, 2)$ .

TAB. 2 – Performances asymptotiques des codes concaténés en parallèle de rendement 1/2 composés de 3 codes  $(A, r, s)$  de rendement  $\frac{3}{4}$ .

code	LDPC	série	série modifiée	parallèle
$(A, 3, 0)$	1.16 dB	3.5dB	1.22 dB	1.22dB
$(A, 2, 1)$	-	-	-	-
$(A, 1, 2)$	-	-	-	-

multiple composé de 4 codes  $(A, 3, 1)$  et de 3 entrelaceurs tirés aléatoirement de taille  $K=65536$  bits. Il faut noter que les seuils  $E_b/N_{0S}$  calculés avec l'approximation gaussienne sont légèrement pessimistes. L'approximation gaussienne est une technique pratique pour choisir les codes constituants des structures concaténés et déterminer les performances asymptotiques des codes concaténés.

## Références

- [1] N. Wiberg. "Codes and Decoding on General Graphs". PhD thesis, Linköping University, Linköping, Sweden, 1996.
- [2] H. El Gamal, A. R. Hammons. "Analysing the Turbo decoder using the gaussian approximation". IEEE Trans. on Info. Theory. **46**(9), pp. 671–686, Fev. 2001.
- [3] S. Y. Chung. "On the construction of some capacity approaching coding scheme". PhD thesis, MIT, Massachusetts, USA, Sept. 2000.
- [4] D. Divsalar, F. Pollara. "Multiple Turbo codes for deep space communications". TDA Progress Report 42-121, Jet Propulsion Lab., Pasadena, CA, May. 1995.
- [5] S. Benedetto, R. Gallardo, G. Montorsi. "A search for good convolutional codes to be used in the construction of Turbo codes". IEEE Trans. on Comm. **46**(9), pp. 1101–1105, Sept. 1998.

TAB. 3 – Performances asymptotiques des codes concaténés en parallèle de rendement 1/2 composés de 4 codes  $(A, r, s)$  de rendement  $\frac{4}{5}$ .

code	LDPC	série	série modifiée	parallèle
$(A, 4, 0)$	0.977 dB	4.3dB	1.19 dB	1.19 dB
$(A, 3, 1)$	0.773 dB	3 dB	0.96 dB	0.96 dB
$(A, 2, 2)$	-	-	-	-
$(A, 1, 3)$	-	-	-	-

TAB. 4 – Performances asymptotiques des codes concaténés en parallèle de rendement 1/2 composés de 5 codes  $(A, r, s)$  de rendement  $\frac{5}{6}$ .

code	LDPC	série	série modifiée	parallèle
$(A, 5, 0)$	1,038 dB		1.39 dB	1.39 dB
$(A, 4, 1)$	1.003 dB		1.32 dB	1.32 dB
$(A, 3, 2)$	1.02 dB		1.26 dB	1.26 dB
$(A, 2, 3)$	1,003 dB		1.27 dB	1.27 dB
$(A, 1, 4)$	-		-	-

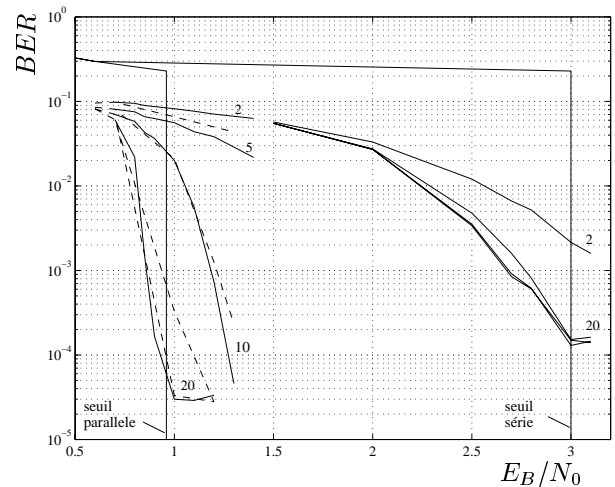


FIG. 9 – Simulation d'un turbo code multiple composé de 4 codes  $(A, 3, 1)$  - structure du décodage itératif parallèle, série (traits continus) et série modifiée (traits pointillés)